非線形ロバスト H_∞ 制御による 回転型倒立振子の振り上げ安定化制御*

石井 千 春^{*1}, 申 鉄 龍^{*2}, 田 村 捷 利^{*3}

Swing-Up and Stabilization Control for an Inverted Pendulum System via Nonlinear Robust H_∞ Control

Chiharu ISHII, Tielong SHEN and Katsutoshi TAMURA

We propose a swing up and stabilization control scheme for an inverted pendulum system. Using the Lie theoretic technique, the inverted pendulum system is roughly linearized by partial nonlinear compensation. Then, the state space equation of a roughly linearized system is described as a combination of an approximate linearization model and a nonlinear modeling error. A stabilizing controller is designed based on nonlinear H_∞ control theory for the state space equation so as to guarantee robust stability and robust performance of the closed loop system in the presence of uncertain nonlinear perturbations. A swing up controller is designed based on the Lyapunov stability theory. The effectiveness and robustness of the proposed control scheme are demonstrated via experiments.

Key Words: Inverted Pendulum, Swing Up Control, Nonlinear Robust H_∞ Control, Hamilton Jacobi Inequality, Robust Stability, Robust Performance

1 はじめに

従来から行われてきた倒立振子を安定化させる方法の一つに、システムを平衡点(倒立点)周りで線形近似し、その線形化されたシステムに対して、制御系を構成する方法が挙げられる。しかしながら、この方法では、倒立点近傍における線形近似を用いたモデルに対して安定化制御器を設計しており、実際に倒立点からどのくらいの範囲でその制御器が有効であるかは明確にされていない。そのため現在にいたっては、倒立振子のもつ非線形性を積極的に考慮した制御器の設計法が、数多く報告されている [1][2]。

文献 [3] では、座標変換とフィードバックによる厳密な線形化手法を用いて倒立振子を安定化させる制御器の設計法を報告している。これは、座標変換とフィードバックによって、元の非線形システムを新しい座標系で可制御な線形時不変のシステムで記述し、変換されたシステムに対し、線形制御器を設計するというものである。しかしながら、一般的に倒立振子システムは厳密に線形化できるための条件を満たさないため、[3] では座標変換に必要な関数を近似的に求めている。したがって、元の倒立振子システムが厳密

に線形化できているとは限らなため、設計された制御器の有効性は実験的に確かめるしかない。また、文献 [4] では、線形近似により無視されてしまう非線形項を考慮するため、リー微分により導かれた部分的非線形補償入力を用いてシステムを大雑把に線形化し、さらに入力変換により厳密な線形系を導出している。その線形システムに対し、最適制御理論を用いて安定化制御器を求め、入力を逆変換することにより元の倒立振子システムに対する制御入力を求めるという振子の振り上げ安定化制御則を提案し、シミュレーション結果を報告している。しかしながら、得られた台車への入力トルクは非常に大きく、実機にはモータに入力電圧の制限があることから実機への応用には適していないと思われる。

本論文では、振子の倒立点からの有効可動区間および台軸の許容速度を指定し、その範囲内でシステムの安定性を保証する制御器の設計法について述べる。具体的には、まず、文献 [4] と同様に部分的非線形補償入力を用いてシステムを大雑把に線形化する。その後、この非線形補償入力で打ち消されずに残った非線形項を含んでいるシステムを、倒立点近傍における線形近似モデルと、これに対するモデル化誤差の和という形で表す。このモデル化誤差を、指定した振子の有効可動区間および台軸の許容速度内で不確かな構造的摂動として扱い、非線形ロバスト H_∞ 制御理論に

* 1995 年 12 月 6 日 第 38 回自動制御連合講演会において講演、原稿受付 1995 年 8 月 28 日。

*¹ 上智大学大学院 (〒102 東京都千代田区紀尾井町 7-1)。

*² 上智大学理工学部。

*³ 正員、上智大学理工学部。

基づいて、この非線形な摂動に対してロバストな制御器を設計する。さらに、設計した制御器を振子の安定化制御器とし、振子の振り上げにはリアプノフの安定理論から振子系の力学的エネルギーを増加させる入力を通じ、これらを併用することにより倒立振子システムの振り上げ安定化制御を行う。振子の安定化制御器として本論文で提案した非線形摂動に対してロバストな制御器を用いて行った実験結果を示す。さらに、比較のために非線形な摂動を考慮していない制御器を用いて行った実験結果も示す。

2 倒立振子モデル

倒立振子を図1のようにモデル化する。

図 1: Model of Inverted Pendulum

図1において、

- θ_0 : 台軸角変位
- θ_1 : 1 軸角変位
- m_0 : 台軸総重量
- m_1 : 1 軸総重量
- l_0 : 台軸長さ
- l_{c0} : 台軸重心位置
- l_{c1} : 1 軸重心位置
- J_0 : 台軸重心まわりの慣性モーメント
- J_1 : 1 軸重心まわりの慣性モーメント
- g : 重力加速度

