はりの境界条件の実験的同定法* (境界条件が非線形の場合)

安田 仁彦^{*1}, 後藤 良次^{*2}, 廣瀬 泰洋^{*3}

Experimental Identification Technique for Boundary Conditions of a Beam (When Boundary Conditions are Nonlinear)

Kimihiko YASUDA, Yoshitsugu GOTO and Yasuhiro HIROSE

In a previous paper, the first two authors proposed an experimental identification technique for boundary conditions of a beam. In that paper, however, the boundary conditions were assumed to be linear. In this paper the technique is generalized so that it can be used when the boundary conditions are nonlinear. The proposed technique is based on the principle of harmonic balance, and enables one to determine the boundary conditions in terms of spring and damping properties and equivalent masses and moments of inertia. Numerical simulation is conducted, and the applicability of the proposed technique is confirmed.

Key Words: Identification, Boundary Condition, Beam, Nonlinear, Vibration, Excitation

1. ま え が き

機械・機器・構造物の高速化, 高性能化, 軽量化に対する要求とともに, これらの対象物の動的問題に対する数学モデルを精度よく作成することがますます重要となってきた。このため, 理論的モデル化の結果と対象物の動的応答の実験データを融合して, よりよい数学モデルを作成しようとする実験的同定が大きな関心を呼んでいる。

実験的同定の問題のうち, 境界条件の同定については, 必要性は指摘されながら⁽¹⁾⁽²⁾, はん用性のある手法の開発を目的とした研究は少ない^{(3)~(5)}。

前報⁽³⁾で著者らは, 境界条件の同定の問題の基礎的検討を目的とし, はりに対して, 境界条件を実験的に同定する方法を提案した。ただしそこでは境界条件が線形であると仮定して問題を扱った。実際には境界条件は非線形性を示すことが多い。そこでここでは, 前報と同じはりに対し, 境界条件を線形と限定しないで,

同定法を提案する。前報と同じように, 境界部に外力を加えたり境界部の応答を測定できない場合を想定する。数値シミュレーションにより, 提案した同定法の有効性を検討する。

2. 実験的同定法の提案

2.1 問題設定 機械・機器・構造物の構成要素としてしばしばはりが用いられる。いまはり単独での特性は既知であるが, 組立状態でのはりの境界条件が未知のため, これを実験的に同定したいとする。

実験的同定のため, はりの両端を支える境界部 1, 2 を, 図 1 に示すようなたわみと傾きに対するばね, およびこれと並列に置かれたダンパでモデル化されるものとする。ばねおよびダンパの特性は線形とは限定せず, したがってたわみに対するばねとダンパによる復

Fig. 1 Beam

* 原稿受付 1995 年 8 月 21 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, (株)豊田中央研究所 (〒480-11 愛知県愛知郡長久手町大字長湫字横道 41-1)。

^{*3} 名古屋大学大学院。

元力 F_{r1}, F_{r2} と減衰力 F_{d1}, F_{d2} , 傾きに対するばねとダンパによる復元力モーメント M_{r1}, M_{r2} と減衰力モーメント M_{d1}, M_{d2} はそれぞれ一般に非線形関数になるものとする(添字 1, 2 は境界部 1, 2 に関する量であることを示す)。問題によっては境界部に等価な質量と慣性モーメントを考える必要があるため、これらを付加して考え、はりの両端における等価質量と等価慣性モーメントの値をそれぞれ m_1, m_2 と I_1, I_2 とする。このとき境界条件の実験的同定とは、はりの動的応答の実験データを用いて、未知関数 $F_{ri}, F_{di}, M_{ri}, M_{di}$ ($i=1, 2$) およびパラメータ m_i, I_i ($i=1, 2$) を定めることである。

実験的同定の前提として、境界部に外力を加えたり境界部の動的応答を測定することが困難で、はりの本体に外力を加えて得られる本体の動的応答の実験データのみが利用できるとする。

