積層長方形板の多モード共振*

山田 元^{*1}, 小林幸徳^{*1}, 阿部 晶^{*2}

Multimode Response of Rectangular Laminated Plates

Gen YAMADA, Yukinori KOBAYASHI and Akira ABE

The method of multiple scales in conjunction with the Galerkin method is applied to the analysis of multimode responses of thin, geometrically nonlinear rectangular laminated plates subjected to a harmonic excitation. Responses of simply supported laminated plates are treated, and two symmetric modes of vibration are adopted in the analysis. In order to use the method of multiple scales properly, we introduced new detuning parameters which indicated the relationship of natural frequencies of each mode. It is found analytically that two mode responses can occur at each primary resonance. The analytical results are confirmed by numerical integration of the equation of motion.

Key Words: Nonlinear Vibration, Multimode Response, Laminated Plate, Method of Multiple Scales, Detuning Parameter

1. 緒 言

本論文では、四辺が単純支持された積層長方形板の多モード共振現象を明らかにする。FRP(Fiber Reinforced Plastics)などの繊維強化複合材料は比強度と比剛性が高く、比重が小さいので機械の高速化、構造の軽量化のための構造用部材として多く用いられている。近年、繊維強化複合材料の需要が増加するにつれて、複合材料に特有の異方性を考慮した構造解析が必要となり、静特性のみならず動特性をも十分に把握する必要性が高まってきている。

基本的な構造要素である積層平板の非線形振動に関する研究は盛んに行われており、板の非線形問題を幅広くまとめた Chia の著書⁽¹⁾がある。また、直交異方性長方形板の主共振、分数、高調波共振を研究した報告⁽²⁾⁽³⁾も見受けられる。しかしながら多モード共振に関しては、そのほとんどが等方性材料のほう⁽⁴⁾⁽⁵⁾、円板^{(6)~(9)}や円形膜⁽¹⁰⁾を扱った研究に限られており、積層平板に関する研究はまだなされていない。

そこで本論文では、積層長方形板の多モード共振現象の解析を多重尺度法⁽¹¹⁾を適用して行う。はじめに幾何学的非線形性を考慮して得られた運動方程式にガラーキン法を適用して、時間に関する連立非線形常微分方程式を導く。この方程式に多重尺度法を用いて解析を進めるが、多重尺度法の解析手続きにおける微小パラメータの設定の仕方が解析結果に大きな影響を与えることが報告⁽¹²⁾されている。そこで多重尺度法を、より適切に実行するために新たな離調度を導入し、二つの線形固有角振動数 ω_1 と ω_2 の間に $\omega_2 \approx 3\omega_1$ の関係があるときに生じる、二モード共振について調べる。そして、積層形態が多モード共振に及ぼす影響について考察し、本論文で提案した離調度の妥当性を検討する。

2. 理 論 解 析

2.1 基礎方程式 図1は N 枚のラミナで構成される長さ a , b , 厚さ h の積層長方形板を示している。図1のように板の中央面内に (x, y, z) 座標をとり、そこでの面外方向変位を w とする。また、各層の材料主軸方向を (L, T) とし、 L 軸と x 軸のなす角を θ とする。

アングルプライ逆対称積層長方形板が面外方向に一

* 原稿受付 1996年1月5日。

^{*1} 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。^{*2} 学生員、北海道大学大学院。

様な調和励振を受けるとき、カルマン形非線形板理論に基づく板の運動方程式と適合条件式は粘性減衰項を付加することにより、次式で与えられる。

$$L(w, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (2B_{26}^* - B_{61}^*) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^3 \partial y} \\ + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - q_0 \cos \Omega' t = 0 \quad (1)$$

$$A_{22}^* \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11}^* \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = (2B_{26}^* - B_{61}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (2)$$

ここで、 ρ 、 c 、 q_0 と Ω' はそれぞれ面密度、粘性減衰係数、面外方向に作用する励振力の振幅と角振動数を表している。また、定数 A_{ij}^* 、 B_{ij}^* と D_{ij}^* は、伸び剛性行列 $\mathbf{A}$ 、曲げ-伸びカップリング剛性行列 $\mathbf{B}$ と曲げ剛性行列 $\mathbf{D}$ を用いて導かれる行列

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3)$$

の要素である。ここで、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} C_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz \quad (5)$$

であり、 $C_{ij}^{(k)}$ は第 k 層での応力-ひずみの関係を表す剛性行列の要素、 h_k は中央面から第 k 層上面までの距離である。応力関数 Ψ は x 、 y 軸に垂直な断面の単位幅当たりの面内力の合応力

