初期応力を受ける回転厚肉異方性円筒殻の振動解析*

井川 寛隆^{*1}, 山下 泰裕^{*2}, 遠藤 満^{*3}

Free Vibration of Thick Rotating Prestressed Anisotropic Cylindrical Shells

Hirotaka IGAWA, Yasuhiro YAMASHITA and Mitsuru ENDO

Free vibration of thick rotating prestressed anisotropic cylindrical shells is investigated. Torque, external pressure and axial compression load are considered as prestresses. The basic equations are derived from Hamilton's principle based on the first order shear deformation theory. The equations of motion can be separated into quasi static and dynamic ones, i. e., the equations in the steady rotating state and those in the vibrating state. Using the modified Galerkin's method, frequency analysis is carried out for four boundary conditions. The general cases with anisotropy and prestresses are analyzed. Then numerical results are compared with those based on the classical shell theory, and the differences between the theories are examined.

Key Words: Vibration of Continuous System, Vibration of Rotating Body, Free Vibration, Prestress, Anisotropic Material, Rotating Circular Cylindrical Shell, First-Order Shear Deformation Theory, Modified Galerkin's Method

1. 緒 論

多くの回転機械には, その対称軸回りに高速で回転する円筒部すなわち回転円筒殻が存在する。さらに, 実際の回転機械に使用される円筒殻には, セン断力, 外圧, 軸圧縮力等の初期応力が作用する場合がある。したがって, 初期応力の作用する回転円筒殻の振動特性を明らかにすることは, 設計の合理化, 製品の小型化, 安全性強化の面から重要である。

また近年, さまざまな分野で注目を集めているCFRP等の繊維強化複合材料は, 高い比強度と比剛性をもつ。さらに与えられた形状, 荷重条件に合せて最適な繊維配向を設計できる優れた材料であり, 高速遠心分離機や, 航空宇宙機器等々に使用されるようになっている。しかし, これらの材料は縦弾性係数と比較して横弾性係数が小さくなる傾向があり, セン断変形が大きくなりやすい。したがって, 面外方向のセン断変形を考慮しない薄肉理論である古典殻理論では, 十分な精度が得られない場合が出てくると考えられる。

これらのことを踏まえ, 本研究では初期応力として, 初期せん断応力(トルク), 外圧, 軸圧縮応力等が加わる直交異方性回転円筒殻の固有振動数解析を行う。その定式化においては, 回転慣性および, 面外方向のセン断変形を考慮した一次せん断変形理論を用いることにする。さらに, 著者らが過去に行った古典殻理論による解析結果⁽¹⁾との比較により, 古典殻理論の適用限界を検討する。

2. 基礎方程式

2・1 座標系 回転円筒殻の座標系については, 図1に示すように, 円筒殻の中心oを原点として軸方

Fig.1 Rotating prestressed cylindrical shell

* 原稿受付 1995年11月21日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 東京工業大学学生。^{*3} 正員, 東京工業大学工学部。

向に x , 円周方向に φ , および半径方向外側向きを正として z の座標系を考える。円筒殻の形状は、長さ l , 平均半径 a , 肉厚 h とし, その円筒殻は, 角速度 Ω で定常回転しているものとする。また, 円筒殻には, 外圧 P_0 が円筒殻全体に, 初期せん断応力 τ_s (トルクはこれに半径を乗じて両端断面について積分することにより求まる), 軸圧縮応力 σ_c が, 円筒殻の両端に加わっているものとする。

2.2 変位式 基礎方程式誘導においては, 基礎理論として一次せん断変形理論を用いる。一次せん断変形理論では図2に示すように殻内の変形を仮定する。したがって, z 方向任意点の変位 u_z, v_z, w_z は, 基準面上の変位 u, v, w および, zx 平面, φz 平面内の回転角 ψ_x, ψ_φ を用いて, 次のように表される。

$$\begin{cases} u_z = u + z\psi_x \\ v_z = v + z\psi_\varphi \\ w_z = w \end{cases} \quad (1)$$

また, これらの変位成分 ($u, v, w, \psi_x, \psi_\varphi$) は, 初期応力および回転による定常的な変位 ($u_0, v_0, w_0, \psi_{x0}, \psi_{\varphi 0}$) と, その状態からの振動変位 ($u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{\varphi 1}$) の和によって表されると仮定する。