2・2 運動方程式とその解 実験的同定法の提案の準備として、はりの運動方程式と境界条件が与えられたとしてその解を考える。

図 1 に示したように長さ l , 密度 ρ , 縦弾性係数 E , 断面積 A , 断面二次モーメント I の一様なはりを考える。はりの一方の端を原点 O とし、静止時のはりの軸方向に x 軸を、 x 軸と直角に y 軸を定める。 y 軸方向の外力 f によって y 軸方向にたわみ w を生じるものとする。 f, w はいずれも時間 t と座標 x の関数である。はりの本体に粘性減衰が作用する場合を考え、減衰係数を C とおく。このとき運動方程式は

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} = f \quad \text{.....(1)}$$

となる。また境界条件は、

$x=0$ において

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -F_{r1} - F_{d1} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_{r1} + M_{d1} + I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}$$

$x=l$ において

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = F_{r2} + F_{d2} + m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_{r2} - M_{d2} - I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \quad \text{.....(2)}$$

が満たされることである。

外力として、基本角振動数 ω の周期外力を作用させるものとする。このような外力 f は

$$f = F_0(x) + F_1(x) \cos \omega t + F_2(x) \cos 2\omega t + \cdots + F_1^*(x) \sin \omega t + F_2^*(x) \sin 2\omega t + \cdots \quad \text{.....(3)}$$

の形のフーリエ級数で表すことができる。ここにフー

リエ係数 $F_0(x), F_1(x), \cdots$ は座標 x の既知関数である。境界条件が非線形であるので、はりは例えば分数調波共振のような応答を示し得るが、ここでは調和応答を考える。このときたわみ w は

$$w = W_0(x) + W_1(x) \cos \omega t + W_2(x) \cos 2\omega t + \cdots + W_1^*(x) \sin \omega t + W_2^*(x) \sin 2\omega t + \cdots \quad \text{.....(4)}$$

の形のフーリエ級数で与えられる。ここにフーリエ係数 $W_0(x), W_1(x), \cdots$ は座標 x の未知関数である。式(3), (4)を式(1)に代入すると、 $W_0(x), W_1(x), \cdots$ を定める式として

$$\frac{d^4 W_0(x)}{dx^4} = \frac{F_0(x)}{EI} \quad \text{.....(5)}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} + \beta_n^4 W_n^*(x) - \alpha_n^4 W_n(x) &= \frac{F_n(x)}{EI} \\ \frac{d^4 W_n^*(x)}{dx^4} - \beta_n^4 W_n(x) - \alpha_n^4 W_n^*(x) &= \frac{F_n^*(x)}{EI} \end{aligned} \quad (n=1, 2, \cdots) \quad \text{.....(6)}$$

を得る。ここに

$$\alpha_n^4 = \frac{\rho A}{EI} (n\omega)^2, \beta_n^4 = \frac{C}{EI} n\omega \quad (n=1, 2, \cdots) \quad \text{.....(7)}$$

である。式(5), (6)の一般解を求めよう。

式(5)の特解を $G_0(x)$ とおくと、式(5)の一般解は

$$W_0(x) = C_{01} + C_{02}x + C_{03}x^2 + C_{04}x^3 + G_0(x) \quad \text{.....(8)}$$

となる。ここに C_{0i} ($i=1, 2, 3, 4$) は任意定数である。特解 $G_0(x)$ は式(5)の右辺を x に関し 4 回積分して得られるが、ここでは別の形の特解を考える。 $F_0(x)$ のフーリエ変換 $\bar{F}_0(u)$ を

$$\bar{F}_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x) e^{-jux} dx \quad \text{.....(9)}$$

によって求めると、 $F_0(x)$ は

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_0(u) e^{jux} du \quad \text{.....(10)}$$

で与えられる。特解 $G_0(x)$ を

$$G_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_0(u) e^{jux} du \quad \text{.....(11)}$$

の形におく。式(10), (11)を式(5)に代入すると

$$u^4 \bar{G}_0(u) = \frac{1}{EI} \bar{F}_0(u) \quad \text{.....(12)}$$

を得る。したがって特解 $G_0(x)$ は

$$G_0(x) = \frac{1}{EI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^4} \bar{F}_0(u) e^{jux} du \quad \text{.....(13)}$$