運動方程式は次式で与えられる。

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + D\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \quad (1)$$

ここで、

$$\theta = [\theta_0 \ \theta_1]^T \quad (2)$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} j_1 + j_2 \sin^2 \theta_1 & j_3 \cos \theta_1 \\ j_3 \cos \theta_1 & j_2 + j_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 2j_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 & -j_3 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ -j_2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -j_5 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\tau = [\tau_0 \ f_w]^T \quad (7)$$

ここで、 $\theta = [\theta_0 \ \theta_1]^T$ は台軸および振子の角度ベクトル、 $M(\theta)$ は慣性行列、 $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$ はコリオリ力や遠心力を含む非線形項、 D は粘性摩擦行列、 $G(\theta)$ は重力項である。また、 τ_0 は台軸に対する入力トルク、 f_w は振り上げから安定化に推移した際に、振子が倒立点でもつ速度を与えるための等価的なインパルス入力である。さらに、簡単のために次の記号を使った。

$$j_1 = J_0 + m_0 l_{c0}^2 + m_1 l_0^2$$

$$j_2 = m_1 l_{c1}^2$$

$$j_3 = m_1 l_0 l_{c1}$$

$$j_4 = J_1$$

$$j_5 = m_1 g l_{c1}$$

また、 $\det M(\theta) \neq 0 \ \forall \theta$ より、 θ の値によらず常に $M^{-1}(\theta)$ が存在する。

(1) 式の両辺に左から $M^{-1}(\theta)$ をかけると

$$\ddot{\theta} + M^{-1}(\theta)C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + M^{-1}(\theta)D\dot{\theta} + M^{-1}(\theta)G(\theta) = M^{-1}(\theta)\tau \quad (8)$$

ここで、状態 x を

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_0 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1]^T$$

とおくと、次式の状態方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ F_1(x) + G_1(x)\tau_0 + H_1(x)f_w \\ F_2(x) + G_2(x)\tau_0 + H_2(x)f_w \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし、

$$F_1(x) = \frac{-1}{\det M(x)} \{ 2j_2(j_2 + j_4) \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_3 x_4 + d_0(j_2 + j_4) \cdot x_3 - j_3(j_2 + j_4) \sin x_2 \cdot x_4^2 + j_2 j_3 \sin x_2 \cos^2 x_2 \cdot x_3^2 - j_3 d_1 \cos x_2 \cdot x_4 + j_3 j_5 \sin x_2 \cos x_2 \}$$

$$F_2(x) = \frac{-1}{\det M(x)} \{ -2j_2 j_3 \sin x_2 \cos^2 x_2 \cdot x_3 x_4$$

$$\begin{aligned}
& -j_3 d_0 \cos x_2 \cdot x_3 + j_3^2 \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_4^2 \\
& -j_2(j_1 + j_2 \sin^2 x_2) \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_3^2 \\
& + d_1(j_1 + j_2 \sin^2 x_2) \cdot x_4 \\
& -j_5(j_1 + j_2 \sin^2 x_2) \sin x_2 \} \\
G_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\det M(\mathbf{x})}(j_2 + j_4) \\
G_2(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{\det M(\mathbf{x})}j_3 \cos x_2 \\
H_1(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{\det M(\mathbf{x})}j_3 \cos x_2 \\
H_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\det M(\mathbf{x})}(j_1 + j_2 \sin^2 x_2)
\end{aligned}$$

(9) 式に

$$\tau_0 = \frac{1}{G_1(\mathbf{x})}\{u - F_1(\mathbf{x})\} \quad (10)$$

なる部分的非線形補償入力を代入すると、状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ u - \frac{j_3 \cos x_2}{\det M(\mathbf{x})} f_w \\ * \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
* &= c_1 \sin x_2 - c_2 x_4 + c_3 \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_3^2 \\
& - c_4 \cos x_2 u + \frac{j_1 + j_2 \sin^2 x_2}{\det M(\mathbf{x})} f_w
\end{aligned}$$

と書ける。ただし、

$$c_1 = \frac{j_5}{j_2 + j_4}, \quad c_2 = \frac{d_1}{j_2 + j_4}, \quad c_3 = \frac{j_2}{j_2 + j_4}, \quad c_4 = \frac{j_3}{j_2 + j_4}$$

(11) 式を、倒立点近傍における線形近似モデルと、これに対するモデル化誤差の和という形で次式のように表す。

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + (g_1(\mathbf{x}) + \Delta g_1(\mathbf{x}))\mathbf{w} + (g_2(\mathbf{x}) + \Delta g_2(\mathbf{x}))\mathbf{u} \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{w} = f_w$ である。ここに、