2.3 有限ひずみ 定常回転によって殻に発生する初期応力の影響を振動方程式に考慮するために, 振動変位に関しては有限ひずみの2次項まで考慮する。振動変位の有限ひずみの二次成分 $\varepsilon_{x2}, \varepsilon_{\varphi 2}, \gamma_{x\varphi 2}, \gamma_{zx2}, \gamma_{\varphi z2}$ は, グリーンのひずみテンソルを適用すると振動変位成分 ($u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{\varphi 1}$) を用いて次のように表される⁽²⁾⁽³⁾。

$$\begin{cases} \varepsilon_{x2} = \frac{1}{2} \{ (u_{1,x})^2 + (v_{1,x})^2 + (w_{1,x})^2 \} \\ \varepsilon_{\varphi 2} = \frac{1}{2(a+z)^2} \{ (u_{1,\varphi})^2 + (v_{1,\varphi} + w_1)^2 + (w_{1,\varphi} - v_1)^2 \} \\ \gamma_{x\varphi 2} = -\frac{1}{a+z} \{ u_{1,x}u_{1,\varphi} + v_{1,x}(v_{1,\varphi} + w_1) + w_{1,x}(w_{1,\varphi} - v_1) \} \\ \gamma_{zx2} = u_{1,x}\psi_{x1} + v_{1,x}\psi_{\varphi 1} \\ \gamma_{\varphi z2} = \frac{1}{a+z} \{ \psi_{x1}u_{1,\varphi} + \psi_{\varphi 1}(v_{1,\varphi} + w_1) \} \end{cases} \quad (2)$$

ここで, カンマ (,) の後の x, φ 等はそれぞれの座標に関する微分を表す。

2.4 合応力および合モーメント 材料の主軸方向を12軸とし, 円筒殻の座標軸を x, φ 軸とし, 図3に示すように互いに θ の角度をなしているとする。また円筒殻は図4に示すような積層構造をなしているものとする。

材料の主軸座標系での応力-ひずみ関係は次のように与えられることがわかっている⁽⁴⁾。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ただし,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{33} &= G_{12}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{44} &= G_{21}, & Q_{55} &= G_{22} \end{aligned}$$

Fig. 2 Cross sectional view of shell

Fig. 3 Fiber orientation

Fig. 4 Laminated structure of material

であり, E_1, E_2 は縦弾性係数, ν_{12}, ν_{21} はポアソン比, G_{12}, G_{21}, G_{22} は横弾性係数である.

この材料の主軸が円筒殻の座標系と図3に示すように θ の角度をなしているのので, x - φ 座標系での応力とひずみの関係は次のようになる⁽⁴⁾.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x\varphi} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{z\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & 0 & 0 \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & q_{45} & q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x\varphi} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{z\varphi} \end{Bmatrix} \\ = [q]\{\varepsilon\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし,

$$\begin{cases} q_{11} = Q_{11}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})S^2C^2 + Q_{22}S^4 \\ q_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})S^2C^2 + Q_{12}(S^4 + C^4) \\ q_{22} = Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})S^2C^2 + Q_{22}C^4 \\ q_{13} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})SC^3 \\ \quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})S^3C \\ q_{23} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})S^3C \\ \quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})SC^3 \\ q_{33} = (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{12} - 2Q_{33})S^2C^2 \\ \quad + Q_{33}(S^4 + C^4) \\ q_{44} = Q_{44}C^2 + Q_{55}S^2 \\ q_{45} = (Q_{55} + Q_{44})SC \\ q_{55} = Q_{44}S^2 + Q_{55}C^2 \end{cases}$$

$$S = \sin \theta, C = \cos \theta$$

また, 後に求める基礎方程式の表記を簡便にするため, 次のような合応力, 合モーメントを考える. ただし, 軸方向座標 x に関しては, $\xi = x/a$ なる座標変換を行っている. 今後は軸方向座標についてはこの無次元化座標 ξ を用いる.

$$\begin{aligned} N_{x0} = \int_z \sigma_{x0} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = & \left(\frac{1}{a} q_{11}^{(0)} + \frac{1}{a^2} q_{11}^{(1)}\right) u_{0,\xi} \\ & + \left(\frac{1}{a} q_{13}^{(0)} + \frac{1}{a^2} q_{13}^{(1)}\right) v_{0,\xi} + \frac{1}{a} q_{12}^{(0)} w_0 \\ & + \left(\frac{1}{a} q_{11}^{(1)} + \frac{1}{a^2} q_{11}^{(2)}\right) \psi_{x0,\xi} + \left(\frac{1}{a} q_{13}^{(1)} + \frac{1}{a^2} q_{13}^{(2)}\right) \psi_{\varphi 0,\xi} \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

