かさ歯車の荷重分布および歯元応力に及ぼす 組立誤差, 軸角誤差の影響*

専 徳 博 文^{*1}, 山 口 真 史^{*2}

Effect of Assembly Error and Shaft Angle Error on Load Distribution and Tooth Root Stress of Bevel Gears

Hirofumi SENTOKU and Masashi YAMAGUCHI

The tooth bearing in a bevel gear is sensitive to with assembly errors, shaft angle errors and deviation of apex, and the tooth end contact is easily induced. Therefore, it is important for strength design to know the load distribution on a line of contact and the tooth root stress of the bevel gear which is subjected to assembly errors and shaft angle error. In a previous report, the load distribution and the tooth root stress distribution with assembly errors in the direction of driven gear shaft and in the direction perpendicular to both of driving and driven gear shaft were calculated. In this paper, the load distribution and the tooth root stress distribution with assembly error in the direction of driving gear shaft and shaft angle error are calculated. Furthermore, the influence of assembly error and shaft angle error on bevel gear is clarified.

Key Words: Gear, Bevel Gear, Assembly Error, Shaft Angle Error, Load Distribution, Tooth Root Stress, Octoid Tooth, Gleason Tooth

1. 結 言

かさ歯車は円筒歯車と異なり, 両軸が平行でないため組立誤差, 軸角誤差により歯当たりが鋭敏に変化し, そのかみあい時において, 片当たりが生じやすく, その片当たりによる歯すじ方向の不均一な荷重分布によって各種の歯車損傷を引き起こす。したがって, 傘歯車の片当たり時での接触線上の荷重分布, 歯元応力分布を求めることは強度設計上非常に重要である。しかしながら, かさ歯車はそのかみあいが三次元的であること, その歯厚, 歯たけが内端から外端にかけて大きくなることなどのため, これらを求めることは容易でない。したがって, 負荷かみあいにおけるかさ歯車の荷重分布, 歯元応力分布を求めた研究は数少ない⁽¹⁾⁽²⁾。しかも, それらは正規の組立状態におけるものであり, かさ歯車の各種組立誤差を解析的に求め, それらを考慮して荷重分布, 歯元応力分布を計算した研究例はほとんど見受けられず, それらを実測した研究がわずかに見られるのみである⁽³⁾。そこで, 既報⁽⁴⁾においてかさ歯車の組立誤差を解析的に求め, 組立誤差

があるときの負荷かみあいにおけるかさ歯車の荷重分布および歯元実応力を計算する方法を示し, 種々の組立誤差の影響について検討した。本報では駆動歯車の軸方向における組立誤差および軸角誤差を解析的に求め, それらのある場合のかさ歯車の荷重分布および歯元応力分布への影響について検討したのでここに報告する。

2. 組立誤差の設定

図1に示すように座標軸を正規の組立状態, すなわち, 被動・駆動歯車の頂点が一致した状態での被動・駆動歯車軸とし, それぞれ y, z 軸とした。図1(a)に示すように z 軸方向の駆動歯車をずらし, 駆動歯車頂点の被動歯車頂点からの組立誤差として f_z を与え, 図1に示すように z 軸方向の正方向のずれ量を正とした。また, 軸角誤差として図1(b)に示すように駆動歯車軸の z 軸からのずれ角度, すなわち軸角誤差 $\Delta\delta$ を与え, 軸角が広がる方向を正とした。これらの組立誤差 f_z , 軸角誤差 $\Delta\delta$ により歯車が移動するが, その時の歯形を移動前の歯車に対する歯形に決め直した。以下, 組立誤差, 軸角誤差による歯形の計算方法を示す。

* 原稿受付 1995年8月2日。

^{*1} 正員, 山口大学工学部 (〒755 宇部市常盤台 2557)。

^{*2} 山口大学大学院。

Fig. 1 Assembly error and shaft angle error of bevel gear

3. 組立誤差および軸角誤差による歯形

3.1 f_z による歯形 図2は駆動歯車軸の回転角が ϕ の場合で半径 R の球面上における駆動歯車のグリーソン歯形を示し、その歯形上の点 b を球面極座標 $(\delta_{G0}, \beta_{G0})$ で表示する。なお、図2の P_0 はピッチ点を、 δ_0 はピッチ円すい角を示す。ここで、 x 軸は図1の y, z 軸に対して垂直な軸であり、したがって、図2での z 軸は原点 O より紙面に垂直な軸となる。図2に示すように点 b と z 軸を含む平面の軸系を $y'z$ 軸系としそれを図3に示す。図3は $y'z$ 軸系において駆動軸である z 軸方向の正の方向に f_z だけずらした場合を示す。点 b は移動後、点 b' となり、頂点 O は移動後 O' となる。したがって、移動後、半径 R 上で歯形上の点は C となる。この点 C を、頂点 O を原点、図2の OP_0 を原線とした球面極座標 $(\delta_{Gz}, \beta_{Gz})$ として表示し、それらを以下のようにして求めた。図3の直線 $O'C$ の

