出力フィードバック制御則による分散制御問題の準最適解*

鈴村 文 寛^{*1}, 水 上 孝 一^{*2}Suboptimal Solutions with Output Feedback Form
for Decentralized Control Problems

Fumihiko SUZUMURA and Koichi MIZUKAMI

In the optimal control problem, all results are based upon the assumption of centrality, that is, all the information available about the system and decision making based upon this information arises at a single input. The design leads to systems in which every sensor output affects every actuator input. In the modelling and design of multi player control problems, the objectives in the optimal choice may be met by formulating the control problem as a differential game. The purpose of this work is to determine the decentralized control strategies with output feedback form which guarantee certain values obtained from the performance indices. We determine the suboptimal control strategies such that obtained performance indices are bounded by certain values of suboptimality degree γ , where the bounded values are defined as $\gamma, \bar{J}^*$ for the linear closed loop Nash game. Thus, the suboptimal control strategies are not equilibrium solutions. The control strategies with output feedback form require neither state estimation nor reconstruction. In this work, the control strategies guarantee the trace criteria associated with each player which are interpreted as expected values of standard quadratic criteria. Sufficient conditions for suboptimal control strategies with output feedback form are given for the infinite problem.

Key Words: Optimal Control, Actuator, Modelling, Control Device, Decentralized Control, Suboptimal Solution, Output Feedback Form, Nash Game

1. はじめに

大規模システムはいくつかのサブシステムが結合した複数の制御ステーションをもつシステムである。多くの制御ステーションをもつシステムにおいて、ある制御ステーションにおける入力他は他の制御ステーションの入力に依存する⁽¹⁾。最適制御問題におけるほとんどの結果は入力を1つのベクトルとして考えられた集中制御系の仮定に基づいている。すなわち、システムに関する全ての情報とこの情報を基本とした決定問題は1つの入力ベクトルに置き換えられる。その場合、システム設計は全てのセンサーからの出力が全て1つの入力ベクトルに影響することを前提としている。このことは集中制御系における設計問題として取り扱うことを意味する。しかしながら、電力システムや化学プラントのような大規模なシステムにおいて、その制御は集中制御系より分散制御で行うことが望ましい。例えば、電力システムであれば距離的に近くかつ特性

が似ている発電機等がそれぞれ1グループとして振る舞い、全体の応答はこれらグループ間の干渉の結果としてとらえられる。また、大規模な化学プラント全体を1つのシステムと考えたときには、プラント内の各層がサブシステムであり、それらが物や熱の流れによって相互に影響を及ぼしあっていると考えられる。すなわち、多くの制御ステーションをもつシステムの最適制御において、最適性は個々の制御ステーション毎に検討すべきである。

個々の制御ステーションを意思決定者(decision maker)と考えることにより、分散制御問題は動的ゲーム問題として定式化することができる。これまで、意思決定者が2人以上いる動的ゲーム問題の戦略について数多くの研究がなされている^{(2)(3)(8)~(10)}。戦略には開ループ(open-loop)戦略、閉ループ(closed-loop)戦略、誘導(incentive)戦略⁽⁷⁾など多く存在するが、一般的に戦略としては状態フィードバック形式によるものがよく用いられている。しかしながら、実際のプラントにおいては必要な全ての状態を計測することはむずかしい。直接状態フィードバックに有効な情報を得ることはむずかしい。それゆえ、出力フィードバック形式による準最

* 原稿受付 1995年11月16日。

^{*1} 正員、広島工業大学工学部 (〒731 51 広島市佐伯区三宅2-1-1)。^{*2} 広島大学総合科学部 (〒724 東広島市鏡山1-7-1)。

適制御の研究がなされている⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。筆者らはこれまでスタックエルベルグ問題において、出力フィードバックによる閉ループ戦略を構築した⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。すなわち、出力方程式をもつ動的システムに支配される閉ループスタックエルベルグ問題に対して解法を示した。この戦略により記述される閉ループ系から、最適性を満足する必要条件の導出を行っている。最適性を保証するために、動的システムの初期状態が単位球面上に一様分布するランダム変数であることと費用汎関数とその期待値をとることを仮定している。出力フィードバックによる線形閉ループ戦略の構成法はいたって簡単であり、導出された必要条件により有用性のある妥当な解を得ることができる。一般的に、出力フィードバック形式による制御戦略は状態推定や再構成を必要とせず、状態変数に関して不完全な情報構造をもつ問題においてよい結果を得ることが知られている⁽⁴⁾。

