非ホロノミックシステムの軌道計画問題* (最適制御アルゴリズムからの接近)

井 前 讓^{*1}, 平山 信一郎^{*2}, 古 館 貴^{*3}

Motion Planning Problems for Nonholonomic Systems (Optimal Control Algorithm Approach)

Joe IMAE, Shinichiro HIRAYAMA and Takashi FURUDATE

We deal with motion planning problems for nonholonomic systems. Our approach is based on optimal control algorithms. First, we formulate motion planning problems for nonholonomic systems as trajectory optimization problems, which are (singular) optimal control problems. Next, we develop a new algorithm for (singular) optimal control problems, and prove its convergence property. Finally, applying the algorithm, we solve the motion planning problems for nonholonomic space robot systems, and show the efficiency of the proposed algorithm.

Key Words: Nonholonomic Constraints, Optimal Control, Computational Methods, Convergence, Space Robot

1. は じ め に

非ホロノミックな拘束をうけるシステムはホロノミックな拘束をうけるシステムに比べ複雑な性質をもつことから今まで多くの研究がなされてきた⁽¹⁾。例えば、フィードバック制御則に関しては、ドリフト項を含まない非ホロノミックシステムは滑らかな時不変制御器では制御できないという Brockett の定理⁽²⁾ が知られており、その問題点解決のために種々の制御則が工夫され提案されている。また、障害物を含む軌道計画に関しては、ホロノミック拘束の場合とは異なり、拘束条件が非ホロノミックであるがゆえに、一般化座標の数を減らすことができず取扱い困難な問題とされている。本研究では後者の軌道計画問題に焦点をあて議論をすすめる。この分野に関しては、例えば、Latterriere らは P. Hall 基底を利用し非ホロノミックシステムを仮想的にホロノミックシステムに変換することにより⁽³⁾、また、Tilbury ら⁽⁴⁾ は非ホロノミックシステムをいわゆる Chained form で表すことにより、さらに

Laumond ら⁽⁵⁾ は、3 段階(ホロノミック経路探索、移動可能経路探索、経路最適化)から構成されるアルゴリズムを提案することによりそれぞれ軌道計画を試みている。

非ホロノミックシステムの軌道計画問題とは、与えられたシステムを初期点から終端点へ障害物を回避しながら移動させる問題といえる。このことは、例えば障害物回避の要求を評価関数として定式化するならば、この計画問題は非線形最適制御問題の一つとなることを示している。事実、非ホロノミックシステムの計画問題を最適制御問題として位置づけその解法を試みた報告例がいくつかあり、最適制御からの接近は、非ホロノミックシステム軌道計画に対する重要な接近法の一つと考えられる。Fernandes ら⁽⁶⁾ および秋山 ら⁽⁷⁾ は求めようとする入力関数を適当な次数でフーリエ級数展開してその係数を非線形計画法により求めており、また、Divebiss ら⁽⁸⁾ は入力関数を断片的定数近似で離散化し微分方程式法により解を得ている。

ところで、得られた最適制御問題に対し種々の手法で軌道計画を試みてはいるものの、これらの手法のほとんどは次のような問題点を残す。すなわち、本来、無限次元をもつ関数空間上の制御問題であるべき問題を、取扱いが容易であるということで近似的に有限次

* 原稿受付 1995 年 12 月 11 日。

^{*1} 正員、岩手大学工学部(〒020 盛岡市土田 4 3 5)。

^{*2} 岩手大学学生。

^{*3} 岩手大学大学院。

元空間の問題へと変換し解を求めようとしている点である。このことは、得られた解は近似問題の解でしかあり得ず、関数空間上の制御問題の最適解との関連性に関し注意する必要があることを意味する。これまで関数空間上の制御問題として直接扱われなかった理由としては、結果として得られる最適制御問題は、特異制御問題となる可能性の高いことが挙げられる(第2章参照)。特異制御問題は最適制御の分野においては取扱いが非常に困難な問題とされている。