Fig. 2 Gleason tooth

Fig. 3 Gleason tooth by assembly error

点は $y'z$ 軸系で次式のようなになる。

$$y' = (z - f_z) \tan \delta_{G0} \quad \dots\dots\dots (1)$$

しかも、 C 点は半径 R の球面上なので次式が成立する。

$$y'^2 + z^2 = R^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

いま、 $A = y'/z$ として A について式(1)、(2)より解くと以下のようなになる。

$$A = \frac{y'}{z} = \frac{-a_1^2 \tan \delta_{G0} \pm \sqrt{a_2}}{1 - a_1^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

Fig. 6 Octoid tooth and tooth by assembly error and shaft angle error

ず, P_{0c} における広義の圧力角 α_{0c} は次式のようになる。

$$\alpha_{0c} = \pi/2 - \sin^{-1}(\sin \delta_0 \cdot \cos \theta / \sin \delta_{0c}) \cdots \cdots (10)$$

ただし,

$$\theta = \sin^{-1}(\sin \delta_0 \cdot \cos x),$$

$$x = \sin^{-1}(\sin \psi \cdot \cos \alpha_0),$$

$$\delta_{0c} = \cos^{-1}(\cos x \cdot \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \cdot \tan x \cdot \sin \alpha_0)$$

δ_0 : ピッチ円すい角

α_0 : 工具圧力角

$\Delta OP_{0c}P_{0L}$ において, 球面三角法を用いると E は以下のように 2 式で表示される。

$$E = \sin^{-1}\{\sin \delta_{0L} \cdot \sin(\beta_{0L} - \beta_{0c}) / \cos \alpha_{0c}\}$$

$$E = \cos^{-1}\{\cos \delta_{0L} \cdot \cos \delta_{0c}$$

$$+ \sin \delta_{0L} \cdot \sin \delta_{0c} \cdot \cos(\beta_{0L} - \beta_{0c})\} \cdots \cdots (11)$$

これらの 2 式が一致するように, δ_{0L} , δ_{0c} , β_{0L} , β_{0c} を求めてずれ量 E を求める。ここで, 頂点距離を r とおくと rE が球面上のずれ量となる。図 7, 8 は駆動・被動歯車の歯数 $z_1 = z_2 = 20$, モジュール $m = 12$ の場合で, 組立誤差, 軸角誤差による歯形のオクトイド歯形からのずれ量を駆動・被動歯車の合成ずれ量 E_T として示す。図 7 は $f_z = 0.1 \text{ mm}$ および -0.1 mm の組立誤差, 図 8 は $\Delta\delta = 0.1^\circ$ および -0.1° の軸角誤差を与えた歯形のオクトイド歯形からの合成ずれ量 E_T を内端, 中央, 外端について駆動歯車の回転角 ϕ に対して示す。なお, 組立誤差, 軸角誤差のない場合の E_T も併記している。図 7, 8 からわかるように組立誤差 f_z の

 Fig. 7 Gap between octoid tooth and tooth by assembly error (f_z)

 Fig. 8 Gap between octoid tooth and tooth by shaft angle error ($\Delta\delta$)

場合では内端から外端にかけて E_T が変化するのに対して, 軸角誤差 $\Delta\delta$ の場合には歯幅に対しての影響はなく同一の E_T である。

5. 荷 重 分 布

5.1 計算方法 組立誤差および軸角誤差を含む傘歯車対の接触線上の荷重分布を以下のようにして求めた。前述したように本計算では組立誤差および軸角誤差だけずらした後のグリーンソン歯形をオクトイド歯形の歯形誤差とみなした。駆動歯車に組立誤差, 軸角誤差を与えたときのグリーンソン歯形のオクトイド歯形からのずれ量 $E_1(r_i)$ とし, 組立誤差, 軸角誤差のない被動歯車のグリーンソン歯形のオクトイド歯形からのずれ量 $E_2(r_i)$ としてそれらの合成ずれ量を $E_T(r_i)$ とした。それと r_i との積 $r_i E_T(r_i)$ を被動歯車の駆動歯車に対する遅れ量 $\Delta\phi \cdot r_i \sin \delta_{gi}$ より減じて, 接触線上の各位置における歯面に垂直な方向のたわみを $\Delta\phi \cdot r_i \sin \delta_{gi} - r_i E_T(r_i)$ とすると, n 対の歯が同時にかみあう場合の接触線上の $L_1 \sim L_2$ の歯面に垂直な方向のたわみは既報⁽⁵⁾ で示したように次式のようになる。