本論文の目的は多数の制御ステーションをもつ分散制御システムにおいて、出力フィードバック形式による準最適分散制御則を求めることである。対象とする動的システムは2つの制御ステーションをもつ線形システムであり、それぞれ2次形式費用汎関数をもっている。一般的に2つの目標関数をもつ制御問題に対して双方とも最小化することは難しいとされている。本論文により構築された出力フィードバック制御則は線形閉ループナッシュゲームから得られる費用汎関数の値を保証する準最適解である。すなわち、この出力フィードバック制御則はナッシュ平衡解によって得られるそれぞれの意思決定者に対する費用汎関数の値 J_i の定数倍 $\gamma_i J_i$ を保証する。さらに本論文において導出された準最適制御則は平衡解ではないことを明言しておく。本論文ではそれぞれの意思決定者に対する費用汎関数は標準的な2次形式評価関数の期待値をとることを仮定している。すなわち、動的システムの初期状態が単位球面上に一様分布するランダム変数であることを仮定している。この仮定によりあるマトリクス方程式とマトリクス不等式を満足する解が存在するならば、構築された出力フィードバック制御則は準最適解であることを示す。

本論文の構成は次のとおりである。第2章では対象とする2つの制御ステーションをもつ動的システムの記述と問題の定式化を行っている。第3章では出力フィードバックによる準最適閉ループ制御則を構成するための十分条件を与えている。第4章ではさらに定式化された問題に対する出力フィードバック則による準最適解の存在性について考察する。第5章では簡単な数値例により本手法の有効性を示す。本論文の全ての

結果に対する包括的な議論を第6章で行う。

2. 対象システムと問題の定式化

本論文で対象とするシステムは次のような2つの制御ステーションをもつ分散制御系により動的システムである。(Fig.1 参照)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$y_1(t) = C_1 x(t),$$

$$y_2(t) = C_2 x(t), \quad \dots \dots \dots (2)$$

ただし、 $x(t)$ は動的システムの状態をあらわす n 次元ベクトルであり、 $x(0) = x_0$ である。 $u_i(t)$, $i = 1, 2$ は2つの制御ステーションにおける v_i , $i = 1, 2$ 次元操作入力ベクトルである。各制御ステーションでの操作入力 u_i , $i = 1, 2$ は動的ゲーム問題において意思決定者として位置づけることができる。 $y_i(t)$, $i = 1, 2$ はそれぞれの入力に対する観測可能な制御出力をあらわす R^{m_i} 次元ベクトルである。 A , B_i , C_i , $i = 1, 2$ はそれぞれ適当な次元をもつ実定数マトリクスである。一般的に、マトリクス C_i , $i = 1, 2$ は正則ではないことから、それぞれの制御ステーションは状態ベクトル $x(t)$ に関して完全な情報をもっていない。

Fig.1 The decentralized control system with 2 controllers

各制御ステーションにおける入力 u_i , $i = 1, 2$ は次式の費用汎関数を最小化することを目的とする。

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty (x^T(t) Q_1 x(t) + u_1^T(t) R_{11} u_1(t) \\ &\quad + u_2^T(t) R_{12} u_2(t)) dt, \\ J_2 &= \int_0^\infty (x^T(t) Q_2 x(t) + u_1^T(t) R_{21} u_1(t) \\ &\quad + u_2^T(t) R_{22} u_2(t)) dt, \quad \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ただし $Q_i = Q_i^T \geq 0$, $R_{ij} = R_{ij}^T \geq 0$, $R_{ii} = R_{ii}^T > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$ である。