なお上式の N_{x0} は合応力の一例である. 同様にして, 合応力 $N_{\varphi 0}, N_{\varphi x0}, N_{x\varphi 0}, N_{zx0}, N_{\varphi z0}, N_{x1}, N_{\varphi 1}, N_{\varphi x1}, N_{x\varphi 1}, N_{zx1}, N_{\varphi z1}$ と合モーメント $M_{x0}, M_{\varphi 0}, M_{\varphi x0}, M_{x\varphi 0}, M_{zx0}, M_{\varphi z0}, M_{x1}, M_{\varphi 1}, M_{\varphi x1}, M_{x\varphi 1}, M_{zx1}, M_{\varphi z1}$ も求まる. ここで, 右下付きの 0, 1 はそれぞれ定常変位による成分, 振動変位による成分であることを示す.

さらに, 式(5)中の $q_{ij}^{(k)}$ は, 弾性マトリックス成分の z 方向積分を表し, 図4より次のようになる.

$$q_{ij}^{(k)} = \int_z q_{ij} z^k dz = \sum_{m=1}^n \int_{h_{m-1}}^{h_m} q_{ijm} z^k dz$$

$$= \sum_{m=1}^n \frac{1}{k+1} (h_m^{k+1} - h_{m-1}^{k+1}) q_{ijm} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, q_{ijm} は円筒殻内面から m 番めの積層の弾性マトリックスの ij 成分を表す.

2.5 定常変位の基礎方程式

2.4 節までに誘導した式を用いて, 定常回転時におけるひずみエネルギー, 運動エネルギー, 外力による仕事⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾ を求める. これらより, 円筒殻が定常回転によってたわみ, 釣合っている状態における基礎方程式を誘導する. 定常回転時における各エネルギーに関して, Hamilton の原理を適用すると, 定常変位成分に関して次のような釣合い方程式と境界条件が求まる. ただし, ρ は密度を表す.

釣合い方程式:

$$\begin{cases} N_{x0,\xi} + P_0 u_{0,\xi} = 0 \\ N_{x\varphi 0,\xi} + N_{z\varphi 0} + \rho h \Omega^2 (ka\psi_{\varphi 0} + v_0) - v_0 P_0 = 0 \\ N_{\varphi 0} - N_{zx0,\xi} - \rho ha \Omega^2 \{(1+k)a + w_0\} \\ \quad + P_0(a + u_{0,\xi} + w_0) = 0 \\ N_{zx0} + \frac{1}{a} M_{x0,\xi} = 0 \\ N_{z\varphi 0} + \frac{1}{a} M_{x\varphi 0,\xi} - k\rho ha^2 \Omega^2 \psi_{\varphi 0} - k\rho ha \Omega^2 v_0 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $k = h^2/(12a^2)$ である.

境界条件: $\xi = \pm l/2a$ で,

$$\begin{cases} \left(N_{x0} + \sigma_c h + \frac{1}{2} P_0 u_0\right) \delta u_0 = 0 \\ (N_{x\varphi 0} - \tau_s h) \delta v_0 = 0 \\ \left(N_{zx0} - \frac{1}{2} P_0 u_0\right) \delta w_0 = 0 \\ M_{x0} \delta \psi_{x0} = 0 \\ M_{x\varphi 0} \delta \psi_{\varphi 0} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

ここで, $(A)\delta B$ は $A=0$ または B の値が指定されねばならないことを示す.

式(7)の釣合い方程式に, 式(5)に示すような合応力, 合モーメント式を代入し, 定常変位成分に関する微分方程式を導出する. この微分方程式の一般解は, 次式で表される.

$$\begin{aligned} u_0 = & A_0 + A_1 \xi + \sum_{i=1}^4 \{A_{2i} \sin h\lambda_i \xi \\ & + A_{2i+1} \cos h\lambda_i \xi\} \\ \psi_{x0} = & \sum_{i=1}^4 \{B_{2i} \sin h\lambda_i \xi + B_{2i+1} \cos h\lambda_i \xi\} \\ v_0 = & \sum_{i=1}^4 \{C_{2i} \sin h\lambda_i \xi + C_{2i+1} \cos h\lambda_i \xi\} \\ \psi_{\varphi 0} = & \sum_{i=1}^4 \{D_{2i} \sin h\lambda_i \xi + D_{2i+1} \cos h\lambda_i \xi\} \end{aligned}$$

$$w_0 = E_1 + \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{E_{2i}}{\lambda_i} \cos \lambda_i \xi + \frac{E_{2i+1}}{\lambda_i} \sin \lambda_i \xi \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 λ_i は釣合い方程式により求まる特性根である。また、 A_i, B_i, C_i, D_i, E_i は境界条件に基づき式(8)より決定する。