本論文では、最適制御問題を無限次元をもつ関数空間上の問題として取扱い、非ホロノミックシステムの軌道計画問題に対し新たな最適制御アルゴリズムを提案する。さらにその収束性についても言及する。計算例として宇宙ロボットの姿勢制御問題を取り上げ、本手法の有効性を確認する。

2. 非ホロノミックシステムと特異制御

非ホロノミックなシステムは一般に次の微分方程式で与えられる。

$$\dot{x} = h(x) + g(x)u = h(x) + \sum_{i=1}^r g_i(x)u_i \quad \cdots (1)$$

ここに、 $x \in R^n$ はシステムの状態を表し、 $u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_r] \in R^r$ はシステムへの操作入力を表すとする。また、 $h \in R^n$, $g = [g_1 \ \cdots \ g_r] \in R^{n \times r}$, $g_i \in R^n$ とする。

いま、初期状態 $x(t_0) = x_0$ から終端状態 $x(t_1) = x_1$ へ、障害物を回避しつつ移動させる問題を非ホロノミックシステムの軌道計画問題としてとらえる。このとき、終端状態および障害物に関する条件が、最小化のための評価関数として、例えば、

$$\tilde{J}(u) = \tilde{G}(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(x(t)) dt \quad \cdots (2)$$

のように組込むことができるならば、この計画問題は、式(1)のもとで、評価関数 $\tilde{J}$ を最小とする操作量を求める最適制御問題に帰着される。ここに、 t_0 は初期時刻、 t_1 は終端時刻、 $\tilde{G} \in R^1$, $\tilde{L} \in R^1$ である。

Pontryagin の最大原理によれば、求める最適解 $(\bar{x}, \bar{u})$ は次式を満足しなければならないといわれている⁽⁹⁾。

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = \max_{v \in R^r} H(\bar{x}, v, \bar{p}) \quad a.e. \quad t \in [t_0, t_1] \quad \cdots (3)$$

ここに、

$$H(x, u, p) = -\tilde{L}(x) + p^T [h(x) + g(x)u] \quad \cdots (4)$$

であり、 $\bar{p}$ は次式の解である。

$$\dot{p} = -\left(h_x + \sum_{i=1}^r (g_i)_x u_i\right)^T + \tilde{L}_x \quad \cdots (5 \cdot a)$$

$$p(T) = -\tilde{G}_x(x(t_1)) \quad \cdots (5 \cdot b)$$

したがって、式(3)を満足する u を求めることにより一般的には最適解が得られる。しかし、全時間区間または部分時間区間において式(4)の $p^T g_i(x)$ のいずれかが、 $p^T g_i(x) \equiv 0$ となる場合には式(3)から u を決定することはできない。これが、いわゆる特異制御問題⁽⁹⁾といわれ、最適制御問題の中でも、解析的にも数値的にも取扱いの困難な問題として知られている。

本論文では、対象システムが非線形であることから解析的接近は困難であると判断し、数値的立場をとる。その際、数値解法のためにどのような最適制御アルゴリズムを選ぶかは、困難な作業である。特異制御に対してどの最適制御アルゴリズムが有力なのかに関してはいまだに評価が定まっていないのが現状である。本論文では、特異制御問題に対して比較的良好な数値実験結果を示したとされている文献(10)のアルゴリズムを取上げる。ところで、このアルゴリズムには、いくつかの問題点がある。アルゴリズムの収束証明の際の仮定⁽¹¹⁾が厳しすぎることで、評価関数がある特別な場合のみを想定した Lagrange 形であることなどである。それらの問題点の改善を目的とし、新たなアルゴリズムを提案する。また、その収束証明を従来とは異なる形で行う。

(注意1)

適当な式変形により、理論的には、一般的な場合(例えば Bolza 形)を Lagrange 形最適制御問題に等価変換可能ではあるが、非線形性を必要以上に高める結果となり数値計算上好ましくない。

3. 最適制御アルゴリズム

本章では、Lagrange 形と比較して、より一般的な Bolza 形最適制御問題を定式化し、その数値解法のためのアルゴリズムを示す。Bolza 形は終端点に関する条件を評価関数に組込むことができるため、本研究には最適である。