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (6)$$

と次のような関係がある。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = N_y, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -N_{xy} \quad (7)$$

板が四辺単純支持されており、境界で面内拘束を受

けないときの境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \int_0^b \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dy \\ = 0 \quad \text{at } x=0, a \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \int_0^a \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) dx \\ = 0 \quad \text{at } y=0, b \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

で与えられる。ここで、最後の等号で示される条件は、境界で垂直方向の面内変位が一定であることを表している。面外変位 w を線形振動の固有関数を用いて

$$w = h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

と近似する。ここで、 m 、 n は x 、 y 方向の半波数である。本論文では、対称振動モード間の内部共振のみを扱うこととし、 m と n は奇数のみを用いる。 $W_{mn}(t)$ は面外変位 w への振動モード (m, n) の寄与の程度を表す無次元量である。境界条件 (8) を満足する応力関数の一般解は

$$\Psi = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} B_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad (10)$$

で与えられる。式 (9)、(10) を式 (2) に代入し、両辺の三角関数の係数を比較することにより係数 B_{pq} が決定され、応力関数が求められる。紙面の都合上、 B_{pq} の詳細は省略するが、 B_{pq} は W_{mn} の二次形式となる。

次に、時間関数 W_{mn} に関する方程式を導くために、運動方程式 (1) にガラーキン法を適用する。すなわち、

$$\int_0^b \int_0^a L(w, t) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dx dy = 0 \quad (11)$$

これに式 (9)、(10) を代入し、積分を実行すると次のような 3 次の非線形項を含む連立常微分方程式

$$\dot{W}_i + C \dot{W}_i + \omega_i^2 W_i + \sum_{j,k,l=1}^2 \alpha_{ijkl} W_j W_k W_l = F_i \cos \Omega \tau \quad (12)$$

が得られる。ここで、 C 、 ω_i 、 α_{ijkl} 、 F_i と Ω はそれぞれ無次元の減衰係数、線形固有角振動数、非線形項の係数、外力振幅と角振動数を示し、無次元時間 τ は次の

Fig. 1 Geometry of a laminated plate and coordinate systems

ように定義されている。

$$\tau = \sqrt{\frac{E_L h^3}{\rho a^4}} t \quad \dots\dots\dots (13)$$

また、記号「 $\cdot$ 」は無次元時間 τ に関する微分を示し、 W_i は次のように定義し直されている。

$$\{W_i\} = \{W_{11}, W_{13}, \dots, W_{1N}, \dots, W_{MN}\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

2・2 ニモード共振解析 振動モード (1, 1) と (1, 3) の線形固有角振動数 ω_1 と ω_2 が $\omega_2 \approx 3\omega_1$ の関係にあるとき、各主共振付近での二モード共振現象を調べる。式(12)を W_1 と W_2 について書き直すと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{W}_1 + C\dot{W}_1 + \omega_1^2 W_1 + G_{1111} W_1^3 \\ + G_{1112} W_1^2 W_2 + G_{1122} W_1 W_2^2 = F_1 \cos \Omega \tau \\ \ddot{W}_2 + C\dot{W}_2 + \omega_2^2 W_2 + G_{2111} W_1^3 \\ + G_{2222} W_2^3 + G_{2112} W_1^2 W_2 = F_2 \cos \Omega \tau \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$G_{ijkl} = \alpha_{ijkl} + \alpha_{iljk} + \alpha_{iklj} + \alpha_{ljk i} + \alpha_{kjl i} + \alpha_{lki j} \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。さらに、外力が十分小さく、応答振幅がたかだか板厚程度と比較的小さい場合を想定すると、式(15)は次のように書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_1 + 2\varepsilon\mu\dot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 \\ + \varepsilon(G_{1111} X_1^3 + G_{1112} X_1^2 X_2 + G_{1122} X_1 X_2^2) \\ = 2\varepsilon f_1 \cos \Omega \tau \\ \ddot{X}_2 + 2\varepsilon\mu\dot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 \\ + \varepsilon(G_{2111} X_1^3 + G_{2222} X_2^3 + G_{2112} X_1^2 X_2) \\ = 2\varepsilon f_2 \cos \Omega \tau \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$X_i = \varepsilon^{1/2} W_i, \quad \mu = C/2\varepsilon, \quad 2\varepsilon f_i = F_i/\varepsilon^{1/2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。ここで、 ε は無次元の微小パラメータである。