となる。

次に式(6)の一般解を求めるため、まず右辺を零とおいて得られる同次方程式の一般解を求める。このため求める解を

$W_n(x) = Ae^{\lambda x}$, $W_n^*(x) = A^*e^{\lambda^* x}$ (14)
 とおくと、これが同次方程式の解となるために、 λ は

$$\begin{vmatrix} \lambda^4 - \alpha_n^4 & \beta_n^4 \\ -\beta_n^4 & \lambda^4 - \alpha_n^4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (15)}$$

を満たさねばならない。これを解くと λ は

$$\lambda = \pm(a_{n0} + jb_{n0}), \pm(b_{n0} - ja_{n0}), \\ \pm(a_{n0} - jb_{n0}), \pm(b_{n0} + ja_{n0}) \text{ (16)}$$

の形で定められる。 a_{n0} , b_{n0} の具体的な表示式は省略する。 λ の各値に対して A , A^* の比を求めると、この式の前の2組、後の2組の λ に対し、それぞれ

$$\frac{A^*}{A} = -j, +j \text{ (17)}$$

を得る。式(6)の $W_n(x)$, $W_n^*(x)$ に対する特解を $G_n(x)$, $G_n^*(x)$ とおくと、以上から、式(6)の一般解として

$$\begin{aligned} W_n(x) &= e^{b_{n0}x}(C_{n1} \cos a_{n0}x + C_{n2} \sin a_{n0}x) \\ &+ e^{-b_{n0}x}(C_{n3} \cos a_{n0}x + C_{n4} \sin a_{n0}x) \\ &+ \cos b_{n0}x(C_{n5} \cosh a_{n0}x + C_{n6} \sinh a_{n0}x) \\ &+ \sin b_{n0}x(C_{n7} \cosh a_{n0}x + C_{n8} \sinh a_{n0}x) \\ &+ G_n(x) \\ W_n^*(x) &= e^{b_{n0}x}(C_{n2} \cos a_{n0}x - C_{n1} \sin a_{n0}x) \\ &+ e^{-b_{n0}x}(-C_{n4} \cos a_{n0}x + C_{n3} \sin a_{n0}x) \\ &+ \sin b_{n0}x(C_{n6} \cosh a_{n0}x + C_{n5} \sinh a_{n0}x) \\ &- \cos b_{n0}x(C_{n8} \cosh a_{n0}x + C_{n7} \sinh a_{n0}x) \\ &+ G_n^*(x) \end{aligned} \text{ (18)}$$

を得る。ここに $C_{ni}(i=1, 2, \dots, 8)$ は任意定数である。式(9)から式(13)に従って特解 $G_0(x)$ を求めたときと同様に、特解 $G_n(x)$, $G_n^*(x)$ を求めるため、 $F_n(x)$, $F_n^*(x)$ のフーリエ変換 $\bar{F}_n(u)$, $\bar{F}_n^*(u)$ を、式(9)の $F_0(x)$ を $F_n(x)$, $F_n^*(x)$ で置き換えた式で求め、 $G_n(x)$, $G_n^*(x)$ を、式(11)の $\bar{G}_0(x)$ を $\bar{G}_n(u)$, $\bar{G}_n^*(u)$ で置き換えた形におく。このようにして式(6)から

$$\begin{aligned} (u^4 - \alpha_n^4) \bar{W}_n(u) + \beta_n^4 \bar{W}_n^*(u) &= \frac{\bar{F}_n(u)}{EI} \\ -\beta_n^4 \bar{W}_n(u) + (u^4 - \alpha_n^4) \bar{W}_n^*(u) &= \frac{\bar{F}_n^*(u)}{EI} \end{aligned} \text{ (19)}$$

を得る。この式を解けば、特解 $G_n(x)$, $G_n^*(x)$ として

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{1}{EI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}_n(u)(u^4 - \alpha_n^4) - \bar{F}_n^*(u)\beta_n^4}{(u^4 - \alpha_n^4)^2 + \beta_n^8} e^{jux} du \\ G_n^*(x) &= \frac{1}{EI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{F}_n(u)\beta_n^4 + \bar{F}_n^*(u)(u^4 - \alpha_n^4)}{(u^4 - \alpha_n^4)^2 + \beta_n^8} e^{jux} du \end{aligned} \text{ (20)}$$

を得る。

式(8)および(18)を式(4)に代入すれば、たわみ w

の一般解が得られる。これらに含まれる任意定数は、境界条件(2)の両辺を時間に関してフーリエ級数の形に表したとき、両辺の対応するフーリエ係数が等しくなるという条件から定められる。