3・1 Bolza 形最適制御問題 状態方程式、初期値がそれぞれ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in R^n \quad \cdots (6)$$

で与えられるとき、評価関数

$$J(u) = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \quad \cdots (7)$$

を最小にする操作量 $u(t)$ を求めよ。ただし、 $x: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ は絶対連続関数、 $u: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ は本質的に有界な可測関数とする。

ここで、 $\mathcal{AC}^1$ は絶対連続関数の全体を、また $\mathcal{L}_\infty^1$ は本質的に有界な可測関数の全体を表すものとして、そ

それぞれの関数空間に次のようなノルムを導入する.

$$\|x\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|, x \in \mathcal{A}^n$$

$$\|y\| = \text{ess} \sup_{t \in [t_0, t_1]} |y(t)|, y \in \mathcal{L}^r$$

以下の議論を意味あるものとするため, 次の仮定をおく. この仮定は最適制御アルゴリズムの収束証明の際に一般的に用いられるものであり, 文献(11)の仮定と比較して緩い条件となっている.

[仮定]

(1) $G: R^n \rightarrow R^1, f: R^1 \times R^n \times R^r \rightarrow R^n, L: R^1 \times R^n \times R^r \rightarrow R^1$ かつそれらの偏微係数 $G_x(x), f_x(t, x, u), f_u(t, x, u), L_x(t, x, u), L_u(t, x, u)$ はすべて連続とする.

(2) 任意なコンパクト集合 $U \in R^r$ に対し, ある $M_1 \in (0, \infty)$ が存在して

$$|f(t, x, u)| \leq M_1(|x|+1),$$

$$t \in [t_0, t_1], x \in R^n, u \in U \dots\dots\dots (8)$$

3・2 アルゴリズムと収束定理

[アルゴリズム]

<step 0> $\beta \in (0, 1), M_2 \in (0, 1)$ とする.

<step 1> 可測関数 $u^0(t): [t_0, t_1] \rightarrow R^r$ を選び, $i=0$ とする.

<step 2> $u^i(t)$ を用いて, 式(6)より $x^i(t)$ を求める.

<step 3> 次のような補助最適制御問題を考える. すなわち, 状態方程式, 初期条件, 評価関数が

$$\delta \dot{x} = f_x(t, x^i, u^i) \delta x + f_u(t, x^i, u^i) \delta u, \delta x(t_0) = 0$$

$$\dots\dots\dots (9)$$

$$\delta J = G_x(x^i(t_1))^T \delta x(t_1) + \frac{1}{2} \delta x(t_1)^T A^i \delta x(t_1)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, x^i, u^i) \delta x + L_u(t, x^i, u^i) \delta u \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta x^T B_{11}^i \delta x + \delta x^T B_{12}^i \delta u + \frac{1}{2} \delta u^T B_{22}^i \delta u \right) dt$$

$$\dots\dots\dots (10)$$

で与えられるとき, その最適解 $(\delta x^i, \delta u^i)$ を求める.

ここに, $A^i, B_{11}^i, B_{12}^i, B_{22}^i$ は,

$$A^i > 0, B_{22}^i > 0, B_{11}^i - B_{12}^i (B_{22}^i)^{-1} (B_{12}^i)^T \geq 0$$

$$\dots\dots\dots (11)$$

を満たすとする.

<step 4> 次式より $(\bar{x}^i, \bar{u}^i)$ を決定する.

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0$$

$$H^i(t, (x - x^i), (u - u^i), \bar{p}^i)$$

$$= \max_{v \in R^r} H^i(t, (x - x^i), (v - u^i), \bar{p}^i) \dots\dots (12)$$

ここに,

$$H^i(t, \delta x, \delta u, p)$$

$$= - \left\{ L_x(t, x^i, u^i) \delta x + L_u(t, x^i, u^i) \delta u \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \delta x^T B_{11}^i \delta x + 2 \delta x^T B_{12}^i \delta u + \delta u^T B_{22}^i \delta u \right\}$$

$$+ p^T [f_x(t, x^i, u^i) \delta x + f_u(t, x^i, u^i) \delta u]$$

$$\dots\dots\dots (13)$$

であり $\bar{p}^i$ は step 3 の補助最適制御問題の随伴ベクトルである.