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & -c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (13)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-j_3}{\det M_1} \\ \frac{j_1}{\det M_1} \end{bmatrix}, \quad g_2(\mathbf{x}) = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -c_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1(\sin x_2 - x_2) + c_3 \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_3^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Delta g_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{j_3}{\det M_1} + \frac{-j_3 \cos x_2}{\det M(\mathbf{x})} \\ \frac{-j_1}{\det M_1} + \frac{j_1 + j_2 \sin^2 x_2}{\det M(\mathbf{x})} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\Delta g_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_4(\cos x_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\det M(\mathbf{x}) &= (j_2 + j_4)(j_1 + j_2 \sin^2 x_2) - j_3^2 \cos^2 x_2 \\
\det M_1 &= (j_2 + j_4)j_1 - j_3^2
\end{aligned}$$

3 非線形ロバスト H_∞ 制御理論

次の非線形システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) + (g_1(\mathbf{x}) + \Delta g_1(\mathbf{x}))\mathbf{w} \\ & + (g_2(\mathbf{x}) + \Delta g_2(\mathbf{x}))\mathbf{u} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{z} = h(\mathbf{x}) + j(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (19)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

ここに、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル、 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{m_1}$ は外乱信号、 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{m_2}$ は制御入力、 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^p$ は評価出力である。 $f(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $h(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, $g_1(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m_1}$, $g_2(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m_2}$, $j(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{p \times m_2}$ は十分滑らかな既知関数であり、 $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, を満たす。また、 $\Delta f(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\Delta g_1(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m_1}$, $\Delta g_2(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m_2}$ は滑らかな摂動関数である。

ここで、次の仮定を設ける。

仮定 1 $h^T(\mathbf{x})j(\mathbf{x}) = 0$, $j^T(\mathbf{x})j(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in B_r$,

ただし、 B_r は $\mathbf{x} = 0$ の半径 r の開球である。□

仮定 2 不確かな関数 $\Delta f(\mathbf{x})$, $\Delta g_1(\mathbf{x})$, $\Delta g_2(\mathbf{x})$ はそれぞれ次のように表現できる。

$$\Delta f(\mathbf{x}) = e_f(\mathbf{x})\delta_f(\mathbf{x}) \quad (20)$$

$$\Delta g_1(\mathbf{x}) = e_{g_1}(\mathbf{x})\delta_{g_1}(\mathbf{x}) \quad (21)$$

$$\Delta g_2(\mathbf{x}) = e_{g_2}(\mathbf{x})\delta_{g_2}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

ここに、 $e_f(\mathbf{x})$, $e_{g_1}(\mathbf{x})$, $e_{g_2}(\mathbf{x})$ は既知関数であり、 $\delta_f(\mathbf{x})$, $\delta_{g_1}(\mathbf{x})$, $\delta_{g_2}(\mathbf{x})$ はそれぞれ次式を満たす有界な摂動関数である。

$$\delta_f(0) = 0, \quad \|\delta_f(\mathbf{x})\| \leq \|m_f(\mathbf{x})\|, \quad \forall \mathbf{x} \in B_r \quad (23)$$

$$\delta_{g_1}(0) = 0, \quad \|\delta_{g_1}(\mathbf{x})\| \leq \|m_{g_1}(\mathbf{x})\|, \quad \forall \mathbf{x} \in B_r \quad (24)$$

$$\delta_{g_2}(0) = 0, \quad \|\delta_{g_2}(\mathbf{x})\| \leq \|m_{g_2}(\mathbf{x})\|, \quad \forall \mathbf{x} \in B_r \quad (25)$$

$m_f(\mathbf{x})$, $m_{g_1}(\mathbf{x})$, $m_{g_2}(\mathbf{x})$ は重み関数で、与えられているものとする。□

(20),(21),(22) 式を用いると、(18) 式は

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = & f(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})\mathbf{u} + g_1(\mathbf{x})\mathbf{w} + e_f(\mathbf{x})\delta_f(\mathbf{x}) \\ & + e_{g1}(\mathbf{x})\delta_{g1}(\mathbf{x})\mathbf{w} + e_{g2}(\mathbf{x})\delta_{g2}(\mathbf{x})\mathbf{u}\end{aligned}\quad (26)$$

と書ける。

ここで、次式の拡張システムを考える。

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{x}) + g_e(\mathbf{x})\mathbf{w}' + g_2(\mathbf{x})\mathbf{u}\quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{z}}' = h_e(\mathbf{x}) + j_{e1}(\mathbf{x})\mathbf{w}' + j_{e2}(\mathbf{x})\mathbf{u}\quad (28)$$