2・3 実験的同定法の提案 以上によって準備が整ったので、はりの動的応答の実験データから、はりの境界条件を同定する方法を考える。

実験的同定のため、式(3)の形の周期外力をはりに作用させる。外力の大きさと分布および基本角振動数 ω を適当に定める。はりの N 個の点 $x = x_k (k=1, 2, \dots, N)$ において、この外力に対する調和応答を測定する。分数調波共振など他の応答のデータも利用できるが、そのためにはそれぞれの応答の定式化を用いればよい。得られたたわみを式(4)の形のフーリエ級数に展開し、そのフーリエ係数 $W_0(x_k)$, $W_1(x_k)$, $\dots$, $W_1^*(x_k)$, $\dots$ を求める。これらは、式(8)および式(18)の $W_0(x)$, $W_1(x)$, $\dots$, $W_1^*(x)$, $\dots$ の式において、それぞれ $x = x_k$ とおいて得られる値に等しいから

$$C_{01} + C_{02}x_k + C_{03}x_k^2 + C_{04}x_k^3 = W_0(x_k) - G_0(x_k) \text{ (21)}$$

および

$$\begin{aligned} e^{b_{n0}x_k}(C_{n1} \cos a_{n0}x_k + C_{n2} \sin a_{n0}x_k) \\ + e^{-b_{n0}x_k}(C_{n3} \cos a_{n0}x_k + C_{n4} \sin a_{n0}x_k) \\ + \cos b_{n0}x_k(C_{n5} \cosh a_{n0}x_k + C_{n6} \sinh a_{n0}x_k) \\ + \sin b_{n0}x_k(C_{n7} \cosh a_{n0}x_k + C_{n8} \sinh a_{n0}x_k) \\ = W_n(x_k) - G_n(x_k) \\ e^{b_{n0}x_k}(C_{n2} \cos a_{n0}x_k - C_{n1} \sin a_{n0}x_k) \\ + e^{-b_{n0}x_k}(-C_{n4} \cos a_{n0}x_k + C_{n3} \sin a_{n0}x_k) \\ + \sin b_{n0}x_k(C_{n6} \cosh a_{n0}x_k + C_{n5} \sinh a_{n0}x_k) \\ - \cos b_{n0}x_k(C_{n8} \cosh a_{n0}x_k + C_{n7} \sinh a_{n0}x_k) \\ = W_n^*(x_k) - G_n^*(x_k) \end{aligned} \text{ (22)}$$

を得る。式(21)および(22)はそれぞれ $C_{0i}(i=1, 2, 3, 4)$ および $C_{ni}(n=1, 2, \dots, i=1, 2, \dots, 8)$ に関する線形方程式である。測定点の数 N を4として、各測定のデータから得られる式(21)および(22)をそれぞれ連立させて解けば、 $C_{0i}(i=1, 2, 3, 4)$ および $C_{ni}(n=1, 2, \dots, i=1, 2, \dots, 8)$ を定めることができる。実際には測定データにノイズが含まれることを考慮して、 N を4より大きくした場合の各測定のデータから得られる式(21)および(22)に最小二乗法を適用して $C_{0i}(i=1, 2, 3, 4)$ および $C_{ni}(n=1, 2, \dots, i=1, 2, \dots, 8)$ を定める。得られた結果を式(8)および(18)に代入し、さらにその結果を式(4)に代入して w を定める。このようにして実験データを用いて w が式(4)の形に定められる。

次に境界部における未知関数 F_n , F_n^* , M_n , $M_n^*(i=$

1, 2) を式(2)から定めることを考える。\$F_{ri}(i=1, 2)\$ と \$M_{ri}(i=1, 2)\$ は多くの場合それぞれたわみ \$w\$ と傾き \$\theta = \partial w / \partial x\$ の関数である。\$F_{di}(i=1, 2)\$ と \$M_{di}(i=1, 2)\$ はそれぞれたわみ速度 \$\dot{w}\$ と傾き速度 \$\dot{\theta}\$ の関数である。ここではこれらの未知関数はそれぞれの引数の多項式で近似的に表すことができるものとし、