一自由度系の主共振付近の解析において、多重尺度法の改善策として、外力の角振動数 Ω と固有角振動数 ω_0 の関係を表す離調度 σ を $\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$ から

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\sigma \quad \dots\dots\dots (19)$$

と定義し直すことが報告⁽¹²⁾ されている。本論文でもこの離調度 σ を σ_2 において採用するが、従来用いられている各モード間の固有角振動数の関係を表す離調度 σ_1 、すなわち、 $\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1$ では永年項を消去することが困難になる。そこで本論文では、離調度 σ_1 を第一次、第二次主共振において

$$\omega_2 = 3\Omega + \varepsilon\sigma_1 \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\Omega = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \quad \dots\dots\dots (21)$$

と新しく提案する。これにより永年項を容易に消去することが可能となり、振幅、位相と振動数の関係式が

導かれる。以下、多重尺度法の定義に従い解析を行う。

$X_i(\tau)$ を微小パラメータ ε について次のように展開する。

$$X_i(\tau) = x_{i0}(T_0, T_1 \dots) + \varepsilon x_{i1}(T_0, T_1 \dots) + \dots \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $T_0 = \tau$, $T_1 = \varepsilon\tau \dots$ は異なったスケール時間である。はじめに第一次主共振付近の応答を解析するため、式(19)より離調度 σ_2 を

$$\Omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon\sigma_2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

とおく。式(22)と(23)を式(17)に代入すると、 ε^0 次と ε^1 次について次式を得る。

$$\varepsilon^0: D_0^2 x_{10} + \Omega^2 x_{10} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$D_0^2 x_{20} + \omega_2^2 x_{20} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0^2 x_{11} + \Omega^2 x_{11} = & -2D_0 D_1 x_{10} - 2\mu D_0 x_{10} + \sigma_2 x_{10} \\ & - G_{1111} x_{10}^3 - G_{1112} x_{10}^2 x_{20} \\ & - G_{1122} x_{10} x_{20}^2 + 2f_1 \cos \Omega \tau \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} = -2D_0 D_1 x_{20} - 2\mu D_0 x_{20}$$

$$- G_{2111} x_{10}^3 - G_{2222} x_{20}^3$$

$$- G_{2112} x_{10}^2 x_{20} + 2f_2 \cos \Omega \tau$$

$$\dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $D_i = \partial/\partial T_i$ である。ここでは第一次近似解を求めることとするが、式(24)、(25)の一般解は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= A_1(T_1) \exp(i\Omega T_0) + \bar{A}_1(T_1) \exp(-i\Omega T_0) \\ x_{20} &= A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{A}_2(T_1) \exp(-i\omega_2 T_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 A_i は T_1 の未知関数、 $\bar{A}_i$ はその共役複素数である。式(28)を式(26)、(27)に代入し、式(20)を考慮して、永年項が発生しないための条件を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2i\Omega(A_1' + \mu A_1) - \sigma_2 A_1 + G_{1112} \bar{A}_1^2 A_2 \exp(i\sigma_1 T_1) \\ + 3G_{1111} A_1^2 \bar{A}_1 + 2G_{1122} A_1 A_2 \bar{A}_2 - f_1 = 0 \\ 2i\omega_2(A_2' + \mu A_2) + G_{2111} A_1^3 \exp(-i\sigma_1 T_1) \\ + 3G_{2222} A_2^2 \bar{A}_2 + 2G_{2112} A_1 \bar{A}_1 A_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに、記号「 $'$ 」は T_1 に関する微分を表す。式(29)を解くため、

$$A_i = \frac{1}{2} a_i \exp(i\beta_i), \quad \bar{A}_i = \frac{1}{2} a_i \exp(-i\beta_i) \quad \dots\dots\dots (30)$$

とにおいて、式(29)の各式を実部と虚部に分けると、振幅、位相と振動数の関係を表す次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \Omega(a'_1 + \mu a_1) + \frac{1}{8} G_{1112} a_1^2 a_2 \sin \gamma + f_1 \sin \beta_1 = 0 \\ & -\Omega \beta'_1 a_1 - \frac{\sigma_2 a_1}{2} + \frac{1}{8} (3G_{1111} a_1^3 \\ & + G_{1112} a_1^2 a_2 \cos \gamma + 2G_{1122} a_1 a_2^2) \\ & - f_1 \cos \beta_1 = 0 \\ & \omega_2(a'_2 + \mu a_2) - \frac{1}{8} G_{2111} a_1^3 \sin \gamma = 0 \\ & -\omega_2 \beta'_2 a_2 + \frac{1}{8} (G_{2111} a_1^3 \cos \gamma + 3G_{2222} a_2^3 \\ & + 2G_{2112} a_1^2 a_2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここで,