本論文では、それぞれの制御ステーションにおける制御則は出力フィードバック則により構成する。

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -F_1 y_1(t), \\ u_2(t) &= -F_2 y_2(t), \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

ただし, F_1, F_2 はフィードバックゲインマトリクスである。(4) 式は (2) 式によって次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -F_1 C_1 x(t), \\ u_2(t) &= -F_2 C_2 x(t), \end{aligned} \quad (5)$$

本論文の目的はナッシュ平衡解による費用汎関数の最適値 $J_i^*(u_1^*, u_2^*)$, $i = 1, 2$ から得られる値を保証する出力フィードバック準最適制御則を構成することである。すなわち, 次の不等式を満足する制御則 (u_1^O, u_2^O) を得ることである。

$$\begin{aligned} J_1(u_1^O, u_2^O) &\leq \gamma_1 J_1^* = \gamma_1 J_1(u_1^*, u_2^*), \\ J_2(u_1^O, u_2^O) &\leq \gamma_2 J_2^* = \gamma_2 J_2(u_1^*, u_2^*), \end{aligned} \quad (6)$$

ただし, γ_1, γ_2 は定数値である。すなわち, 制御則 (u_1^O, u_2^O) はナッシュ平衡解 (u_1^*, u_2^*) から得られるそれぞれの費用汎関数 J_i^* の定数倍を保証する。 J_1 と J_2 は初期状態 x_0 に対する費用汎関数 J_1, J_2 の期待値である。

$$\begin{aligned} J_i &= E \left\{ \int_0^\infty [x^T(t) Q_i x(t) + u_i^T(t) R_{i1} u_i(t) \right. \\ &\quad \left. + u_i^T(t) R_{i2} u_2(t)] dt \right\} \\ &= \int_0^\infty \text{tr}[\phi^T(t, 0) \{Q_i + C_i^T F_i^T R_{i1} F_i C_i \\ &\quad + (C_i^T F_i^T R_{i2} F_i C_i) \phi(t, 0)\} dt], \end{aligned} \quad (7)$$

ただし, $\phi(t, 0)$ は閉ループシステム

$$\dot{x}(t) = (A - B_1 F_1 C_1 - B_2 F_2 C_2) x(t), \quad (8)$$

の遷移行列である。 E は初期状態 x_0 の期待値を意味する。初期状態 x_0 は単位球面上に一様分布するランダム変数であると仮定する。すなわち, $E\{x_0\} = 0$, $E\{x_0 x_0^T\} = I$ を満足している。

ナッシュゲームは次の不等式を満足する制御戦略 (u_1^*, u_2^*) を全ての $u_i \in U_i$, $i = 1, 2$ において見つける問題である⁽²⁾。

$$\begin{aligned} J_1^* &= J_1(u_1^*, u_2^*) \leq J_1(u_1, u_2^*), \\ J_2^* &= J_2(u_1^*, u_2^*) \leq J_2(u_1^*, u_2), \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, U_i はそれぞれの意思決定者における許容制御戦略集合である。条件式 (9) はナッシュ平衡条件と呼ばれる。ナッシュ平衡解は次式で記述される状態フィードバック形式による制御戦略である。

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= -K_1^* x(t), \quad K_1^* = R_{11}^{-1} B_1^T P_1, \\ u_2^*(t) &= -K_2^* x(t), \quad K_2^* = R_{22}^{-1} B_2^T P_2, \end{aligned} \quad (10)$$

ナッシュ平衡解による費用汎関数の最適値は

$$\begin{aligned} J_1^* &= x_0^T P_1 x_0, \\ J_2^* &= x_0^T P_2 x_0, \end{aligned} \quad (11)$$