ただし、

$$\begin{aligned}g_e(\mathbf{x}) &= [\lambda_0 g_1(\mathbf{x}) \quad \lambda_1 e_f(\mathbf{x}) \quad \lambda_2 e_{g2}(\mathbf{x}) \quad \lambda_3 e_{g1}(\mathbf{x})], \\ \mathbf{w}' &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} \mathbf{w} \\ \frac{1}{\lambda_1} \delta_f(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{\lambda_2} \delta_{g2}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \frac{1}{\lambda_3} \delta_{g1}(\mathbf{x}) \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} \mathbf{z} \\ \frac{\gamma}{\lambda_1} m_f(\mathbf{x}) \\ \frac{\gamma}{\lambda_2} m_{g2}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \frac{\gamma}{\lambda_3} m_{g1}(\mathbf{x}) \mathbf{w} \end{bmatrix}, \\ h_e(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} h(\mathbf{x}) \\ \frac{\gamma}{\lambda_1} m_f(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j_{e2}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} j(\mathbf{x}) \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\lambda_2} m_{g2}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ j_{e1}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_3} \gamma m_{g1}(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はスケーリングファクターである。

システム (18),(19) に対して、状態フィードバック則 $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ を考える。このとき、次の定理が成立する。

定理 1 仮定 1,2 が満たされているとする。

$\gamma^2 I - j_{e1}^T(\mathbf{x})j_{e1}(\mathbf{x}) > 0$ となるようなスケール $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ が存在し、ハミルトンヤコビ不等式

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T} g_e(\mathbf{x}) (\gamma^2 - j_{e1}^T(\mathbf{x})j_{e1}(\mathbf{x}))^{-1} g_e^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \\ & - \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T} g_2(\mathbf{x}) (j_{e2}^T(\mathbf{x})j_{e2}(\mathbf{x}))^{-1} g_2^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \\ & + \{h_e^T(\mathbf{x})h_e(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x}\} \leq 0\end{aligned}\quad (29)$$

を満たす正定値関数 $\phi(\cdot) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ と正定数 $\varepsilon > 0$ が存在するならば、次の条件

(S1) $\mathbf{w} = 0$ のとき、閉ループ系が漸近安定である。

(S2) 任意の $T > 0$ に対して、 $\mathbf{x}(t_0) = 0$ としたとき $\frac{\|\mathbf{z}\|_T}{\|\mathbf{w}\|_T} < \gamma$ が成り立つ。

ここで、 $\|\cdot\|_T = \{\int_0^T \|\cdot\|^2 dt\}^{\frac{1}{2}}$

を達成する状態フィードバック制御則は

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} j^T(\mathbf{x})j(\mathbf{x}) + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} m_{g2}^T(\mathbf{x})m_{g2}(\mathbf{x}) \right)^{-1} g_2^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\quad (30)$$

で与えられる。□

証明 付録参照。

Remark 1 ハミルトンヤコビ不等式 (29) を満たす $\phi(\mathbf{x})$ の存在は、(27),(28) 式のシステムに対して状態フィードバックを施して、閉ループ系が漸近安定および $\frac{\|\mathbf{z}'\|_T}{\|\mathbf{w}'\|_T} < \gamma$ となるような非線形 H_∞ 制御問題が可解であるための条件となっている [5]。

Remark 2 (29) 式は、簡単な計算より次のハミルトンヤコビ不等式に書き換えられる。

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T} f(\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T} \{ \lambda_0^2 g_1(\mathbf{x}) R^{-1}(\mathbf{x}) g_1^T(\mathbf{x}) + \lambda_1^2 e_f(\mathbf{x}) e_f^T(\mathbf{x}) \\ & + \lambda_2^2 e_{g2}(\mathbf{x}) e_{g2}^T(\mathbf{x}) + \lambda_3^2 e_{g1}(\mathbf{x}) e_{g1}^T(\mathbf{x}) \} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \\ & - \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}^T} g_2(\mathbf{x}) S^{-1}(\mathbf{x}) g_2^T(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \\ & + \{ \frac{1}{\lambda_0^2} h^T(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} m_f^T(\mathbf{x})m_f(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{x}^T \mathbf{x} \} \leq 0\end{aligned}\quad (31)$$

ここで、

$$R(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_3^2} m_{g1}^T(\mathbf{x})m_{g1}(\mathbf{x})$$

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_0^2} j^T(\mathbf{x})j(\mathbf{x}) + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} m_{g2}^T(\mathbf{x})m_{g2}(\mathbf{x})$$

文献 [6] の Theorem 2. では $\Delta g_1(\mathbf{x}) = \Delta g_2(\mathbf{x}) = 0$ の場合、[7] の Theorem 2. では $\Delta g_1(\mathbf{x}) = 0$ の場合についての結果が得られており、(31) 式から本定理がこれらの定理の自然な拡張となっていることがわかる。