$$\begin{aligned} F_{ri} &= k_{wi}w + a_{wi}w^2 + \beta_{wi}w^3 + \cdots \\ F_{di} &= c_{wi}\dot{w} + \zeta_{wi}\dot{w}^2 + \xi_{wi}\dot{w}^3 + \cdots \\ M_{ri} &= k_{\theta i}\theta + \alpha_{\theta i}\theta^2 + \beta_{\theta i}\theta^3 + \cdots \\ M_{di} &= c_{\theta i}\dot{\theta} + \zeta_{\theta i}\dot{\theta}^2 + \xi_{\theta i}\dot{\theta}^3 + \cdots \end{aligned} \quad (i=1, 2) \quad \cdots (23)$$

とおく。ここに \$k_{wi}, a_{wi}, \cdots\$ は未知パラメータである。また記号「・」は時間微分を表す。予備的な実験などによって未知関数の性質(例えば対称性など)がわかっているならば、それを考慮(例えば二乗の項を除くなど)して未知関数の形をより正しいものにおくと精度向上が期待できる。

以上のようにして未知関数を定める問題を、未知パラメータを定める問題に帰着させる。次に未知パラメータを定める方法を考える。

上で実験的に定めた \$w\$ を用いて式(23)に表れる \$w^2, w^3, \cdots\$ などの各項を求め、それらをフーリエ級数の形に展開する。これらを \$w\$ のフーリエ級数と合わせて式(2)に代入すると、両辺ともフーリエ級数の形をとる。そこでハーモニクバランスの原理を用いて両辺の適当な項を等しいとおく。その結果、未知パラメータに関する線形方程式を得る。外力の大きさと分布を変え、同じようにして未知パラメータに関する線形方程式を求め、それらを合わせて未知パラメータに関する十分な数の方程式を導く。このようにして得られる連立方程式に再び最小二乗法を適用して未知パラメータを定める。もし未知パラメータが角振動数 \$\omega\$ に依存しないと考えられる場合には、\$\omega\$ を変えて得られる方程式もあわせ、それらの式に最小二乗法を適用する。以上が提案する同定法である。

3. 数値シミュレーション

2章で提案した実験的同定法の有効性を、数値シミュレーションによって確かめることにする。このため、数値的に得た動的応答のデータを実験データとみなし、このデータを用いて提案した同定法によって未知パラメータを定め、パラメータのもとの値と比較する方法をとる。

数値シミュレーションのため、はりの諸元を

$$\begin{aligned} \text{長さ } l &= 800 \text{ mm, 幅 } b = 19 \text{ mm} \\ \text{厚さ } h &= 2.0 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\text{縦弾性係数 } E = 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\text{密度 } \rho = 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{減衰係数 } C = 0.25 \text{ Ns/m}^2$$

..... (24)

とする。

境界の非線形性は復元力のみに存在し、\$F_{ri}, M_{ri}(i=1, 2)\$ が

$$\left. \begin{aligned} F_{ri} &= k_{wi}w + \beta_{wi}w^3 \\ M_{ri} &= k_{\theta i}\theta + \beta_{\theta i}\theta^3 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (25)$$

で与えられ、\$F_{di}, M_{di}(i=1, 2)\$ は

$$\left. \begin{aligned} F_{di} &= c_{wi}\dot{w} \\ M_{di} &= c_{\theta i}\dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (26)$$