<step 5> $a_i = 1$.

<step 6>

$$u^{i+1}(t) = u^i(t) + a_i \delta u^i(t) + a_i^2 (\bar{u}^i(t) - u^i(t) - \delta u^i(t)) \dots\dots\dots (14)$$

とおき, u^{i+1} を用いて, 式(6)より $x^{i+1}(t)$ を求める. もし,

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) \leq a_i M_2 \left\{ G_x(x^i(t_1)) \delta x^i(t_1) \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} [L_x(t, x^i, u^i) \delta x^i + L_u(t, x^i, u^i) \delta u^i] dt \right\}$$

$$\dots\dots\dots (15)$$

ならば step 7 へ. それ以外は, $a_i = \beta a_i$ において, step 6 を繰返す.

<step 7> もし評価関数の値が収束したと判断したとき終了. それ以外は, $i = i + 1$ において, step 3 へ戻る.

[定理(収束性)]

$\{A^i\}_{i=0}^\infty, \{B_{11}^i\}_{i=0}^\infty, \{B_{12}^i\}_{i=0}^\infty, \{B_{22}^i\}_{i=0}^\infty, \{u^i\}_{i=0}^\infty, \{\bar{u}^i\}_{i=0}^\infty, \{\delta u^i\}_{i=0}^\infty$ は, 本アルゴリズムにより生成される数列および関数列とする. もし,

(1) ある定数 $M_3 \in (0, \infty)$ が存在して, ほとんどのところの $t \in [t_0, t_1]$ に対し

$$|\bar{u}^i| \leq M_3, \text{ かつ } |\delta u^i| \leq M_3 \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

$$\dots\dots\dots (16)$$

(2) $\bar{A} \in R^{n \times n}, \bar{B}_{11} \in \mathcal{L}_{\infty}^{n \times n}, \bar{B}_{12} \in \mathcal{L}_{\infty}^{n \times r}, \bar{B}_{22} \in \mathcal{L}_{\infty}^{r \times r}, \bar{u} \in \mathcal{L}_{\infty}^r$ が存在して

$$\bar{A} \geq 0, \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

$$\bar{B}_{11}(t) > 0, \bar{B}_{11}(t) - \bar{B}_{12}(t) (\bar{B}_{22}(t))^{-1} (\bar{B}_{12}(t))^T \geq 0$$

$$a. e. t \in [t_0, t_1] \dots\dots\dots (17 \cdot b)$$

かつ

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^i = \bar{A} \quad \text{in } R^{n \times n} \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} B_{11}^i(t) (\text{resp.}, B_{12}^i(t), B_{22}^i(t))$$

$$= \bar{B}_{11}(t) (\text{resp.}, \bar{B}_{12}(t), \bar{B}_{22}(t))$$

$$\text{in } \mathcal{L}^{n \times n} (\text{resp.}, \mathcal{L}_{\infty}^{n \times r}, \mathcal{L}_{\infty}^{r \times r}) \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u^i(t) = \bar{u}(t) \quad \text{in } \mathcal{L}_{\infty}^r \dots\dots\dots (19)$$

であるとき, $\bar{u}(t)$ は最適解であるための必要条件(20)を満足する.

$$H_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = 0 \quad a. e. t \in [t_0, t_1]$$

$$\dots\dots\dots (20)$$

ここに,

$$H(t, x, u, p) = -L(t, x, u, p) + p^T f(t, x, u, p) \quad (21)$$

であり、 $\bar{x}(t)$ は $\bar{u}(t)$ を用いた式(6)の解であり、 $\bar{p}(t)$ は次式(22)の解である。

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -f_x(t, \bar{x}, \bar{u})^T p(t) + L_x(t, \bar{x}, \bar{u})^T \\ p(t_1) &= -G_x(\bar{x}(t_1))^T \end{aligned} \quad (22)$$