2.6 振動変位の基礎方程式

さらに、円筒殻が

定常回転している状態から、微小振動する際のひずみエネルギー、運動エネルギー、外力による仕事を求める。これらより、振動変位の基礎方程式を誘導する。振動変位の各エネルギーに関して、Hamiltonの原理を適用すると、振動変位に関する次のような釣合い方程式と境界条件が求まる。

釣合い方程式：

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{E}_1 &\equiv N_{x1,\xi} + M_{\varphi x1,\varphi} + \frac{1}{a}(N_{x0}u_{1,\xi})_{,\xi} + \frac{1}{a}N_{\varphi 0}u_{1,\varphi\varphi} + \frac{2}{a}N_{\varphi x0}u_{1,\xi\varphi} + \frac{1}{a}N_{\varphi x0,\xi}u_{1,\varphi} \\ &\quad + (N_{zx0}\psi_{x1})_{,\xi} + N_{z\varphi 0}\psi_{x1,\varphi} + P_0w_{1,\xi} - \rho ha(u_{1,\xi\xi} + ka\psi_{x1,\xi\xi}) = 0 \\ \bar{E}_2 &\equiv N_{\varphi 1,\varphi} + N_{x\varphi 1,\xi} + N_{z\varphi 1} + \frac{1}{a}(N_{x0}v_{1,\xi})_{,\xi} + \frac{2}{a}N_{\varphi x0}v_{1,\xi\varphi} + \frac{1}{a}N_{\varphi 0}(v_{1,\varphi\varphi} + 2u_{1,\varphi} - v_1) \\ &\quad + \frac{1}{a}N_{\varphi x0,\xi}v_{1,\varphi} + \frac{2}{a}N_{\varphi x0}w_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{\varphi x0,\xi}w_{1,\xi} + (N_{zx0}\psi_{\varphi 1})_{,\xi} + N_{z\varphi 0}\psi_{\varphi 1,\varphi} \\ &\quad - \rho ha\{v_{1,\xi\xi} + ka\psi_{\varphi 1,\xi\xi} + 2\Omega w_{1,\xi} - \Omega^2(v_1 + ka\psi_{\varphi 1})\} - P_0(v_1 - w_{1,\varphi}) = 0 \\ \bar{E}_3 &\equiv N_{\varphi 1} - N_{zx1,\xi} - N_{z\varphi 1,\varphi} - \frac{1}{a}(N_{x0}w_{1,\xi})_{,\xi} + \frac{2}{a}N_{\varphi x0}v_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{\varphi 0}(w_{1,\xi} + 2v_{1,\varphi} - w_{1,\varphi\varphi}) \\ &\quad + \frac{1}{a}N_{\varphi x0,\xi}v_1 - \frac{2}{a}N_{\varphi x0}w_{1,\xi\varphi} - \frac{1}{a}N_{\varphi x0,\xi}w_{1,\varphi} + N_{z\varphi 0}\psi_{\varphi 1} + P_0(u_{1,\xi} + v_{1,\varphi} + w_1) \\ &\quad + \rho ha(w_{1,\xi\xi} - 2\Omega v_{1,\xi} - 2ka\Omega\psi_{\varphi 1,\xi} - \Omega^2w_1) = 0 \\ \bar{E}_4 &\equiv \frac{1}{a}M_{x1,\xi} + \frac{1}{a}M_{\varphi x1,\varphi} + N_{zx1} + \frac{1}{a}N_{zx0}u_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{z\varphi 0}u_{1,\varphi} + k\rho ha(u_{1,\xi\xi} + a\psi_{x1,\xi\xi}) = 0 \\ \bar{E}_5 &\equiv \frac{1}{a}M_{\varphi 1,\varphi} + \frac{1}{a^2}M_{x\varphi 1,\xi} + N_{z\varphi 1} + \frac{1}{a}N_{zx0}v_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{z\varphi 0}(v_{1,\varphi} + w_1) + k\rho ha\{v_{1,\xi\xi} + a\psi_{\varphi 1,\xi\xi} \\ &\quad + 2\Omega w_{1,\xi} - \Omega^2(v_1 + a\psi_{\varphi 1})\} = 0 \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (10)$$