$$\gamma = -3\beta_1 + \beta_2 + \sigma_1 T_1 \dots\dots\dots (32)$$

である。

同様な手順により、第二次主共振付近の応答解析を行う。離調度 σ_2 を

$$\Omega^2 = \omega_2^2 + \varepsilon \sigma_2 \dots\dots\dots (33)$$

とおき、式(21)を考慮して永年項が発生しないための条件を求めれば、最終的に振幅、位相と振動数との関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \omega_1(a'_1 + \mu a_1) + \frac{1}{8} G_{1112} a_1^2 a_2 \sin \gamma = 0 \\ & -\omega_1 \beta'_1 a_1 + \frac{1}{8} (3G_{1111} a_1^3 + G_{1112} a_1^2 a_2 \cos \gamma \\ & + 2G_{1122} a_1 a_2^2) = 0 \\ & \Omega(a'_2 + \mu a_2) - \frac{1}{8} G_{2111} a_1^3 \sin \gamma + f_2 \sin \beta_2 = 0 \\ & -\Omega \beta'_2 a_2 - \frac{\sigma_2 a_2}{2} + \frac{1}{8} (G_{2111} a_1^3 \cos \gamma + 3G_{2222} a_2^3 \\ & + 2G_{2112} a_1^2 a_2) - f_2 \cos \beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

第一次主共振付近の定常振動の条件 $a'_1 = a'_2 = \beta'_1 = \gamma' = 0$ を式(31)に、第二次主共振付近の定常振動の条件 $a'_1 = a'_2 = \beta'_2 = \gamma' = 0$ を式(34)にそれぞれ代入して、式(31)から未知量 a_1 , a_2 , β_1 と γ , 式(34)から未知量 a_1 , a_2 , β_2 と γ に関する代数方程式を得る。これらの代数方程式にニュートン・ラプソン法を適用して定常解を求める。未知量が求められれば、各主共振付近での面外変位 w はそれぞれ

Table 1 Aspect ratios and nondimensional linear natural frequencies of plates

θ	0°	45°/-45°	0°/90°/0°
a/b	1.175	0.602	1.045
ω_1	3.453	1.792	3.320
ω_2	10.711	5.558	10.293

$$\begin{aligned} \frac{w}{h} = W_{11} + W_{13} = & \sqrt{\varepsilon} a_1 \cos(\Omega\tau + \beta_1) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ & + \sqrt{\varepsilon} a_2 \cos(3\Omega\tau + 3\beta_1 + \gamma) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \\ & \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{h} = W_{11} + W_{13} \\ = \sqrt{\varepsilon} a_1 \cos \left\{ \frac{1}{3} (\Omega\tau + \beta_2 - \gamma) \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ + \sqrt{\varepsilon} a_2 \cos(\Omega\tau + \beta_2) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

で与えられる。定常解の安定性を調べるためには、定常解に加えた微小な外乱に関する特性方程式を式(31), (34)より求め、ラウス・フルビッツの判別法を適用し、安定判別を行う。

3. 数値計算例と考察

以下に示す計算例では、厚さ一定の直交異方性平板 ($\theta = 0^\circ$)、アングルプライ逆対称積層平板 ($\theta = 45^\circ / -45^\circ$) およびクロスプライ対称積層平板 ($\theta = 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) を扱う。また、アングルプライ、クロスプライ積層では、各層の厚さは等しいとする。複合材料は Graphite/Epoxy に相当するものとし、材料定数

$$E_L = 138 \text{ GPa}, E_T = 8.96 \text{ GPa},$$

$$G_{LT} = 7.10 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.30$$

を用いる⁽¹³⁾。二モード共振が生ずるとき $3\omega_1 \approx \omega_2$ が成り立たなければならない。表1は $\omega_2/\omega_1 = 3.10$ となる板の縦横比 a/b と無次元固有角振動数を各積層形態について示している。その他のパラメータの値は

$$C = 0.01, \varepsilon = 0.01 \dots\dots\dots (37)$$

とし、外力 f_1 , f_2 の大きさは、各積層形態の単一モード解析において、第一次主共振付近の W_0/h が約 0.6、第二次主共振付近では約 0.8 の振幅が得られる外力を採用し、その値は各図に示すとおりである。