(証明) 付録参照。

4. 数 値 実 験

宇宙においては宇宙船の燃料は貴重である。その燃料を使わずに、宇宙船の非ホロミック性を利用することにより姿勢制御を行おうとする研究がある。本論文では、三平ら⁽¹²⁾が取扱った宇宙ロボット姿勢問題を上げる。

4.1 状態方程式の導出 図1に示すような母船と1軸のロボットアームからなる宇宙ロボットを取上げる。ロボットアームには回転中心から等距離の位置に同じ質量のおもりが一つずつ搭載されており、これをアーム上で移動させるものとする。したがって、姿勢制御は、アーム上のおもりの移動とアーム回転により行うものとする。

宇宙ロボットの母船の重心を原点とする座標系を考えて以下に記号を用いる。

I_0 : 軸まわりの母船の慣性モーメント

J_0 : おもりを除いたアームの慣性モーメント

$m/2$: 一つのおもりの質量

ϕ : 座標系に対する母船の角度

θ : 母船に対するアームの角度

l : 軸からおもりまでの距離

外力が働かないため系全体の角運動量が保存されることから、角運動量保存則により

$$I_0 \dot{\phi} + (J_0 + ml^2)(\dot{\phi} + \dot{\theta}) = 0$$

よって、

Fig. 1 A model of space robot

$$\dot{\phi} = -\frac{J_0 + ml^2}{I_0 + J_0 + ml^2} \dot{\theta} \quad (23)$$

したがって次の状態方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{l} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{J_0 + ml^2}{I_0 + J_0 + ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ l \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{l} \quad (24)$$

ところで姿勢制御において θ, l, ϕ に加えて $\dot{\theta}, \dot{l}$ も制御されるのが一般的である。したがって新たに変数 v_1, v_2 を導入することにより、次の拡張された状態方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{l} \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_0 + ml^2}{I_0 + J_0 + ml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ l \\ \phi \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここに、 $(\dot{\theta}, \dot{l}, \dot{\phi}, v_1, v_2)^T$ は状態量ベクトルであり、 $(\dot{v}_1, \dot{v}_2)^T$ は操作量ベクトルである。式(25)は第2章の式(1)と対応する。したがって、評価関数の選び方により、最適制御問題は特異制御問題となる。

4.2 姿勢制御(障害物のない場合) まず初めに、文献(12)で扱われたのと同じ場合を考える。すなわち、任意の初期状態から、母船およびアームの角速度を最終的には零とする姿勢制御問題である。ここでは、初期状態として

$$\theta(t_0) = 0 \text{ rad}, l(t_0) = 1 \text{ m},$$

$$\phi(t_0) = 1.57 \text{ rad},$$

$$v_1(t_0) = \dot{\theta}(t_0) = 0 \text{ rad/s},$$

$$v_2(t_0) = \dot{l}(t_0) = 0 \text{ m/s}$$

を選び、最小にすべき評価関数として

$$J = \theta(t_1)^2 + \{l(t_1) - 1\}^2 + \phi(t_1)^2 + v_1(t_1)^2 + v_2(t_1)^2 \quad (26)$$

を選んだ。この評価関数により終端状態が $\theta(t_1) = 0, l(t_1) = 1, \phi(t_1) = 0, v_1(t_1) = \dot{\theta}(t_1) = 0, v_2(t_1) = \dot{l}(t_1) = 0$ となることが期待される。 $l(t_1) = 1$ としたのは、非現実的な振舞いをさせないための工夫である。

宇宙ロボットのパラメータとして、 $I_0 = 2000 \text{ kgm}^2, J_0 = 30 \text{ kgm}^2, m = 100 \text{ kg}$ とした。また、 $t_0 = 0 \text{ s}, t_1 = 20 \text{ s}$ とし、前章の提案アルゴリズムを適用した。微分計算には4次のルンゲ・クッタ法を用い、すべて倍精度計