境界条件： $\xi = \pm l/2a$ で、

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{B}_1\delta u_1 &\equiv \left(N_{x1} + \frac{1}{a}N_{x0}u_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{\varphi x0}u_{1,\varphi} + N_{zx0}\psi_{x1} + \frac{1}{2}P_0w_1 \right) \delta u_1 = 0 \\ \bar{B}_2\delta v_1 &\equiv \left\{ N_{x\varphi 1} + \frac{1}{a}N_{x0}v_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{\varphi x0}(v_{1,\varphi} + w_1) + N_{z\varphi 0}\psi_{\varphi 1} \right\} \delta u_1 = 0 \\ \bar{B}_3\delta w_1 &\equiv \left\{ N_{zx1} + \frac{1}{a}N_{x0}w_{1,\xi} + \frac{1}{a}N_{\varphi x0}(w_{1,\varphi} - v_1) - \frac{1}{2}P_0u_1 \right\} \delta w_1 = 0 \\ \bar{B}_4\delta\psi_{x1} &\equiv M_{x1}\delta\psi_{x1} = 0 \\ \bar{B}_5\delta\psi_{\varphi 1} &\equiv M_{x\varphi 1}\delta\psi_{\varphi 1} = 0 \end{aligned} \right. \quad \dots\dots\dots (11)$$

3. 基礎方程式の解法

3.1 修正 Galerkin 法 2章で求めた振動変位の基礎方程式は、定常合応力、定常合モーメントを係数にもつ、これらは、 ξ の関数になっているので、基礎方程式は変数係数の微分方程式となる。したがって、本研究では、式(11)を考慮して、修正 Galerkin 法⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁵⁾を用いて固有振動数解析を行うことにする。振動変位の基礎方程式を用いて修正 Galerkin 方程式は次式で与えられる⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$\int_t \int_\varphi \int_\xi \bar{E}_1 \delta u_1 d\xi d\varphi dt - \int_t \int_\varphi [\bar{B}_1 \delta u_1]_\xi d\varphi dt = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\int_t \int_\varphi \int_\xi \bar{E}_2 \delta v_1 d\xi d\varphi dt - \int_t \int_\varphi [\bar{B}_2 \delta v_1]_\xi d\varphi dt = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\int_t \int_\varphi \int_\xi \bar{E}_3 \delta w_1 d\xi d\varphi dt - \int_t \int_\varphi [\bar{B}_3 \delta w_1]_\xi d\varphi dt = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\int_t \int_\varphi \int_\xi \bar{E}_4 \delta\psi_{x1} d\xi d\varphi dt - \int_t \int_\varphi [\bar{B}_4 \delta\psi_{x1}]_\xi d\varphi dt = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\int_t \int_\varphi \int_\xi \bar{E}_5 \delta \psi_{\varphi 1} d\xi d\varphi dt - \int_t \int_\varphi [\bar{B}_5 \delta \psi_{\varphi 1}]_s d\varphi dt = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

また、振動変位成分 $u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{\varphi 1}$ は円周方向に周期関数となっているので、円周方向波数を n 、虚数記号を j として、次式のように変数分離することを考える。

$$\{u_1, v_1, w_1, \psi_{x1}, \psi_{\varphi 1}\} = \exp\{jn\varphi\} \{U_1, V_1, W_1, \Psi_{x1}, \Psi_{\varphi 1}\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

さらに、基礎方程式において、 $U_1, V_1, W_1, \Psi_{x1}, \Psi_{\varphi 1}$ を次式のように M 項の関数の和で評価する。