である場合を考える。

3・1 境界部の等価質量、等価慣性モーメントを考慮する必要がない場合 境界部が振動しないことが

明らかな場合、あるいは境界部が軽いものからできている場合のように境界部の等価質量や等価慣性モーメントを考慮する必要がない場合をはじめに考える。

数値シミュレーションのため、式(25)、(26)で与えられる境界におけるパラメータの値を

$$\begin{aligned} k_{w1} &= 9.8 \times 10^2 \text{ N/m, } \beta_{w1} = 1.0 \times 10^7 \text{ N/m}^3 \\ k_{w2} &= 2.5 \times 10^2 \text{ N/m, } \beta_{w2} = 3.0 \times 10^7 \text{ N/m}^3 \\ k_{\theta 1} &= 6.0 \times 10 \text{ Nm/rad, } \beta_{\theta 1} = 2.0 \times 10^2 \text{ Nm/rad}^3 \\ k_{\theta 2} &= 3.0 \times 10^2 \text{ Nm/rad, } \beta_{\theta 2} = 5.0 \times 10^2 \text{ Nm/rad}^3 \\ c_{w1} &= 1.5 \times 10^{-1} \text{ Ns/m, } c_{w2} = 2.0 \times 10^{-1} \text{ Ns/m} \\ c_{\theta 1} &= 1.2 \times 10^{-1} \text{ Nms/rad} \\ c_{\theta 2} &= 2.5 \times 10^{-1} \text{ Nms/rad} \end{aligned} \quad \cdots (27)$$

と定める。

同定のために加える外力は

$$f = F_1(x) \cos \omega t \quad \cdots (28)$$

の形の調和外力とする。そして \$F_1(x)\$ としては、\$x = x_f\$ の位置に大きさ \$F_0\$ の集中外力が作用し

$$F_1(x) = F_0 \delta(x - x_f) \quad \cdots (29)$$

である場合とする。このとき \$F_1(x)\$ のフーリエ変換 \$\bar{F}_1(\omega)\$ として

$$\bar{F}_1(\omega) = \frac{F_0}{2\pi} e^{-j\omega x_f} \quad \cdots (30)$$

を得る。これを式(20)に代入すれば、集中外力が作用するときの特解となる。大きさ \$F_0\$ と位置 \$x_f\$ を

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 0.2 \text{ N} \\ x_f &= 480 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (31)$$

とする。

同定に際し、未知関数 \$F_{ri}, M_{ri}(i=1, 2)\$ を三次式

$$\left. \begin{aligned} F_{ri} &= k_{wi}w + a_{wi}w^2 + \beta_{wi}w^3 \\ M_{ri} &= k_{\theta i}\theta + a_{\theta i}\theta^2 + \beta_{\theta i}\theta^3 \end{aligned} \right\} \quad \cdots (32)$$

の形におく, また未知関数 F_{di}, M_{di} を式(26)の一次式の形におく. ここでは未知関数の形をかなり正確に把握していた場合を想定している. 同定によって式(27)の値と

$$\alpha_{wi}=0, \alpha_{\theta i}=0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

が得られれば, 同定が正しく行われたことになる.

応答の測定点を, 図2に示すように, はりを8等分した分割点のうち, 両端を除く7点の $x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ で行うものとする.

同定に用いる外力の振動数を定めるため, 振動数を零から 25 Hz の範囲で変化させて応答を求めた. 例として点 x_1 におけるたわみの振幅を, 基本角振動数 ω の成分の大きさ $|W_1|$ と 3ω の成分の大きさ $|W_3|$ に分けて, 外力の振動数の関数として示すと図3の曲線ようになった. ここで実線は安定, 破線は不安定であることを示す. この図から対象とする振動系は 8 Hz と 17 Hz 付近に共振点をもつことがわかる.

ここでは, 第1次の共振点付近の 10.0 Hz を同定に用いる外力の振動数とする. この振動数に対して, 各測定点におけるたわみの時間変化を数値的に求めた.

Fig. 2 Points of measurement

Fig. 3 Amplitude at point x_1

例として点 $x=x_1, x_4, x_7$ におけるたわみ w を図4に示す. このデータに FFT を適用し, $n=1, 2, 3$ に対するフーリエ係数 $W_n(x_k), W_n^*(x_k)$ を求めたところ図5のようになった.

すべての測定点における以上のような結果を, 式

Fig. 4 Deflection at points x_1, x_4, x_7

Fig. 5 Fourier coefficients

Table 1 Value of $C_{ni}(n=1, 2, 3; i=1, 2, \dots, 8)$

C_{11}^*	-2.687×10^{-3}	C_{21}^*	0.000	C_{31}^*	2.005×10^{-4}
C_{12}^*	1.264×10^{-3}	C_{22}^*	0.000	C_{32}^*	-3.430×10^{-6}
C_{13}^*	1.357×10^{-3}	C_{23}^*	0.000	C_{33}^*	8.837×10^{-5}
C_{14}^*	2.625×10^{-3}	C_{24}^*	0.000	C_{34}^*	1.688×10^{-4}
C_{15}^*	3.161×10^{-3}	C_{25}^*	0.000	C_{35}^*	1.986×10^{-4}
C_{16}^*	-2.963×10^{-3}	C_{26}^*	0.000	C_{36}^*	-1.990×10^{-4}
C_{17}^*	3.134×10^{-3}	C_{27}^*	0.000	C_{37}^*	-1.182×10^{-4}
C_{18}^*	-3.342×10^{-3}	C_{28}^*	0.000	C_{38}^*	1.180×10^{-4}