算を行った。本アルゴリズムのプログラミングには Quick BASIC を用いた。

ステップ数 100, 初期状態量 $\dot{v}_1(t_0)=0, \dot{v}_2(t_0)=0$ のもと, 4 回のイテレーションで評価関数は $J=2.465$ から $J=4.663 \times 10^{-3}$ へと収束した。得られた最適状態量および最適操作量を図 2 および 3 にそれぞれ示す。

4・3 姿勢制御(障害物のある場合) 宇宙ロボット同士のドッキングについて考える。宇宙ロボットにとって、ドッキングする相手は障害物に対応する。したがって自由自在にアームを回転させることはできな

い。また、アームの長さにも、現実的には制限をおかなければならない。ここでは、アームの長さ l とアームの角度 $(\theta+\phi)$ に制限を与えることにする。この場合、文献(12)の手法は適用困難となる。

Fig. 2 Computed optimal states for unconstrained case

Fig. 3 Computed optimal control for unconstrained case

Fig. 4 Computed optimal states for constrained case

Fig. 5 Computed optimal control for constrained case

Fig. 6 Behavior of space robot

障害物を回避する目的で、次の評価関数を選んだ。

$$J = \{\theta(t) - 1.57\}^2 + \{l(t) - 1\}^2 + \phi(t)^2 \\ + v_1(t)^2 + v_2(t)^2 + \rho \int_{t_0}^{t_1} (L + M) dt \quad \dots\dots (27)$$

ここに、 $\rho \in (0, 1]$ はペナルティパラメータであり、

$$L = \frac{1}{l(t)(L_1 - l(t))},$$

$$M = \frac{1}{\sin(\theta(t) + \phi(t))} - M_1$$

ただし、 L_1 は回転中心からの長さ、 $M_1 \in (0, 1)$ はアームの回転制限値である。この評価関数により、終端状態が、

$$\theta(t_1) = 1.57, l(t_1) = 1,$$

$$\phi(t_1) = 0, v_1(t_1) = 0, v_2(t_1) = 0$$

となり、さらにアームの長さは、 $0 \leq l(t) \leq L_1$ 、アームの回転角は、

$$\sin^{-1}(M_1) \leq \theta(t) + \phi \leq \sin^{-1}(M_1) + \pi/2$$

となることが期待される。ここで、 $\theta(t_1) = 1.57$ としたのはドッキングの終了時においてアームを適当な指定位置に納めることを想定している。 $L_1 = 7 \text{ m}$ 、 $M_1 = 1/\sqrt{2}$ とし、宇宙ロボットのパラメータ、ステップ数、初期操作量は拘束がない場合と同じとする。また $t_0 = 0$ 、 $t_1 = 20$ である。計算の結果、評価関数は $J = 5.646$ から $J = 8.178 \times 10^{-5}$ へと収束した。得られた最適状態量および最適操作量を図 4 および 5 にそれぞれ示す。またそのときの宇宙ロボットの動きを図 6 に示す。障害物を回避しながらアームとおもりに巧みに母船の姿勢が制御されているようすがわかる。

5. お わ り に

非ホロミックシステムの軌道計画問題を取上げ、本計画問題を最適制御問題として定式化することにより、最適制御アルゴリズムを用いた接近法について検討した。具体的には、以下のとおりである。本計画問題から導かれる最適制御問題への適用を目的とした最適制御アルゴリズムを新たに提案した(第 3 章のアルゴリズム)。さらに、本アルゴリズムにより生成される無限関数列の極限関数は最適性の必要条件を満足することを理論的に証明した(第 3 章の定理、および付録の証明)。最後に本アルゴリズムを宇宙ロボットの姿勢制御(障害物が存在する場合および存在しない場合)に適用し、その有効性を確認した。