として得られる。ただし, P_i , $i = 1, 2$ は次のリッカチ形マトリクス方程式を満足する正定対称マトリクスである。

$$\begin{aligned} 0 &= P_1 A + A^T P_1 + Q_1 - P_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T P_1 \\ &\quad - P_1 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T P_2 - P_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T P_1 \\ &\quad + P_2 B_2 R_{22}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} B_2^T P_1, \\ 0 &= P_2 A + A^T P_2 + Q_2 - P_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T P_2 \\ &\quad - P_2 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T P_1 - P_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T P_2 \\ &\quad + P_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T P_1, \end{aligned} \quad (12)$$

もし, (12) 式における P_i , $i = 1, 2$ が存在し, 閉ループマトリクス

$$\dot{A} = A - B_1 R_{11}^{-1} B_1^T P_1 - B_2 R_{22}^{-1} B_2^T P_2, \quad (13)$$

が漸近安定なマトリクスならば, 制御戦略 u_1^*, u_2^* はナッシュ平衡条件 (9) 式を満足し, ナッシュ平衡解と呼ばれる。

それぞれの意思決定者に対する費用汎関数が (7) 式で記述されるならば, 最適な費用汎関数値 (11) の期待値はマトリクス P_i , $i = 1, 2$ のトレースとして記述される。

$$\begin{aligned} J_1^* &= \text{tr}[P_1], \\ J_2^* &= \text{tr}[P_2], \end{aligned} \quad (14)$$

3. 制御則の構成

ここでは, 準最適な出力フィードバック制御則を構成することを考える。前章で述べた2つの制御ステーションをもつ動的システムにおける制御問題に対して次の補題1が成立する。

《補題1》

次のリッカチ形マトリクス方程式を解くことを考える。

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{P}_1 A_n + A_n^T \dot{P}_1 + Q_1 - \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 \\ &\quad - \dot{P}_1 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2 - \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_1 \\ &\quad + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2, \\ 0 &= \dot{P}_2 A_n + A_n^T \dot{P}_2 + Q_2 - \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2 \\ &\quad - \dot{P}_2 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 - \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_2 \\ &\quad + \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1, \end{aligned} \quad (15)$$

ただし,

$$A_n = A + B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 + B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2 - B_1 F_1 C_1 - B_2 F_2 C_2, \dots (16)$$

である。マトリクス方程式の解 P_i , $i = 1, 2$ より, ナッシュ平衡解

$$u_1(t) = -R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 x(t), \\ u_2(t) = -R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2 x(t), \dots (17)$$

が得られる。

(証明)

リッカチ形マトリクス方程式 (15) を満足する正定対称マトリクス $\dot{P}_1$, $\dot{P}_2$ を得ることは次の動的システムと (3) 式の費用汎関数から構成される 2 人非零和ナッシュゲーム問題を考えることと同等である。

$$\dot{x}(t) = A_n x(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \dots (18)$$

一般的な 2 人非零和ナッシュゲーム問題における制御戦略は状態フィードバック形式による線形戦略である。すなわち, それぞれの意思決定者の制御戦略は

$$u_1(t) = -\dot{K}_1 x(t), \\ u_2(t) = -\dot{K}_2 x(t), \dots (19)$$

により記述される。ナッシュ平衡解の存在性に関する十分条件はリッカチ形マトリクス方程式 (15) を満足する正定対称マトリクス $\dot{P}_1$, $\dot{P}_2$ が存在することである。□

定義したマトリクス A_n より, 安定な閉ループシステム

$$\dot{x}(t) = (A_n - B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 - B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2) x(t) \\ = (A - B_1 F_1 C_1 - B_2 F_2 C_2) x(t), \dots (20)$$

を得ることができる。この閉ループシステム (20) の遷移マトリクスは $\phi(t, 0)$ である。このナッシュ平衡解によりそれぞれの意思決定者に対する費用汎関数値は

$$J_1^* = x_0^T \dot{P}_1 x_0, \\ J_2^* = x_0^T \dot{P}_2 x_0, \dots (21)$$

で与えられる。

補題 1 に基づいて, 準最適制御則を構成するための十分条件を導出する。次の定理 1 が成立する。

(定理 1)