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{m=1}^M a_m U_1^m(\xi), \quad V_1 = \sum_{m=1}^M b_m V_1^m(\xi), \quad W_1 = \sum_{m=1}^M c_m W_1^m(\xi) \\ \Psi_{x1} &= \sum_{m=1}^M d_m \Psi_{x1}^m(\xi), \quad \Psi_{\varphi 1} = \sum_{m=1}^M e_m \Psi_{\varphi 1}^m(\xi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $U_1^m(\xi), V_1^m(\xi), W_1^m(\xi), \Psi_{x1}^m, \Psi_{\varphi 1}^m$ は、それぞれ与えられた幾何学的な境界条件を満足する ξ の関数である。これらの式を先に示した修正 Galerkin 方程式に代入すると、 $a_m, b_m, c_m, d_m, e_m (m=1, 2, \dots, M)$ に関する $5M$ 元の連立微分方程式が求まり、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M [M_{sm}^{(i)a} \ddot{a}_m + M_{sm}^{(i)b} \ddot{b}_m + M_{sm}^{(i)c} \ddot{c}_m + M_{sm}^{(i)d} \ddot{d}_m + M_{sm}^{(i)e} \ddot{e}_m] + \sum_{m=1}^M [C_{sm}^{(i)a} \dot{a}_m + C_{sm}^{(i)b} \dot{b}_m + C_{sm}^{(i)c} \dot{c}_m \\ + C_{sm}^{(i)d} \dot{d}_m + C_{sm}^{(i)e} \dot{e}_m] + \sum_{m=1}^M [K_{sm}^{(i)a} a_m + K_{sm}^{(i)b} b_m + K_{sm}^{(i)c} c_m + K_{sm}^{(i)d} d_m + K_{sm}^{(i)e} e_m] = 0 \\ (i=1, 2, 3, 4, 5; s=1, 2, \dots, M) \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

3.2 境界条件および試験関数 本解析では、(A)軸方向拘束両端固定支持、(B)軸方向不拘束両端単純支持、(C)軸方向拘束両端単純支持、(D)軸方向不拘束両端固定支持と4とおりの境界条件を考えた。4とおりの境界条件はすべて両端において等しいと仮定し、半径方向変位 w_1 が円筒殻の中央に関して対称となるモード形(SM形)と、逆対称になるモード形(AS形)とに分離して考える。

まず、境界条件(A)について示す。この場合 $\xi = \pm a = \pm l/2a$ において、幾何学的境界条件が、 $u_1 = v_1 = w_1 = \psi_{x1} = \psi_{\varphi 1} = 0$ となる。したがって、対称形(SM)、逆対称形(AS)としてそれぞれ次のような、試験関数を用いる。

$$\begin{aligned} \text{SM: } U_1^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\ V_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ W_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ \Psi_{x1}^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\ \Psi_{\varphi 1}^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \quad \dots\dots\dots (20) \\ \text{AS: } U_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ V_1^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\ W_1^m &= \sin\{m\pi\xi/a\} \\ \Psi_{x1}^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ \Psi_{\varphi 1}^m &= \sin(m\pi\xi/a) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

次に、境界条件(B)について示す。この場合 $\xi = \pm a = \pm l/2a$ において、幾何学的境界条件が、 $u_1 \neq 0, v_1 = w_1 = \psi_{\varphi 1} = 0, \psi_{x1} \neq 0$ となる。したがって次のような、試験関数を用いる。ただし、逆対称になるモード形(AS)においては、 $m=0$ から考慮する。

$$\text{SM: } U_1^m = \sin\{(m-1/2)\pi\xi/a\}$$

$$\begin{aligned} V_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ W_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ \Psi_{x1}^m &= \sin\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ \Psi_{\varphi 1}^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AS: } U_1^m &= \cos(m\pi\xi/a) \\ V_1^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\ W_1^m &= \sin\{m\pi\xi/a\} \\ \Psi_{x1}^m &= \cos(m\pi\xi/a) \\ \Psi_{\varphi 1}^m &= \sin(m\pi\xi/a) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

さらに、境界条件(C)について示す。この場合 $\xi = \pm a = \pm l/2a$ において、幾何学的境界条件が、 $u_1 = v_1 = w_1 = \psi_{\varphi 1} = 0, \psi_{x1} \neq 0$ となる。したがって次のような、試験関数を用いる。

$$\begin{aligned} \text{SM: } U_1^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\ V_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ W_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ \Psi_{x1}^m &= \sin\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ \Psi_{\varphi 1}^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AS: } U_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\ V_1^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\ W_1^m &= \sin\{m\pi\xi/a\} \\ \Psi_{x1}^m &= \cos(m\pi\xi/a) \\ \Psi_{\varphi 1}^m &= \sin(m\pi\xi/a) \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

また境界条件(D)について示す。この場合 $\xi = \pm a = \pm l/2a$ において、幾何学的境界条件が、 $u_1 \neq 0, v_1 = w_1 = \psi_{x1} = \psi_{\varphi 1} = 0$ となる。したがって次のような、試験関数を用いる。ただし、逆対称になるモード形(AS)においては、 $m=0$ から考慮する。

$$\text{SM: } U_1^m = \sin\{(m-1/2)\pi\xi/a\}$$

$$\begin{aligned}
 V_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\
 W_1^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\
 \psi_{x1}^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\
 \psi_{\varphi1}^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \cdots \cdots \cdots (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{AS: } U_1^m &= \cos(m\pi\xi/a) \\
 V_1^m &= \sin(m\pi\xi/a) \\
 W_1^m &= \sin\{m\pi\xi/a\} \\
 \psi_{x1}^m &= \cos\{(m-1/2)\pi\xi/a\} \\
 \psi_{\varphi1}^m &= \sin(m\pi\xi/a) \cdots \cdots \cdots (27)
 \end{aligned}$$