付 録

(定理の証明) 証明は背理法により行う。すなわち、最適解の必要条件(20)が成立しないとするならば矛盾が生じることを示す。この証明方法では、次の補題が

重要な役割を果たす。

[補題] 式(20)が成立しないとき、ある $\bar{a} > 0$ と $\delta \bar{u} \in \mathcal{L}_\infty^r$ が存在して

$$G_x(\bar{x}(t_1))^T \delta \bar{x}(t_1) + \frac{1}{2} \delta \bar{x}(t_1)^T \bar{A} \delta \bar{x}(t_1) \\ + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \bar{x}, \bar{u}) \delta \bar{x} + \bar{L}_u(t, \bar{x}, \bar{u}) \delta \bar{u} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\delta \bar{x}^T \quad \delta \bar{u}^T] \bar{B} \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ \delta \bar{u} \end{bmatrix} \right) dt = -\bar{a} \quad \dots\dots (28)$$

ここに

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ (\bar{B}_{12})^T & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (29)$$

であり、 $\delta \bar{x}$ は次式の解である。

$$\dot{\delta \bar{x}} = f_x(t, \bar{x}, \bar{u}) \delta \bar{x} + f_u(t, \bar{x}, \bar{u}) \delta \bar{u}, \delta \bar{x}(t_0) = 0 \quad \dots\dots (30)$$

(補題の証明) 混乱のない限り、 $f(t, x^i, u^i)$ 、 $f(t, \bar{x}, \bar{u})$ 、 $\dots$ を f^i 、 $\bar{f}$ 、 $\dots$ と略記する。

さて、式(20)が成立しないとき、ある $\bar{a} > 0$ と $\delta \bar{u} \in \mathcal{L}_\infty^r$ が存在して

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{H}_u \delta \bar{u} dt = \bar{a} \quad \dots\dots (31)$$

式(22)に注意して式(31)を変形すると

$$-\int_{t_0}^{t_1} \bar{H}_u \delta \bar{u} dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left[\bar{L}_x \delta \bar{x} + \bar{L}_u \delta \bar{u} - \frac{d(\bar{p}^T \delta \bar{x})}{dt} \right] dt \\ = G_x(\bar{x}(t_1))^T \delta \bar{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [\bar{L}_x \delta \bar{x} + \bar{L}_u \delta \bar{u}] dt \quad \dots\dots (32)$$

ここに $\delta \bar{x}$ は式(33)の解である。

$$\dot{\delta \bar{x}}(t) = \bar{f}_x(t) \delta \bar{x} + \bar{f}_u(t) \delta \bar{u}, \delta \bar{x}(t_0) = 0 \quad \dots\dots (33)$$

また、式(11)に注意すると

$$\frac{1}{2} \delta \bar{x}(t_1)^T \bar{A} \delta \bar{x}(t_1) \geq 0 \quad \dots\dots (34 \cdot a)$$

$$[\delta \bar{x}^T \quad \delta \bar{u}^T] \bar{B} \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ \delta \bar{u} \end{bmatrix} \\ = (\delta \bar{u} + (\bar{B}_{22})^{-1} (\bar{B}_{12})^T \delta \bar{x})^T \\ \times \bar{B}_{22} (\delta \bar{u} + (\bar{B}_{22})^{-1} (\bar{B}_{12})^T \delta \bar{x}) \\ + \delta \bar{x}^T (\bar{B}_{11} - \bar{B}_{12} (\bar{B}_{22})^{-1} (\bar{B}_{12})^T) \delta \bar{x} \geq 0 \quad \dots\dots (34 \cdot b)$$

式(34・a)、(34・b)より、適当な $\mu \in (0, \infty)$ が存在して

$$\frac{\mu}{2} \delta \bar{x}^T \bar{A} \delta \bar{x} + \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\delta \bar{x}^T \quad \delta \bar{u}^T] \bar{B} \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ \delta \bar{u} \end{bmatrix} dt = \frac{\bar{a}}{2} \quad \dots\dots (35)$$

したがって、式(31)、(32)、(35)より、また、 $(\mu \delta \bar{x}, \mu \delta \bar{u})$ が式(33)の解となることより、式(28)が導かれる。ただし、 $\mu \delta \bar{x}$ 、 $\mu \delta \bar{u}$ 、 $\bar{a} \mu/2$ をそれぞれ $\delta \bar{x}$ 、 $\delta \bar{u}$ 、 $\bar{a}$ と新たに置く。補題の証明終了。