4 安定化制御器の設計

振子の倒立点からの振れ角 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{6}$ および台軸の最高角速度 $5[\text{rad/sec}]$ までの範囲で生じる摂動 $\Delta f(\mathbf{x})$, $\Delta g_1(\mathbf{x})$, $\Delta g_2(\mathbf{x})$ に対してロバスト安定性を補償し、かつ振子にかかる外力トルク f_w が振子のレギュレーションに与える影響をできるだけ小さくするような制御器を設計する。

(15),(16),(17) において、 $\Delta f(\mathbf{x}) = e_f \delta_f(\mathbf{x})$, $\Delta g_1(\mathbf{x}) = e_{g1} \delta_{g1}(\mathbf{x})$, $\Delta g_2(\mathbf{x}) = e_{g2} \delta_{g2}(\mathbf{x})$ をそれぞれ次のように表現する。

$$e_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 50c_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x_2 - x_2 \\ \frac{1}{50} \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (32)$$

$$e_{g1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_{g1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{j_3}{\det M_l} + \frac{-j_3 \cos x_2}{\det M(x)} \\ \frac{-j_1}{\det M_l} + \frac{j_1 + j_2 \sin^2 x_2}{\det M(x)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$e_{g2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}, \quad \delta_{g2}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - \cos x_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

このとき、 $-\frac{\pi}{6} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{6}$ かつ $-5.0 \leq x_3 \leq 5.0$ で

$$\|\delta_f(x)\| \leq \|m_f x\|$$

$$\|\delta_{g1}(x)\| \leq \|m_{g1}\|$$

$$\|\delta_{g2}(x)\| \leq \|m_{g2}\|$$

を満たす $m_f x$, m_{g1} , m_{g2} を決定する。

$$\begin{aligned} |\sin x_2 - x_2| &\leq |\sigma_1 x_2|, \quad -\frac{\pi}{6} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{6} \\ \left| \frac{1}{50} \sin x_2 \cos x_2 \cdot x_3^2 \right| &\leq |\sigma_2 x_3|, \quad -5.0 \leq x_3 \leq 5.0 \\ \left| \frac{j_3}{\det M_l} + \frac{-j_3 \cos x_2}{\det M(x)} \right| &\leq |\sigma_3|, \quad -\frac{\pi}{6} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{6} \\ \left| \frac{-j_1}{\det M_l} + \frac{j_1 + j_2 \sin^2 x_2}{\det M(x)} \right| &\leq |\sigma_4|, \quad -\frac{\pi}{6} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{6} \\ |1 - \cos x_2| &\leq |\sigma_5|, \quad -\frac{\pi}{6} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

を満たす σ_i ($i = 1 \sim 5$) が求まれば、

$$m_f x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \quad m_{g1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix}, \quad m_{g2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_5 \end{bmatrix}$$

と定まる。

$-\frac{\pi}{6} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{6}$ かつ $-5.0 \leq \theta_0 \leq 5.0$ の範囲で、計算により推定した σ_i ($i = 1 \sim 5$) の値を表 1 に示す。

表 1: Values of σ_i

σ_1	0.0451	σ_3	1.2633	σ_5	0.1340
σ_2	0.0433	σ_4	2.3607		

また、外乱に対する評価量を次のように定義する。

$$z = C_1 x + D_{12} u, \quad C_1^T D_{12} = 0 \quad (35)$$

ただし、

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

(12), (35) 式に対して、定理 1 を適用すると、(31) 式のハミルトンヤコビ不等式は次のように記述される。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial x^T} A x + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \{ \lambda_0^2 B_1 (1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_3^2} m_{g1}^T m_{g1})^{-1} B_1^T \\ &\quad + \lambda_1^2 e_f e_f^T + \lambda_2^2 e_{g2} e_{g2}^T + \lambda_3^2 e_{g1} e_{g1}^T \} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} B_2 \left(\frac{1}{\lambda_0^2} D_{12}^T D_{12} + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} m_{g2}^T m_{g2} \right)^{-1} B_2^T \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_0^2} x^T C_1^T C_1 x + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} x^T m_f^T m_f x + \varepsilon x^T x \leq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、適当な正定行列 P を用いて、正定値関数 $\phi(x)$ として

$$\phi(x) = x^T P x \quad (37)$$

を選ぶ。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P x + P^T x \quad (38)$$

となるので、(36) 式を整理すると、

$$\begin{aligned} &x^T \{ A^T P + P A + \frac{1}{\gamma^2} P \{ \lambda_0^2 B_1 (1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_3^2} m_{g1}^T m_{g1})^{-1} B_1^T \\ &\quad + \lambda_1^2 e_f e_f^T + \lambda_2^2 e_{g2} e_{g2}^T + \lambda_3^2 e_{g1} e_{g1}^T \} P \\ &\quad - P B_2 \left(\frac{1}{\lambda_0^2} D_{12}^T D_{12} + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} m_{g2}^T m_{g2} \right)^{-1} B_2^T P \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_0^2} C_1^T C_1 + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} m_f^T m_f + \varepsilon \} x \leq 0 \end{aligned} \quad (39)$$