Fig. 2 Comparison of two detuning parameters on frequency responses when Ω is near ω_1 ($f_1 = 11.2$, $\theta = 0^\circ$)

3.1 第一次主共振付近の二モード共振 図2は直交異方性平板において、離調度を $\Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2$, $\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1$ と定義⁽¹¹⁾して求めた共振曲線(破線)と本論文で提案した離調度による共振曲線(実線)の比較である。横軸に無次元励振角振動数 Ω をとり、縦軸に(1, 1)モード振幅 W_{11} と(1, 3)モード振幅 W_{13} をとり、安定な振動のみを示している。図2から第一次主共振付近の応答は単一モードの応答とほぼ一致し、漸硬ばね

(a) Orthotropic plate
($f_1 = 11.2$, $\theta = 0$)

(b) Angle ply laminated plate
($f_1 = 5.7$, $\theta = 45^\circ / -45^\circ$)

(c) Cross-ply laminated plate
($f_1 = 10.8$, $\theta = 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$)

Fig. 3 Frequency responses when Ω is near ω_1

特性であることがわかる。(1, 3)モードの振幅 W_{13} は零ではないが、 W_{11} に比べて小さく、最大でも W_{11} の約 1/5 程度で、(1, 3)モードの影響はさほど現れていない。本論文で提案した離調度を用いた解析では、 Ω が 3.4 から約 3.6 の間と約 3.5 から 3.8 の間の二つの安定な振動が存在する。これらの安定な振動領域では、従来用いられている離調度の解析とほぼ一致する。さらに、理論解の妥当性の検討のため、式(15)を四次のルンゲ・クッタ法で直接数値積分した結果をそれぞれ●印および○印で示す。従来用いられている離調度では、 Ω が 3.65 から約 3.75 の間で三つめの安定な振動が存在する。この安定な振動は直接数値積分をした結果からは得ることができず、現実には存在しない振動、すなわち、にせの解であると考えられる。以上により、本論文で提案した離調度による解析がより適切であることがわかる。

図3は各積層形態の二モード共振曲線である。縦軸は図2と同じであり、横軸は σ_2/ω_1^2 である。図3の実線は安定な振動、破線は不安定な振動を示す。図3より、クロスプライ積層平板、直交異方性平板、アングルプライ積層平板の順に非線形性が強いことがわかる。ところが、 W_{11} の最大振幅が直交異方性平板、クロスプライ積層平板、アングルプライ積層平板の順に(1, 3)モードの影響を受けて大きくなり、 W_{13} の最大振幅が小さくなっている。このときのモード間の連成を表す非線形項の係数 G_{1112} , G_{2111} の値を表2に示す。表2

Table 2 Coefficients of nonlinear terms

θ	G_{1112}	G_{2111}
0°	-18.264	-6.088
$45^\circ / -45^\circ$	-3.171	-1.057
$0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$	-12.627	-4.209

Fig. 4 Comparison of two detuning parameters on frequency responses when Ω is near ω_2
($f_2 = 50$, $\theta = 0^\circ$)

よりこれらの係数の絶対値が大きいものほど W_{13} の最大振幅値が大きいことがわかる。このことより W_{13} の最大振幅の値は非線形性の強弱でなく、モード間の連成を表す非線形項に依存すると考えられる。図2と同様に●印と○印は式(15)を直接数値積分した結果を示し、摂動法による解は妥当なものであることがわかる。

3.2 第二次主共振付近の二モード共振 第二次

主共振付近では式(34)より、振幅 $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ と $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, すなわち, $W_{11} \neq 0$, $W_{13} \neq 0$ と $W_{11} = 0$, $W_{13} \neq 0$ の二つの解が存在する。第一次主共振付近の解析と同様に、直交異方性平板を例にとり、離調度を変えたときの二モード共振時 ($W_{11} \neq 0$, $W_{13} \neq 0$) の応答曲線を図4に示す。図4の横軸、縦軸は図2と同様にとり、安定な振動のみを示す。図4より、第二次主共振付近の応答は、第一次主共振付近のものとはかなり様

(a) Entire solution

(b) Stable portion of the solution only

Fig. 5 Frequency responses for the Orthotropic plate when Ω is near ω_2 ($f_2=25$, $\theta=0^\circ$)

(a) Entire solution

(b) Stable portion of the solution only

Fig. 6 Frequency responses for the angle ply laminated plate when Ω is near ω_2 ($f_2=25$, $\theta=45^\circ/-45^\circ$)