(1) - (4) 式で記述される問題に対して, 出力フィードバック形式の準最適制御則を求める。まず, 一般的な状態フィードバック形式によるナッシュゲーム問題において線形閉ループ戦略が存在することを仮定する。すなわち, リッカチ形マトリクス方程式 (12) の解であるナッシュ平衡解 (10) が存在する。ある定数値 $\gamma_i \geq 1$, $i =$

1, 2 において, 次のマトリクス方程式とマトリクス不等式を定義する。

$$0 = \dot{P}_1 B_1 F_1 C_1 + (\dot{P}_1 B_1 F_1 C_1)^T \\ + \dot{P}_1 B_2 F_2 C_2 + (\dot{P}_1 B_2 F_2 C_2)^T - \dot{Q}_1, \\ 0 = \dot{P}_2 B_1 F_1 C_1 + (\dot{P}_2 B_1 F_1 C_1)^T \\ + \dot{P}_2 B_2 F_2 C_2 + (\dot{P}_2 B_2 F_2 C_2)^T - \dot{Q}_2, \dots (22)$$

$$\text{tr}[C_1^T F_1^T R_{11} F_1 C_1 + C_2^T F_2^T R_{12} F_2 C_2] \\ \leq \text{tr}[\dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2], \\ \text{tr}[C_1^T F_1^T R_{21} F_1 C_1 + C_2^T F_2^T R_{22} F_2 C_2] \\ \leq \text{tr}[\dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2], \dots (23)$$

ただし,

$$\dot{Q}_1 = Q_1 + \dot{P}_1 A + A^T \dot{P}_1 + \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 \\ + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2, \\ \dot{Q}_2 = Q_2 + \dot{P}_2 A + A^T \dot{P}_2 + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2 \\ + \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1, \dots (24)$$

ここで, $\dot{P}_1$, $\dot{P}_2$ は次式で定義される正定対称マトリクスである。

$$\dot{P}_1 = \Gamma_1^T P_1 \Gamma_1, \\ \dot{P}_2 = \Gamma_2^T P_2 \Gamma_2, \dots (25)$$

ただし, Γ_i , $i = 1, 2$ は次式を満足するように選ばれた変換マトリクスである。

$$\text{tr}[\Gamma_1 \Gamma_1^T P_1] \geq \text{tr}[P_1], \dots (26)$$

$$\text{tr}[\Gamma_2 \Gamma_2^T P_2] \geq \text{tr}[P_2], \dots (27)$$

定数値 γ_i , $i = 1, 2$ は

$$\gamma_1 = \text{tr}[\Gamma_1 \Gamma_1^T P_1] / \text{tr}[P_1],$$

$$\gamma_2 = \text{tr}[\Gamma_2 \Gamma_2^T P_2] / \text{tr}[P_2],$$

である。もし, (22) 式と (23) 式を満足するマトリクス F_1 , F_2 が存在するならば, F_1 と F_2 は準最適な出力フィードバックゲインである。 F_1 と F_2 により, 2 つの制御ステーションをもつ制御問題 (1) - (4) に対して, 出力フィードバック準最適則を構成することができる。

(証明)

リッカチ形マトリクス方程式 (15) は問題 1 で定義したマトリクス A_n より, マトリクス方程式 (22) に書き換えることができる。それぞれの意思決定者の費用汎関数は (23) 式より次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^\infty \text{tr}[\phi^T(t, 0)(Q_1 + C_1^T F_1^T R_{11} F_1 C_1 \\
&\quad + C_2^T F_2^T R_{12} F_2 C_2)\phi(t, 0)]dt \\
&\leq \int_0^\infty \text{tr}[\phi^T(t, 0)(Q_1 + \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 \\
&\quad + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2)\phi(t, 0)]dt \\
&= \text{tr}[x_0^T \dot{P}_1 x_0] = \gamma_1 J_1^*, \dots\dots\dots (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^\infty \text{tr}[\phi^T(t, 0)(Q_2 + C_1^T F_1^T R_{21} F_1 C_1 \\
&\quad + C_2^T F_2^T R_{22} F_2 C_2)\phi(t, 0)]dt \\
&\leq \int_0^\infty \text{tr}[\phi^T(t, 0)(Q_2 + \dot{P}_1 B_1 R_{11}^{-1} R_{21} R_{11}^{-1} B_1^T \dot{P}_1 \\
&\quad + \dot{P}_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T \dot{P}_2)\phi(t, 0)]dt \\
&= \text{tr}[x_0^T \dot{P}_2 x_0] = \gamma_2 J_2^*, \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