となる。ここで、正定行列 P としてリカッチ不等式

$$\begin{aligned} &A^T P + P A + P \{ \frac{1}{\gamma^2} \{ \lambda_0^2 B_1 (1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_3^2} m_{g1}^T m_{g1})^{-1} B_1^T \\ &\quad + \lambda_1^2 e_f e_f^T + \lambda_2^2 e_{g2} e_{g2}^T + \lambda_3^2 e_{g1} e_{g1}^T \} \\ &\quad - B_2 \left(\frac{1}{\lambda_0^2} D_{12}^T D_{12} + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} m_{g2}^T m_{g2} \right)^{-1} B_2^T \} P \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_0^2} C_1^T C_1 + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} m_f^T m_f + \varepsilon \leq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

の正定解 $P > 0$ を用いる。このとき、(31) 式が満たされ、

(30) 式の状態フィードバック制御則は

$$u = k(x) = - \left(\frac{1}{\lambda_0^2} D_{12}^T D_{12} + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} m_{g2}^T m_{g2} \right)^{-1} B_2^T P x \quad (41)$$

で与えられる。

表 2 に示した設計パラメータを用いて制御器を設計する。

表 2: Design Parameters

c_1	0.01	d	0.01	λ_0	0.01
c_2	0.01	γ	30	λ_1	0.1
c_3	0.005	ε	0.0001	λ_2	2.0
c_4	0.005			λ_3	0.2

状態フィードバック制御則は次式のように求まった。

$$k(x) = [6.3 \quad 1025 \quad 83.5 \quad 165.8] x \quad (42)$$

Remark 3 定理 1 の (S2) の仕様は、(35) 式の z の定義より、次の評価関数を小さくすることを意味している。

$$\int_0^T (x^T C_1^T C_1 x + u^T D_{12}^T D_{12} u) dt \quad (43)$$

Remark 4 リカッチ不等式 (40) は $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をスケールとした定数スケーリング H_∞ 制御問題に帰着される [8]。したがって、LMI 等により解くことができる [9]。

5 振り上げ制御則の導出

図 2: Pendulum System

図 2 に示される垂下点での振子系の運動方程式は

$$m_1 l_{c1} \ddot{\theta}_1 = -m_1 g \sin \theta_1 + F \cos \theta_1 \quad (44)$$

で表される。ここで、 θ_1 は垂下点からの振子の振れ角、 $F = \tau_0 / l_0$ は振子にかかる外力である。

つぎの非負関数（力学的エネルギー）を考える。

$$V = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g l_{c1} (1 - \cos \theta_1) \quad (45)$$

振子を振り上げるために $\dot{V} \geq 0$ を達成する制御則を導出する。(45) 式を時間で微分し、(44) 式から

$$\begin{aligned} \dot{V} &= m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_{c1} \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \\ &= l_{c1} F \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (46)$$

したがって、 $F = a \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1$ ($a > 0$) と選べば $\dot{V} \geq 0$ となる。 θ_1 を図 1 の座標系に変換すると、

$$\tau_0 = -a l_0 \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 \quad (47)$$

を得る。

6 振り上げ安定化制御実験

上で導いた振り上げ入力を用いて、振子を垂下状態から振り上げ、倒立点から指定した振れ角 ($-\frac{\pi}{6} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{6}$) に

達してから、先に求めた (42) 式の制御則 (NLHC) を用いて安定化を行うという振り上げ安定化実験を行う。ただし、安定化制御領域では常に台軸の角速度は $-5.0 \leq \dot{\theta}_0 \leq 5.0$ を満たしていると仮定する。この角速度の上限は、過去の実験データにおいて振子が倒立状態を維持できるための台軸の角速度よりも十分に大きく見積もった値である。運動方程式 (1) におけるパラメータ j_i ($i = 1 \sim 5$), d_i ($i = 0, 1$) はパラメータ同定実験により、表 3 のように求まった。実験結果を図 3 に示す。台軸も過剰に振動することなく振子が振り上がり、安定化領域に達すると振子も台軸も平衡点に収束している。