以上の準備のもと次の関係が示される。すなわち、
 十分大きな $i \geq 0$ に対し、

$$\begin{aligned}
 J(u^{i+1}) - J(u^i) &\leq \alpha_i M_2 (G_x^i(t_1) \delta x^i(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [L_x^i \delta x^i + L_u \delta u^i] dt) \\
 &\quad (\text{アルゴリズムの step 6 より}) \\
 &\leq \alpha_i M_2 \left(G_x^i(t_1) \delta x^i(t_1) + \frac{1}{2} \delta x^i(t_1)^T A^i \delta x^i(t_1) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L_x^i \delta x^i + L_u \delta u^i \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} [(\delta x^i)^T \quad (\delta u^i)^T] B^i \begin{bmatrix} \delta x^i \\ \delta u^i \end{bmatrix} \right\} dt \right) \\
 &\quad (\text{式(21) より}) \\
 &\leq \alpha_i M_2 \left(G_x^i(t_1) \delta \bar{x}(t_1) + \frac{1}{2} \delta \bar{x}(t_1)^T A^i \delta \bar{x}(t_1) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L_x^i \delta \bar{x} + L_u \delta \bar{u} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} [(\delta \bar{x})^T \quad (\delta \bar{u})^T] B^i \begin{bmatrix} \delta \bar{x} \\ \delta \bar{u} \end{bmatrix} \right\} dt \right) \\
 &\quad (\text{アルゴリズムの step 6 より}) \\
 &\leq -\frac{\alpha_i M_2 \bar{a}}{2} \\
 &\quad (\text{補題より})
 \end{aligned}$$

ここで、ある $\alpha_0 > 0$ に対し $\alpha_i \geq \alpha_0$ であること (証明略) を考えると、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J(u^i) = -\infty$$

となる。このことは最小化すべき評価関数が最小値をもたないことを示しており、明らかに矛盾である。以

上で定理の証明は終了。

文 献

- (1) 中村仁彦, 非ホロミックロボットシステム (第2回), 日本ロボット学会, **11** 5 (1993), 655-662.
- (2) Brockett, R. W. (Brockett, R. W., ほか2名編), *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in *Differential Geometric Control Theory*, (1983), 181-191, Birkhauser.
- (3) 中村仁彦, 非ホロミックロボットシステム (第3回), 日本ロボット学会, **11** 6 (1993), 837-844.
- (4) Tilbury, Do, Murry, R. M. and Sastry, S. S., Trajectory generation for the N trailer problem using Goursat normal form, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **40** 5 (1995), 802-819.
- (5) Laumond, J. P., Jacobs, P. E., ほか2名, A motion planner for nonholonomic mobile robot, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, (1994), 577-593.
- (6) Fernandes, C., Gurvits, L., ほか1名 (Li, Z. and Canny, J., 編), *Optimal nonholonomic motion planning for a falling cat*, in *Nonholonomic Motion Planning*, (1993), 379-421.
- (7) 秋山岳夫・坂和愛幸, 宇宙ロボットの非線形計画による軌道計画, *sice 論文集*, **31** 2 (1995), 193-197.
- (8) Divelbiss, A. W. and Wen, J., A global approach to nonholonomic motion planning, *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr., Tucson AZ*, (1992), 1597-1602.
- (9) 坂和愛幸, 最適化と最適制御, 3章, (1980), 森北出版.
- (10) 井前譲・箱守京次郎, リカッチ解の存在を保証する2次の最適制御アルゴリズム, *sice 論文集*, **23** 4 (1987), 410-412.
- (11) 井前譲・箱守京次郎, 最適制御問題に関する2次のアルゴリズムの収束性, *sice 論文集*, **23** 10 (1987), 1100-1102.
- (12) 三平満司, ほか2名, 時間軸状態制御系を用いた宇宙ロボットの姿勢制御, 第17回DSTシンポジウム, (1994), 245-248.