すなわち、費用汎関数は次式を満足する。

$$\begin{aligned}
J_1 &= \text{tr}[\dot{P}_1] \leq \gamma_1 J_1^*, \\
J_2 &= \text{tr}[\dot{P}_2] \leq \gamma_2 J_2^*, \dots\dots\dots (30)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \text{tr}[\Gamma_1 \Gamma_1^T P_1] / \text{tr}[P_1], \\
\gamma_2 &= \text{tr}[\Gamma_2 \Gamma_2^T P_2] / \text{tr}[P_2],
\end{aligned}$$

である。フィードバックゲインマトリクス F_1, F_2 より制御則 (4) が構成される。この制御則はそれぞれの制御ステーションに対して、費用汎関数値の値として $\gamma_1 J_1^*, \gamma_2 J_2^*$ を保証する。 $\square$

4. 準最適解の存在性

本章では、定理 1 により求められる準最適解の存在性について考察する。ここでマトリクス方程式 (22) 式は

$$\begin{aligned}
0 &= P_1 B_1 F_1 C_1 + (P_1 B_1 F_1 C_1)^T \\
&\quad + P_1 B_2 F_2 C_2 + (P_1 B_2 F_2 C_2)^T - Q_1, \\
0 &= P_2 B_1 F_1 C_1 + (P_2 B_1 F_1 C_1)^T \\
&\quad + P_2 B_2 F_2 C_2 + (P_2 B_2 F_2 C_2)^T - Q_2, \dots\dots\dots (31)
\end{aligned}$$

と書き換えることができる。マトリクス方程式 (31) 式の解 $\dot{F}$ の存在性は定理 2 によって示される。

(定理 2)

次式はマトリクス方程式 (31) 式の解が存在するための必要十分条件を与えている。

$$GG^+q = q, \dots\dots\dots (32)$$

ただし、

$$G = \begin{bmatrix} (I_{n^2} + K_n)(C_1^T \otimes P_1 B_1) \\ (I_{n^2} + K_n)(C_1^T \otimes P_2 B_1) \\ (I_{n^2} + K_n)(C_2^T \otimes P_1 B_2) \\ (I_{n^2} + K_n)(C_2^T \otimes P_2 B_2) \end{bmatrix}.$$

$$f = \begin{bmatrix} \text{vec } F_1 \\ \text{vec } F_2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} \text{vec } Q_1 \\ \text{vec } Q_2 \end{bmatrix}.$$

ここで、添字 $+$ は擬似逆マトリクス (Moore-Penrose pseudo-inverse matrix), $\otimes$ はクロネッカ積 (Kronecker Product) を表わす⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。一般解は

$$f = G^+q + (I - G^+G)z, \dots\dots\dots (33)$$

によって与えられる。ただし、 z は任意なベクトルである。

(証明)

マトリクス方程式 (31) 式はクロネッカ積を用いて次式に書き換えることができる⁽¹²⁾。

$$\begin{aligned}
&(C_1^T \otimes P_1 B_1) \text{vec } F_1 + (P_1 B_1 \otimes C_1^T) \text{vec } F_1^T \\
&\quad + (C_2^T \otimes P_1 B_2) \text{vec } F_2 + (P_1 B_2 \otimes C_2^T) \text{vec } F_2^T \\
&= \text{vec } Q_1, \\
&(C_1^T \otimes P_2 B_1) \text{vec } F_1 + (P_2 B_1 \otimes C_1^T) \text{vec } F_1^T \\
&\quad + (C_2^T \otimes P_2 B_2) \text{vec } F_2 + (P_2 B_2 \otimes C_2^T) \text{vec } F_2^T \\
&= \text{vec } Q_2, \dots\dots\dots (34)
\end{aligned}$$