(a) Entire solution

(b) Stable portion of the solution only

Fig. 7 Frequency responses for the cross ply laminated plate when Ω is near ω_2 ($f_2=60$, $\theta=0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

相が異なることがわかる。外力の角振動数が第二次主共振近傍であるにもかかわらず、振幅 W_{11} が振幅 W_{13} よりも大きく、(1, 1)モードが支配的であることが明らかになった。 Ω が約 10.6 から 10.9 の間では、両者の結果はほぼ一致している。ところが、 Ω が約 11.1 から生じる振動においては、従来用いられている離調度ではやや存在範囲が広がっている。先程と同様に、●印と○印は式(15)を直接数値積分した結果を示す。直接数値積分の結果では Ω が 11.3 以降の応答が得られないことから、本論文で用いた離調度の妥当性が確認できる。

図5～7は各積層形態の第二次主共振付近の共振曲線を表す。図の縦軸は図3と同様にとり、横軸は σ_2/ω_2^2 である。各図において、(a)は二モード共振時の安定、不安定解を示し、(b)は二モード共振時の安定解と $W_{11}=0$ の安定、不安定解を示す。●印と○印は式(15)を直接数値積分した結果を示し、理論解は妥当なものであることがわかる。図から非線形性が増すにつれて、二モード共振時の安定な振動の範囲が広がっていることがわかる。直交異方性平板とアングルプライ積層平板では、同一の外力の角振動数で、振幅 W_{13} の三つの安定な振動が起こりうる領域が二つ存在する。さらに、非線形性が強いクロスプライ積層平板では、振幅 W_{13} の四つの安定な振動が起こりうる領域が存在することが明らかになった。この部分の振動は初期条件に依存し、そのいずれかの振動状態が誘起されることとなる。

また、(1, 1)と(1, 3)モードの相互作用によって引き起こされる W_{11} の最大振幅が、アングルプライ積層平板、クロスプライ積層平板、直交異方性平板と、第一次主共振付近の解析と逆の順に大きくなっている。これより、第二次主共振付近の応答でも、モードの相互作用によって引き起こされる振幅の最大値は非線形性の強弱によるのではなく、モード間の連成を表す非線形項に依存するといえる。

4. 結 言

本論文では、四辺が単純支持された積層長方形板に一樣な調和励振力が作用するときの二モード共振現象を解析した。多重尺度法の解析をより適切に実行する

ために、各モード間の関係を表す新たな離調度を提案した。数値例として、直交異方性平板、アングルプライ積層平板とクロスプライ積層平板の三つの積層形態を取上げて数値計算を行い、以下のような結果が得られた。

(1) 直接数値積分の結果との比較により、本論文で提案した離調度による解析の妥当性が確かめられた。

(2) 第一次主共振付近ではモードの相互作用によって引き起こされる振幅の影響をさほど受けないが、第二次主共振付近においてはその振幅が支配的である。

(3) モードの相互作用によって引き起こされる振幅の最大値は非線形性の強弱によるのではなく、モード間の連成を表す非線形項に依存している。第一次主共振付近ではその非線形項の係数の絶対値が大きいほど引き起こされる振幅は大きくなり、第二次主共振付近では逆の結果を得た。

文 献

- (1) Chia, C. Y., *Nonlinear Analysis of Plates*, (1980), 33 34, McGraw Hill.
- (2) Eslami, H. and Kandil, O. A., *AIAA J.*, **27** 7(1989), 955 960.
- (3) Eslami, H. and Kandil, O. A., *AIAA J.*, **27** 7(1989), 961 967.
- (4) Nayfeh, A. H., ほか2名, *J. Acoust. Soc. Am.*, **55** 2(1974), 281 291.
- (5) Nayfeh, A. H., ほか2名, *AIAA J.*, **12** 9(1974), 1222 1228.
- (6) Sridhar, S., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **41** 3(1975), 359 373.
- (7) Sridhar, S., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **59** 2(1978), 159 170.
- (8) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., *J. Sound Vib.*, **142** 2(1990), 279 292.
- (9) Nayfeh, T. A. and Vakakis, A. F., *Int. J. Non linear Mech.*, **29** 2(1994), 233 245.
- (10) Yasuda, K. and Uno, H., *Bull. JSME*, **26**(1983), 1050 1057.
- (11) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 469 477, John Wiley and Sons.
- (12) 近藤孝広・矢ヶ崎・幸, 機論, **61** 583, C(1995), 746 751.
- (13) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1986), 303, Martinus Nijhoff, Dordrecht.