Table 2 Results of identification

Parameter	Original	Identified
k_{w1} (N/m)	9.8×10^2	9.800×10^2
k_{w2} (N/m)	2.5×10^2	2.500×10^2
$k_{\theta 1}$ (Nm/rad)	6.0×10^1	6.000×10^1
$k_{\theta 2}$ (Nm/rad)	3.0×10^2	3.000×10^2
c_{w1} (Ns/m)	1.5×10^{-1}	1.500×10^{-1}
c_{w2} (Ns/m)	2.0×10^{-1}	2.000×10^{-1}
$c_{\theta 1}$ (Nms/rad)	1.2×10^{-1}	1.200×10^{-1}
$c_{\theta 2}$ (Nms/rad)	2.5×10^{-1}	2.500×10^{-1}
α_{w1} (N/m ²)	0.0	1.073×10^{-12}
α_{w2} (N/m ²)	0.0	-3.495×10^{-12}
$\alpha_{\theta 1}$ (Nm/rad ²)	0.0	7.921×10^{-14}
$\alpha_{\theta 2}$ (Nm/rad ²)	0.0	1.265×10^{-12}
β_{w1} (N/m ³)	1.0×10^7	1.000×10^7
β_{w2} (N/m ³)	3.0×10^7	3.000×10^7
$\beta_{\theta 1}$ (Nm/rad ³)	2.0×10^2	2.000×10^2
$\beta_{\theta 2}$ (Nm/rad ³)	5.0×10^2	5.000×10^2

(22)の $n=1, 2, 3$ の式に代入し $C_{ni}(n=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, 8)$ を求めたところ、表1の結果が得られた。これを式(18)に代入し、その結果を式(4)に代入してたわみ w を定めた。次にそれを式(2)に代入し、両辺の $\cos n\omega t, \sin n\omega t (n=1, 2, 3)$ の係数を等しいとおいて未知パラメータを定めたところ、表2の結果が得られた。表から、同定によるパラメータの値は式(27), (33)で与えられるものとよく一致し、提案した同定法が有効であることがわかった。

3・2 境界部の等価質量、等価慣性モーメントを考慮する必要がある場合 ここでは境界部の等価質量、等価慣性モーメントを考慮する必要がある、一般の場合を取り上げる。

数値シミュレーションのためはりの寸法等の値、荷重条件は3・1節と同じとする。また等価質量 m_1, m_2 と等価慣性モーメント I_1, I_2 を

Fig. 6 Amplitude at point x_1 Fig. 7 Deflection at points x_1, x_4, x_7

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 2.0 \times 10^{-2} \text{ kg}, \quad m_2 = 4.0 \times 10^{-2} \text{ kg} \\
 I_1 &= 6.0 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2, \quad I_2 = 1.2 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2 \\
 &\dots\dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

と定める。

Table 3 Value of $C_{ni}(n=1, 2, 3; i=1, 2, \dots, 8)$

C_{11}	-1.713×10^{-3}	C_{21}	0.000	C_{31}	3.288×10^{-4}
C_{12}	1.053×10^{-3}	C_{22}	0.000	C_{32}	-1.589×10^{-4}
C_{13}	6.757×10^{-4}	C_{23}	0.000	C_{33}	2.396×10^{-4}
C_{14}	1.952×10^{-3}	C_{24}	0.000	C_{34}	2.383×10^{-4}
C_{15}	2.439×10^{-3}	C_{25}	0.000	C_{35}	2.109×10^{-4}
C_{16}	-2.248×10^{-3}	C_{26}	0.000	C_{36}	-2.116×10^{-4}
C_{17}	1.925×10^{-3}	C_{27}	0.000	C_{37}	-1.318×10^{-4}
C_{18}	-2.088×10^{-3}	C_{28}	0.000	C_{38}	1.311×10^{-4}