各境界条件によって、これらを修正 Galerkin 方程式に代入し積分を行い、連立微分方程式(19)の係数を決定する。この微分方程式の特性根を求めることによ

り、系の固有振動数が求まる。

4. 数値計算および考察

以上の理論を基に数値解析を行った。また、著者らが過去に行った古典殻理論(Classical Shell Theory, CST)による解析結果⁽¹⁾と、一次せん断変形理論(First order Shear Deformation Theory, FSDT)による今回の解析結果の比較を行い、古典殻理論の肉厚比(h/a)に関する適用限界について検討していく。また、今回解析を行った円筒殻は長さ $l=1.0$ m, 半径 $a=0.1$ m であり、材料定数は以下の値とする。

$$E_1=1.47 \times 10^2 \text{ GPa}, E_2=9.80 \text{ GPa},$$

(a) Fiber orientation 0°

(d) Stacking sequence $90^\circ/0^\circ$

(b) Fiber orientation 90°

(e) Stacking sequence $0^\circ/90^\circ/0^\circ$

(c) Stacking sequence $0^\circ/90^\circ$

(f) Stacking sequence $90^\circ/0^\circ/90^\circ$

Fig. 5 Comparison of theoretical results
 $\Omega=2.0 \times 10^3$ rad/s, $n=2$, Boundary Condition (A)

$$G_{12} = G_{21} = 5.09 \text{ GPa}, G_{2z} = 4.90 \text{ GPa},$$

$$\rho = 1.60 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \nu_{12} = 0.33$$

4.1 回転時の固有振動数 回転する異方性円筒殻の固有振動数解析を行い、肉厚比(h/a)と固有振動数の関係を調べた。異方性材料としては、 $0^\circ, 90^\circ$ の単層、内面から $0^\circ/90^\circ, 90^\circ/0^\circ$ の二層構造のもの、内面から $0^\circ/90^\circ/0^\circ, 90^\circ/0^\circ/90^\circ$ の三層構造のもの、合計6種類のことを考えた。それぞれの異方性材料ごとに、図5に示した、回転速度は $\Omega = 2.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$ とし、円周方向波数 $n=2$ 、軸方向波数 $m=1, 2$ の前進波(For)、後進波(Back)のそれぞれについて示した。境界条件は、(A)軸方向拘束固定支持である。

この図を見ると肉厚比が小さな領域で、両者は非常によく一致しているのが確認できる。しかし、肉厚比が大きくなるにつれて次第にずれはじめ、古典殻理論が一次せん断変形理論より大きな値を示すようになる。これは、面外方向のせん断変形および回転慣性を考慮していない古典殻理論で、実際の固有振動数より大きく評価しているためだと考えられる。両理論の差が著しくなる肉厚比は、積層構造によってかなり異なる。

る。今回はこの両理論の差が大きくなり始める肉厚比を、古典殻理論の適用限界と考えた。積層の中に 0° の層を含む割合が多い比較的軸方向の剛性の大きな積層構造ほど適用限界は大きくなり、逆に 90° の層を含む割合が多い円周方向の剛性が大きな積層構造のものほど適用限界は小さくなる傾向があった。これはいずれの境界条件においても同様であった。適用限界の大きな 0° の単層では、適用限界の肉厚比は0.2程度であると考えられる。一方、適用限界の小さな 90° の単層では、適用限界の肉厚比は0.08程度であると考えられる。

4.2 初期応力が作用する場合の固有振動数 回転する円筒殻に初期せん断応力、外圧、軸圧縮応力の三つの初期応力がそれぞれ作用する場合について固有振動数解析を古典殻理論と一次せん断変形理論それぞれに基づき行った。3.1節と同様に六つの積層構造をなす異方性材料について解析を行ったが、ここでは古典殻理論の適用限界肉厚比が大きな単層 0° とそれが小さな単層 90° の場合について解析結果を示していく。