表 3: Parameters for Inverted Pendulum

j_1	0.1400	j_3	0.0067	j_5	0.2292	d_0	0.0464
j_2	0.0061	j_4	0.0001			d_1	0.0013

次に、振り上げ入力は先と同じとし、振子の安定化制御器には線形近似モデルとのモデル化誤差から生じる非線形な摂動を考慮せずに設計した制御器を用いて同様な実験を行う。先の場合と同様、外乱に対する評価量を (35) 式と定義し、線形 H_∞ 制御理論を用いて制御器を設計する。この場合、対応するリカッチ不等式は (40) 式において、 $e_f, e_{g1}, e_{g2}, m_f, m_{g1}, m_{g2}$ を 0 としたものであり、制御則は $m_{g2} = 0$ とした (41) 式で与えられる。表 2 と同じ設計パラメータに対して、状態フィードバック制御則は次式のように求まった。

$$k(x) = [1.43 \ 94.84 \ 2.52 \ 15.37] x \quad (48)$$

ここで、(42) 式と (48) 式を比較すると、(42) 式はモデル化誤差から生じる非線形な摂動を考慮したリカッチ不等式の解を用いているためゲインが大きいのに対し、(48) 式は非線形な摂動を無視したリカッチ不等式の解を用いているため、(42) 式に比べゲインがかなり小さい。もし非線形な摂動が存在しなければ、この小さなゲインでも安定化が可能となる。

(48) 式の制御則 (LHC) を用いて行った振り上げ安定化制御実験の結果を図 4 に示す。振子が安定化領域に達しても、安定化できずに発散してしまった。そこで、振り上げ領域から安定化領域に達したときに、振子が倒立点でもつ速度 $\dot{\theta}_1(t_1)$ が小さくなるように、必要な運動エネルギーを得たところで振り上げ制御入力を 0 にした。このときの LHC による振り上げ安定化制御実験の結果を図 5 に示す。振子の安定化は達成されたが、台軸が振動しているのがわかる。

また、振子が安定化されてから数秒後に指先で軽く振子を押してみたところ、NLHC では再び振子も台軸も平衡点

に戻ってきたのに対し、LHC では台軸は平衡点に収束せず振動したままであった。

以上の実験結果から、線形近似モデルとのモデル化誤差から生じる非線形摂動を考慮して設計した制御器が、非線形摂動を考慮せずに設計した制御器に比べて優れた制御性能を発揮していることが検証できたといえる。

図 3: Experimental Result with NLHC

図 4: Experimental Result with LHC

図 5: Experimental Result with LHC (less $\dot{\theta}_1(t_1)$)

7 結論

本論文では、回転型倒立振子に対する振り上げ安定化制御の一設計法を提案した。振子の振り上げにはリアプノフの安定理論に基づいて制御入力を導出し、安定化には振子

の倒立点からの有効可動区間および台軸の許容速度を指定し、その範囲内でシステムの安定性を補償する制御器を、非線形ロバスト H_∞ 制御理論に基づいて設計した。さらに、設計された制御器を用いて振子の振り上げ安定化制御実験を行った。また、振子の安定化制御器に線形近似モデルに対して非線形性を考慮せずに設計した制御器を用いて実験を行い、本論文で提案した設計法との比較を行った。その結果から本設計法の有効性、およびロバスト性を確認することができた。

参考文献

- [1] 小林 正人・田村 捷利, ある種の 1 入力 2 出力機械システムの非線形制御と重心移動型倒立振子への応用, 計測自動制御学会論文集, **26-12**, (1990), 1384-1391
- [2] 佐伯 正美, 倒立振子の非線形コントローラ設計と厳密な線形化法, 計測自動制御学会論文集, **29-4**, (1993), 491-493
- [3] Sugie, T. and Fujimoto, K., *Control of Inverted Pendulum Systems based on Approximate Linearization: Design and Experiment*, Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control, (1994), 1647-1648
- [4] Ohsumi, A. and Izumikawa, T., *Nonlinear Control of Swing-up and Stabilization of an Inverted Pendulum*, Proc. of the 17th Dynamical System Theory Symposium, (1994), 229-234
- [5] Imura, J. et al., *Strict H_∞ Control of Nonlinear Systems Based on The Hamilton-Yacobi Inequality*, Proc. of the Asian Control Conf. Tokyo, (1994), 189-192
- [6] Shen, T. and Tamura, K., *Robust H_∞ Control of Uncertain Nonlinear System via State Feedback*, IEEE Trans. on Automatic Control, **40-4**, (1995), 766-768
- [7] Shen, T. and Tamura, K., *Robust Lyapunov Stabilization with Disturbance Attenuation of Uncertain Affine Nonlinear Systems*, Proc. of the Asian Control Conf. Tokyo, (1994), 201-204
- [8] 石井 千春・申 鉄龍・田村 捷利, ロバスト H_∞ 準最適制御問題を用いたマニピュレータの軌道追従コントローラ的设计, 第 37 回自動制御連合講演会, (1994), 75-76
- [9] 山田 雄二・藤岡 久也・原 辰次, 定数スケーリング H_∞ 制御問題の凸性, 第 23 回制御理論シンポジウム, (1994), 101-106

- [10] 吉田 和信・川辺 尚志・河西 宏治, 重心移動による単振子系の安定化制御, 第 34 回計測自動制御学会学術講演会予稿集, (1995), 679-680