Table 4 Results of identification

Parameter	Original	Identified
k_{w1} (N/m)	9.8×10^2	9.800×10^2
k_{w2} (N/m)	2.5×10^2	2.500×10^2
$k_{\theta1}$ (Nm/rad)	6.0×10^1	6.000×10^1
$k_{\theta2}$ (Nm/rad)	3.0×10^2	3.000×10^2
c_{w1} (Ns/m)	1.5×10^{-1}	1.500×10^{-1}
c_{w2} (Ns/m)	2.0×10^{-1}	2.000×10^{-1}
$c_{\theta1}$ (Nms/rad)	1.2×10^{-1}	1.200×10^{-1}
$c_{\theta2}$ (Nms/rad)	2.5×10^{-1}	2.500×10^{-1}
α_{w1} (N/m ²)	0.0	6.029×10^{-12}
α_{w2} (N/m ²)	0.0	-5.433×10^{-12}
$\alpha_{\theta1}$ (Nm/rad ²)	0.0	8.812×10^{-14}
$\alpha_{\theta2}$ (Nm/rad ²)	0.0	-1.060×10^{-12}
β_{w1} (N/m ³)	1.0×10^7	1.000×10^7
β_{w2} (N/m ³)	3.0×10^7	3.000×10^7
$\beta_{\theta1}$ (Nm/rad ³)	2.0×10^2	2.000×10^2
$\beta_{\theta2}$ (Nm/rad ³)	5.0×10^2	5.000×10^2
m_1 (kg)	2.0×10^{-2}	2.000×10^{-2}
m_2 (kg)	4.0×10^{-2}	4.000×10^{-2}
I_1 (kgm ²)	6.0×10^{-7}	6.000×10^{-7}
I_2 (kgm ²)	1.2×10^{-6}	1.200×10^{-6}

Fig. 8 Fourier coefficients

この場合例として点 x_1 におけるたわみの振幅を、基本角振動数 ω の成分の大きさ $|W_1|$ と 3ω の成分の大きさ $|W_3|$ に分けて、外力の振動数の関数として図3と同じように示すと図6のようになった。同定に用いる外力の振動数を 9.0 Hz とし、この振動数に対して各測定点におけるたわみの時間変化を求めた。例として点 $x=x_1, x_4, x_7$ におけるたわみ w を図7に示す。このデータのフーリエ係数は図8のようになった。

このような結果から、3・1節と同様にして $C_{ni}(n=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, 8)$ を求めたところ、表3の結果が得られた。これから再び3・1節と同様にして未知パラメータを定めたところ、表4の結果が得られた。表から、同定に用いるパラメータの値は式(27), (33), (34)で与えられるもとの値とよく一致することがわかった。以上のようにして、提案した同定法が有効であることを確認した。

4. む す び

境界条件の実験的同定法の基礎的な検討を目的としてはりを取り上げ、前報で提案した同定法を境界条件が線形と限定しない場合に適用できる方法とした。提案した同定法は、境界部をばね、ダンパおよび等価な質量と慣性モーメントでおきかえ、ばねとダンパの特性を与える関数および質量と慣性モーメントの値を、はり本体の周期外力に対する動的応答のデータを用いて定めるものである。数値シミュレーションによって、提案した同定法が有効であることを確認した。

文 献

- (1) 田中基八郎・三枝省三, 振動モデルとシミュレーション, (1984), 281-289, 応用技術出版.
- (2) 長松昭男・大熊政明, 部分構造合成法, (1991), 26-27, 培風館.
- (3) 安田仁彦・後藤良次, はりの境界条件の実験的同定法 (境界条件が線形の場合), 機論, **60**-570, C (1994), 482-489.
- (4) 安田仁彦・崔勇俊, 円板の境界条件の実験的同定法 (線形軸対称問題の場合), 機論, **61**-590, C (1995), 3889-3894.
- (5) 後藤良次・安田仁彦, はりの境界条件の実験的同定法 (適用性の検討と転がり軸受への応用), 機論, **62**-597, C (1996), 1797-1804.