ここで、 $\text{vec } \dot{F}$ と $\text{vec } \dot{F}^T$ の関係は

$$\begin{aligned}
\text{vec } F_1^T &= K_{r_1 m_1} \text{vec } F_1, \\
\text{vec } F_2^T &= K_{r_2 m_2} \text{vec } F_2, \dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

と表わされる。ただし、 $K_{r_i m_i}$, $i = 1, 2$ はそれぞれ $r_i m_i$, $i = 1, 2$ 次元の交換マトリクス (commutation matrix) である。交換マトリクスを用いることにより、(34) 式は

$$\begin{aligned}
&(C_1^T \otimes P_1 B_1) \text{vec } F_1 + (P_1 B_1 \otimes C_1^T) K_{r_1 m_1} \text{vec } F_1 \\
&\quad + (C_2^T \otimes P_1 B_2) \text{vec } F_2 + (P_1 B_2 \otimes C_2^T) K_{r_2 m_2} \text{vec } F_2 \\
&= \text{vec } Q_1, \\
&(C_1^T \otimes P_2 B_1) \text{vec } F_1 + (P_2 B_1 \otimes C_1^T) K_{r_1 m_1} \text{vec } F_1 \\
&\quad + (C_2^T \otimes P_2 B_2) \text{vec } F_2 + (P_2 B_2 \otimes C_2^T) K_{r_2 m_2} \text{vec } F_2 \\
&= \text{vec } Q_2, \dots\dots\dots (36)
\end{aligned}$$

と表わされる。さらに、

$$K_n(C_i^T \otimes P_j B_i) = (P_j B_i \otimes C_i^T) K_{r_i m_i}, \dots\dots\dots (37)$$

の関係式から、(36) 式は

$$\begin{aligned}
&(C_1^T \otimes P_1 B_1) \text{vec } F_1 + K_n(C_1^T \otimes P_1 B_1) \text{vec } F_1 \\
&\quad + (C_2^T \otimes P_1 B_2) \text{vec } F_2 + K_n(C_2^T \otimes P_1 B_2) \text{vec } F_2 \\
&= \text{vec } Q_1, \\
&(C_1^T \otimes P_2 B_1) \text{vec } F_1 + K_n(C_1^T \otimes P_2 B_1) \text{vec } F_1 \\
&\quad + (C_2^T \otimes P_2 B_2) \text{vec } F_2 + K_n(C_2^T \otimes P_2 B_2) \text{vec } F_2 \\
&= \text{vec } Q_2, \dots\dots\dots (38)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $K_n = K_{nn}$ である。よって、(31) 式は次式と表わされる。

$$\begin{aligned} & (I_{n^2} + K_n)(C_1^T \odot P_1 B_1) \text{vec} F_1 \\ & + (I_{n^2} + K_n)(C_2^T \odot P_1 B_2) \text{vec} F_2 = \text{vec} Q_1, \\ & (I_{n^2} + K_n)(C_1^T \odot P_2 B_1) \text{vec} F_1 \\ & + (I_{n^2} + K_n)(C_2^T \odot P_2 B_2) \text{vec} F_2 = \text{vec} Q_2, \dots \quad (39) \end{aligned}$$

ここで、(33) 式を適用すると、(39) 式は簡単に次式として得られる。

$$Gf = q, \dots \quad (40)$$

すなわち、(31) 式の解の存在性における必要十分条件とその一般解はそれぞれ (32) 式、(33) 式として与えられる。

(注意)

ここで、(31) 式の解が唯一でないことは次式により示される。

$$\text{rank}(I_{n^2} + K_n) = \frac{1}{2}n(n+1), \dots \quad (41)$$

5. 数値例

次式により記述される動的システムを考える。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(t), \quad (42)$$