A 付録

定理 1 の証明 (29) 式が成立するとする。拡張システム (27), (28) に対して, (30) 式で与えられる状態フィードバック制御則 $u = k(x)$ を考える。このとき, 正定値関数 $\phi(x)$ は, 次のハミルトンヤコビ不等式を満たすことが示せる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \{f(x) + g_2(x)k(x)\} \\ & + \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x) (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ & + h_{ek}^T(x) h_{ek}(x) + \varepsilon x^T x \leq 0 \end{aligned} \quad (49)$$

ただし,

$$h_{ek}(x) = h_e(x) + j_{e2}(x)k(x)$$

● ロバスト安定性 (S1) の証明

正定値関数 $\phi(x)$ がリアプノフ関数となることを示す。

$w = 0$ のときの安定性であるので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(x) &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \frac{dx}{dt} \Big|_{w=0} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \{f(x) + g_2(x)k(x) + e_f(x)\delta_f(x) \\ &\quad + e_{g2}(x)\delta_{g2}(x)k(x)\} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \{f(x) + g_2(x)k(x)\} + \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x)v \end{aligned}$$

ここで,

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda_1} \delta_f(x) \\ \frac{1}{\lambda_2} \delta_{g2}(x_e)k(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(49) 式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(x) &\leq -\frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x) (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &\quad - h_{ek}^T(x) h_{ek}(x) - \varepsilon x^T x + \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x)v \\ &= -\{(\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))v - \frac{1}{2} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}\}^T \\ &\quad \times (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} \\ &\quad \times \{(\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))v - \frac{1}{2} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}\} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_0^2} \{h(x) + j(x)k(x)\}^T \{h(x) + j(x)k(x)\} - \varepsilon x^T x \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} \{\|m_f(x)\|^2 - \|\delta_f(x)\|^2\} \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} \{\|m_{g2}(x)k(x)\|^2 - \|\delta_{g2}(x_e)k(x)\|^2\} \\ &\leq -\varepsilon x^T x \end{aligned}$$

● ロバストパフォーマンス (S2) の証明

(49) 式より,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda_0^2} \{h(x) + j(x)k(x)\}^T \{h(x) + j(x)k(x)\} \\ & \geq \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \{f(x) + g_2(x)k(x)\} \\ & \quad + \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x) (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ & \quad + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} m_f^T(x) m_f(x) + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} k^T(x) m_{g2}^T(x) m_{g2}(x) k(x) \\ & \quad + \varepsilon x^T x \\ & = \frac{\partial \phi}{\partial x^T} \{f(x) + g_2(x)k(x) + g_e(x)w'\} \\ & \quad + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} m_f^T(x) m_f(x) + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} k^T(x) m_{g2}^T(x) m_{g2}(x) k(x) \\ & \quad + \varepsilon x^T x \\ & \quad + \frac{1}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x) (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ & \quad - \frac{\partial \phi}{\partial x^T} g_e(x)w' \end{aligned}$$

先と同じテクニックを用いると,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda_0^2} \|z\|^2 \\ & \geq \{(\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))w' - \frac{1}{2} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}\}^T \\ & \quad \times (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} \\ & \quad \times \{(\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))w' - \frac{1}{2} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}\} \\ & \quad + \frac{d}{dt} \phi(x) + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} \|m_f(x)\|^2 + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} \|m_{g2}(x)k(x)\|^2 \\ & \quad + \varepsilon x^T x - w'^T (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))w' \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^2}{\lambda_0^2} \|w\|^2 - \frac{1}{\lambda_0^2} \|z\|^2 \\ & \geq \{(\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))w' - \frac{1}{2} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}\}^T \\ & \quad \times (\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))^{-1} \\ & \quad \times \{(\gamma^2 I - j_{e1}^T(x) j_{e1}(x))w' - \frac{1}{2} g_e^T(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}\} \\ & \quad + \frac{d}{dt} \phi(x) + \frac{\gamma^2}{\lambda_1^2} \{\|m_f(x)\|^2 - \|\delta_f(x)\|^2\} \\ & \quad + \frac{\gamma^2}{\lambda_2^2} \{\|m_{g2}(x)k(x)\|^2 - \|\delta_{g2}(x_e)k(x)\|^2\} \\ & \quad + \frac{\gamma^2}{\lambda_3^2} \{\|m_{g1}(x)w\|^2 - \|\delta_{g1}(x)w\|^2\} + \varepsilon x^T x \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。(50) 式を初期条件 $x(t_0) = 0$ により t_0 から T まで積分すると

$$\gamma^2 \|w\|_T^2 - \|z\|_T^2 > \lambda_0^2 \phi(x(T)) \quad (51)$$

が得られる。こうして、閉ループ系は (S1) と (S2) を満たす。□