$$\int_{L_{i1}}^{L_{i2}} k_b(r_i, \theta_i, R_i, \Theta_i) p_{ni}(\xi_i) \times \cos^2 \theta_{Ri}(\xi_i) \cos^2 \theta_{Ti}(\xi_i) d\xi_i + k_c(R_i, \Theta_i) p_{ni}(R_i) = \Delta\phi \cdot r_i \sin \delta_{gi} - r_i E_T(r_i) \dots \dots \dots (12)$$

(i ; i 番めの歯の対を表す, $i=1, 2, \dots, n$)

ここで, $\Delta\phi$ は被動歯車の駆動歯車に対する遅れ回転角度, p_n は接触線上の荷重分布, k_b は歯の中央平面に垂直な方向の曲げたわみの影響関数, k_c は歯面の接触による近寄りの影響関数である。また, ξ は接触線の内端を原点とした接触線上の座標であり, (r, θ) , (R, Θ) は接触線上の各点を歯の中央平面上の座標に置き換えたものであり, 前者が計算点, 後者が荷重点である。また, 以下のように同時にかみあう n 対の歯の分担トルク T_i の和が伝達トルク T に等しいという条件を満足しなければならない。

$$T_i = \int_{L_{i1}}^{L_{i2}} p_{ui}(\xi_i) l_i(\xi_i) d\xi_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \dots \dots \dots (13)$$

ここで, p_u は円周方向の分布荷重であり, l は荷重点から歯車軸までの距離を示す。 p_u と p_n の関係は既報²⁾に示す。駆動歯車の各回転角 ϕ における式(12), (13)を求めこれを解くことによって, 各 ϕ における同時にかみあう各接触線上での荷重分布を求めることができる。なお, 式(12)を解くにあたって, 接触線上における代表座標数を10点とり, ガウスの積分公式を用いた。

5・2 計算結果 図9は正規の組立状態でのグリーンソン式かさ歯車の歯の接触線上での荷重分布を示す。図10(a), (b)はその組立誤差 f_z をモジュール m で無次元化してそれぞれ $f_z/m = -8.3 \times 10^{-3}$, 8.3×10^{-3} の場合を, 図11(a), (b)は軸角誤差 $\Delta\delta = -0.1^\circ, 0.1^\circ$ の場合を示す。なお, 駆動・被動歯車の歯数は $Z_1 = Z_2 = 20$ である。横軸は内端からの距離 ξ をモジュール m で除して ξ/m とし, 縦軸は荷重分布 P_n を T/m^2 (T : 伝達トルク, m : モジュール) で除して

$P_n/(T/m^2)$ として無次元化したものを示す。また, ϕ はピッチ点を零とした小歯車軸の回転角を示す。図9, 10からわかるように正規の組立状態に対し, $f_z/m = -8.3 \times 10^{-3}$ の場合での荷重分布は内端へ, $f_z/m = 8.3 \times 10^{-3}$ の場合でのそれは外端へ移動している。したがって, f_z の正および負による荷重分布の移動方向は既報⁴⁾に示した f_x, f_y によるそれに対して逆の方向となる。これは既報⁴⁾の f_x, f_y が負の場合に前述の合成ずれ量 E_T が外端から内端へ大きくなり, 正の場合では逆に内端から外端へ大きくなるのに対して, 図7に示すように f_z の場合における正および負に対する E_T の変化が逆になることによる。また, 既報⁴⁾および図10を比較してわかるように正規の状態からの歯当たりの変化は f_x, f_y による場合よりも f_z による場合のほうが小さい。これは図7に示すように E_T の内端から外端までの変化が既報⁴⁾の f_x, f_y に対するそれらに比べて小さいためと考えられる。したがって, f_z の場合での最大歯面荷重は f_x, f_y の場合におけるそれらより小さい。図11からわかるように軸角誤差がある場合には内端から外端まで荷重が分布しており, 歯幅方向での軸角誤差による正規の状態に対して歯当たりの変化はない。これは図8に示すように軸角誤差の場合では組立誤差の場合と異なり E_T の歯幅方向での変化が