(a) Fiber orientation 0°

(b) Fiber orientation 90°

Fig. 6 Comparison of theoretical results

$\Omega = 2.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$, $\tau_s = 1.2 \times 10^8 \text{ Pa}$, $n=2$, Boundary Condition (A)

(a) Fiber orientation 0°

(b) Fiber orientation 90°

Fig. 7 Comparison of theoretical results

$\Omega = 2.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$, $P_0 = 2.5 \times 10^6 \text{ Pa}$, $n=3$, Boundary Condition (A)

(a) Fiber orientation 0° (b) Fiber orientation 90°

Fig. 8 Comparison of theoretical results

$\Omega = 2.0 \times 10^3$ rad/s, $\sigma_c = 2.5 \times 10^8$ Pa, $n=2$, Boundary Condition (B)

4・2・1 初期せん断応力が作用する場合 回転速度、初期せん断力の大きさはそれぞれ $\Omega = 2.0 \times 10^3$ rad/s, $\tau_s = 1.2 \times 10^8$ Pa とし、円周方向波数 $n=2$ 、軸方向波数 $m=1, 2$ について図6に示した。また境界条件は、(A) 軸方向拘束固定支持である。

図6を見ると3・1節同様に、肉厚比が小さな領域では両理論はよく一致するが、肉厚比が大きくなると、古典殻理論による結果が、一次せん断変形理論による結果に比べて、大きな値を示すようになる。今回の解析においては、軸方向の剛性が高い単層 0° では肉厚比 0.1 程度が古典殻理論の適用限界だと考えられる。一方、円周方向の剛性が高い単層 90° では肉厚比 0.05 程度がその適用限界だと考えられる。その他の積層構造に関しても、配向角 90° の層が多い積層構造のものほど、古典殻理論の適用限界の値が小さくなる傾向があった。

4・2・2 初期外圧が作用する場合 回転速度、初期外圧は $\Omega = 2.0 \times 10^3$ rad/s, $P_0 = 2.5 \times 10^6$ Pa とする。また円周方向波数 $n=3$ とし、境界条件(A)について図7に示した。

初期外圧が作用する場合においても、肉厚比が大きくなるにつれて古典殻理論による固有振動数解析結果が、大きな値を示すようになる。今回の解析においては、単層 0° では肉厚比 0.15 程度が古典殻理論の適用限界だと考えられる。一方、単層 90° では肉厚比 0.05 程度が適用限界だと考えられる。その他の積層構造においては初期せん断力が作用する場合と同様な傾向が見られた。

4・2・3 初期軸圧縮応力が作用する場合 回転速度、初期軸圧縮応力は $\Omega = 2.0 \times 10^3$ rad/s, $\sigma_c = 2.5 \times 10^8$ Pa とする。また円周方向波数 $n=2$ とし、境界条

件(B)について図8に示した。

初期軸圧縮応力が作用する場合、今回の解析において古典殻理論の適用限界は、単層 0° では肉厚比 0.15 程度、単層 90° では肉厚比 0.08 程度であると考えられる。その他の積層構造では初期せん断応力、初期外圧が作用する場合と同様の結果が得られた。

また、初期応力が作用する場合(3・2節)には、それが作用しない場合(3・1節)に比べて、古典殻理論の適用限界が小さくなる傾向がある。これは、初期応力が作用する場合、殻内の応力の分布が複雑になるため、古典殻理論ではそれを評価しきれていないためだと考えられる。

5. 結 言

比較的厚肉な回転異方性円筒殻に初期応力が作用する場合を考え、一次せん断変形理論に基づく固有振動数の解析法を定式化した。さまざまな積層構造をなす直交異方性円筒殻について振動数解析を行い、古典殻理論の適用限界を検討した。その結果として、古典殻理論の適用限界の肉厚比は平均的には 0.1 程度であるが、材料の異方性および、荷重条件等によってはそれ以下になることもあり注意を要する。

文 献

- (1) 井川寛隆・遠藤満, 機論, **61** 587, C(1995), 2761-2768.
- (2) Flügge, W., テンソル解析と連続体力学, (1979), 21-26, ブレイン図書出版.
- (3) 斉藤俊, 回転円筒殻の振動に関する研究, 東京工業大学位論文, (1989).
- (4) Jones, R.W., *Mechanics of Composite Materials*, (1975), 47-57, McGraw Hill.
- (5) 斉藤俊・遠藤満, 機論, **55** 512, C(1989), 878-886.
- (6) 斉藤俊・遠藤満, 機論, **56** 523, C(1990), 603-611.