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t),$$

$$y_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \dots \quad (43)$$

費用汎関数を次式で与える。

$$\begin{aligned} J_1 &= E \left\{ \int_0^\infty \left(x^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u_1^2(t) + u_2^2(t) \right) dt \right\}, \\ J_2 &= E \left\{ \int_0^\infty \left(x^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u_1^2(t) + u_2^2(t) \right) dt \right\}. \dots \quad (44) \end{aligned}$$

この問題に対して得られるナッシュ平衡解による費用汎関数の値は

$$\begin{aligned} J_1^* &= \text{tr}[P_1] = 1.31, \\ J_2^* &= \text{tr}[P_2] = 1.78, \dots \quad (45) \end{aligned}$$

である。フィードバックゲイン

$$f_1 = .3, \quad f_2 = .02, \dots \quad (46)$$

に対する費用汎関数の値は

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \text{tr}[\tilde{P}_1] = 2.05247, \\ \tilde{J}_2 &= \text{tr}[\tilde{P}_2] = 2.79991, \dots \quad (47) \end{aligned}$$

ゆえに、 $\gamma_1 = \gamma_2 = 2.0$ の場合において、条件 (6) 式を満足する。

6. おわりに

本論文では、2つの制御ステーションをもつ動的システムで記述される分散制御問題において、出力フィードバック形式による準最適解を求めた。それぞれの制御ステーションは2次形式費用汎関数を持ち、それぞれの費用汎関数を最小化することを目的としている。出力フィードバックによる制御則はオブザーバ等を用いた状態推定、再構成を必要としないため構成が容易である。本論文では、準最適出力フィードバック制御則を求めるための十分条件を導出した。準最適制御則による費用汎関数値は条件 (6) 式を満足する。すなわち、準最適制御則はナッシュ平衡解により得られる費用汎関数の最適値の定数倍を保証する。このように本論文で導出された準最適制御則は平衡解ではないことを明言しておく。

本手法の詳細な考察をおこなうとともに、一般的な多入力制御問題に対してこの理論を拡張していくことを今後の課題とする。

文 献

- (1) 吉川恒夫、池田雅夫、荒木光彦：大規模動的システムの制御理論 [III]、計測と制御、23-2、(1984)、214-221。
- (2) T. Basar and G.J. Olsder: Dynamic Noncooperative Game Theory, Academic Press, New York, (1982).
- (3) G.P. Papavasilopoulos, J.V. Medanic and J.B. Cruz, Jr.: On existence of Nash strategies and solutions to coupled riccati equations in linear-quadratic games, J. Optimiz. Theory Appl., 3, (1979), 49-76.
- (4) W.S. Levine and M. Athans: On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multilevel Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 15, (1970), 44-48.
- (5) D.-Z. Zheng: Some new results on optimal and suboptimal regulators of the LQ problem with output feedback, IEEE Trans. Automat. Contr., 34, (1989), 557-560.
- (6) R.E. Skelton and J.-H. Xu: Output feedback controllers of suboptimality degree β , IEEE Trans. Automat. Contr., 35, (1990), 1369-1370.
- (7) 水上孝一、呉漢生、鈴村文寛：有界不確定パラメータを有す系のロバスト制御設計の一方法, T.IEE Japan, 110-1, C, (1990), 36-42.
- (8) K. Mizukami, H. Xu and F. Suzumura: Open-loop linear quadratic Nash games for discrete descriptor systems, Trans. SICE, 27, (1991), 169-176.
- (9) F. Suzumura and K. Mizukami: Closed-loop strategy for Stackelberg game problem with incomplete information structures, Proc. 12th IFAC World Congress, 10, (1993), 147-152.
- (10) 鈴村文寛、水上孝一：出力フィードバックによる閉ループスタックルベルグ戦略、計測自動制御学会論文集, 29-9, (1993), 1079-1085.
- (11) A. Graham: Kronecker Products and Matrix Calculus: with Applications, Chichester, Ellis Horwood, (1981).
- (12) J.R. Magnus and H. Neudecker: Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley & Sons, (1991).