(a) $f_z/m = -8.3 \times 10^{-3}$

Fig. 9 Load distribution on tooth flank ($f_z/m=0$)

(b) $f_z/m = 8.3 \times 10^{-3}$

Fig. 10 Load distribution on tooth flank

Fig. 11 Load distribution on tooth flank

ないためと考えられる。また、図9、11からわかるように軸角誤差が -0.1° の場合はかみあい範囲が $\phi = -7.88 \sim 10.44^\circ$ であり、正規の状態でのそれ $\phi = -9.11 \sim 9.11^\circ$ に対して回転角 ϕ の正方向へ、 0.1° の場合でも $\phi = -9.05 \sim 9.32^\circ$ であり、わずかながら ϕ の正方向へ移動している。これは図8からわかるように軸角誤差 $\Delta\delta$ が正、負の場合でともに E_T 曲線の極小における ϕ が正規の状態でのそれに対して ϕ の正方向へ移動しており、しかもその移動が $\Delta\delta$ が負の場合で大きいと考えられる。

6. 歯元応力

6.1 計算方法 接触線上の荷重分布が求められた場合、かさ歯車の歯元に曲じる曲げモーメント分布は既報⁽⁶⁾に示した曲げモーメント分布の影響関数の近似式 γ を用いて求めることができる。いま、接触線上の荷重分布 p_n が求められたとき、歯元上で頂点からの任意の距離 r における曲げモーメント $M(r)$ は次式より求まる。

$$M(r) = \int_{L_1}^{L_2} \gamma(r, R, \theta) p_n(\xi) \cos \theta_R(\xi) \times \cos \theta_T(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (14)$$

次に、この歯元の位置に生じる曲げ応力は次式より求

まる。

$$\sigma_b(r) = 6M(r)/S_f^2(r) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $S_f(r)$ は r における歯の危険断面位置における歯厚を示す。この曲げ応力 $\sigma_b(r)$ が会田・寺内による平歯車の引張側歯元実応力 $\sigma_{ST}^{(7)}$ の式中における歯の中央平面に垂直な方向の分力により歯元危険断面位置に生じる呼称曲げ応力 σ_{TNb1} に相当するものと考え、歯元すみ肉部の曲率半径が歯元応力に及ぼす影響をも考慮したかさ歯車の引張側歯元の実応力 $\sigma_T(r)$ が次式で近似できると仮定する。

$$\sigma_T(r) = (\sigma_{ST}/\sigma_{TNb1}) \cdot \sigma_b(r) \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 σ_{ST} および σ_{TNb1} は各 r での歯の断面形状を基に会田・寺内の式より求めた。

6.2 計算結果 本計算方法の妥当性を検討するために、かさ歯車の負荷かみあい試験機を使用して、歯数 $Z_1 = Z_2 = 20$ 、 $m = 6$ のすぐばかさ歯車対に組立誤差、軸角誤差を与え、伝達トルク $T = 16.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ を与えて駆動歯車の一つの歯の引張側歯元の5箇所の位置での歯元応力をひずみゲージにより実測した。図12(a)は組立誤差 $f_z = \pm 0.1 \text{ mm}$ を、図12(b)は軸角誤差 $\Delta\delta = \pm 0.1^\circ$ を与えた場合のピッチ点付近における実測結果と、同組立誤差、軸角誤差を与えて求めた計算結果を対比して示す。図12(a)からわかるように組立誤差 f_z に対する歯元応力の計算値および実測値はともにほぼ一致している。図12(b)については内端、外端において実測値が計算値よりも小さい。これは次のように考えられる。駆動、被動歯車の頂点を一致させて軸角誤差のみを与えて実測することはかなり困難であり、頂点が少しずれた状態をかみあう。その状態で軸角誤差を与えると駆動、被動歯車の正規の接触線が互いにわずかに交差してかみあい、歯幅中央付近で接触し、図12(b)のように計算値よりもやや激しい山形に分布するものと考えられる。しかしながら、内端、外端付近を除いて歯元応力値が両者ともにほぼ一致し、歯幅中央でそのピークがあることなどから本計算方法は妥当であると考えられる。図13は正規の組立状態でのグリーンソン式かさ歯車の歯元応力分布を示す。図14(a)、(b)はその組立誤差 f_z/m がそれぞれ -8.3×10^{-3} 、 8.3×10^{-3} の場合を、図15(a)、(b)はそれぞれ軸角誤差 $\Delta\delta = -0.1^\circ$ 、 0.1° の場合を示す。なお、駆動・被動歯車の歯数は $Z_1 = Z_2 = 20$ である。横軸は前述の荷重分布と同様に ξ/m を、縦軸は歯元応力 σ_T を T/m^3 で除して $\sigma_T/(T/m^3)$ として無次元化したものを示す。図13、14からわかるように荷重分布と同様に正規の組立状態に対し、歯元応力分布も $f_z/m = -8.3 \times 10^{-3}$ の場合で内端側へ、 $f_z/m = 8.3 \times 10^{-3}$ の場合での

(a) In the case of f_z (b) In the case of $\Delta\delta$

Fig. 12 Comparison of experimental result with calculated result of tooth root stress

(a) $f_z/m = -8.3 \times 10^{-3}$ (b) $f_z/m = 8.3 \times 10^{-3}$

Fig. 14 Tooth root stress

Fig. 13 Tooth root stress ($f_z/m = 0$) (a) $\Delta\delta = -1.0^\circ$ (b) $\Delta\delta = 1.0^\circ$

Fig. 15 Tooth root stress

それは外端側へ移動している。したがって、最大歯元応力 $\sigma_{r\max}/(T/m^3)$ は f_z によって正規の状態のそれよりも大きくなっている。また、 $\sigma_{r\max}/(T/m^3)$ は f_z が正の場合よりも負の場合において大きい。次に、図 13, 15 からわかるように軸角誤差による歯元応力分布は荷重分布と同様に正規の状態でのそれと歯幅方向において同様であるが、軸角誤差 $\Delta\delta = \pm 0.1^\circ$ のいずれも歯元応力分布の範囲が ϕ の正方向へ移動しており、その移動は $\Delta\delta = -0.1^\circ$ の場合が $\Delta\delta = 0.1^\circ$ の場合に比

べて大きい。したがって、図 13, 15 からわかるように最大歯元応力 $\sigma_{T\max}/(T/m^3)$ はわずかであるが $\Delta\delta = -0.1^\circ$ の場合が最も大きい。

7. 結 言

グリーンソン式かさ歯車の負荷かみあい時での接触線上での荷重分布および引張側歯元実応力を求める計算方法を示し、その組立誤差、軸角誤差の影響を検討した結果、以下の結論を得た。

(1) 本計算方法による歯元実応力の計算値と実測値を比較した結果、両者はほぼ一致し、本計算方法の妥当性が確認された。

(2) 組立誤差 f_z (駆動歯車軸方向のずれ) が負の場合での歯面上の荷重分布および歯元応力分布はともに内端へ、それが正の場合はともに外端へ移動する。

(3) 組立誤差 f_z における最大分布荷重、最大歯元応力は正規の組立状態でのそれらよりも大きくなる。

(4) 軸角誤差 $\Delta\delta$ がある場合での歯面上での荷重分布および歯元応力分布はともに歯幅方向については

正規の状態でのそれらと同様であるが、軸角誤差がある場合のかみあい範囲は正規の状態のそれに対して回転角方向にわずかながら移動し、それに伴い最大歯元応力もわずかながら変化する。

文 献

- (1) Weck, M. and Stadtfeld, H. J. Einfluß des Spiral-winkels auf Flankenpressung und Zahnfuß- β -spannung und Spiralkegelrädern, *VDI-Z Bd.*, 128 (1986), 525-528.
- (2) 専徳博文・ほか 1 名, かさ歯車の荷重分布および歯元応力, *機論*, 60-580, C (1994), 319-323.
- (3) Winter, H. and Paul, M., Influence of Relative Displacements Between Pinion and Gear on Tooth Root Stresses of Spiral Bevel Gears, *Trans. ASME, J. MTAD.*, 107-3 (1985), 43-48.
- (4) 専徳博文・ほか 1 名, かさ歯車の荷重分布および歯元応力に及ぼす組立誤差の影響, *機論*, 62-597, C (1996), 1983-1989.
- (5) 専徳博文・ほか 1 名, コニフレックスすばかさ歯車の荷重分布および歯元応力, *機論*, 61-586, C (1995), 2567-2572.
- (6) 専徳博文・ほか 1 名, かさ歯車の曲げモーメント影響関数およびその近似式, *機論*, 60-572, C (1994), 1404-1408.
- (7) 会田俊夫・寺内喜男, 平歯車の曲げ応力, *機論*, 27-178 (1961), 868-874.