歯面の接触と動荷重の基礎理論*

(第2報, 歯車対の運動方程式と軸受荷重変動が零となる条件)

本 多

捷*¹Basic Theory on Tooth Contact and Dynamic Loads of Gears
(2nd Report, Equations of Motion and Conditions for No Variation
of Bearing Loads)

Sho HONDA

For a point of contact and its common contact normal given through the new tooth geometry, equations of motion and the bearing loads of a gear pair are presented. Analysis of the bearing loads clarifies that the conditions under which a pair of tooth profiles has no variation of bearing loads are as follows: (a) the path of contact must be a straight line which coincides with the common contact normal at the point of contact and must be fixed in static space, and (b) the ratio between angular velocities must be constant and coincide with that between input and output torques. This indicates that the variation of bearing load is composed of both the variation of static load due to violation of condition (a) and that of rotation due to violation of condition (b), the former of which has not been discussed in previous theories of dynamic load. Condition (a) indicates that the pair of tooth profiles corresponding to the straight path of contact must lie on involute helicoids and a pair of tooth surfaces must include the pair of tooth profiles and be modified to make contact along it, which explains why the choice of the tooth surfaces and the tooth bearing corresponding to the tooth profile greatly influences the noise and vibration of gears for power transmission.

Key Words: Gear, Tooth Profile, Gear Geometry, Gear Dynamics, Dynamic Load, Transmission

1. 結 論

第1報では新歯形論を提示し, 任意の歯車対の歯面の接触点とその共通法線とが2軸の位置関係と角速度の方向とから決まる基本座標系によって, 回転角を助変数として記述されることを示した。本報では新歯形論によって定義された接触点の軌跡とその共通法線をもつ歯車対の運動方程式と軸受荷重とを求め, 軸受荷重変動が零となる接触点の軌跡の条件を示し, 併せて歯車対が励起する荷重変動を明らかにする。

2. 対象歯車対

図1は対象歯車対の接触点の軌跡とその共通法線を新歯形論によって表した概念図である。2軸の位置関係, 入出力トルク T_1 , T_2 , 角速度 ω_1 , ω_2 の方向および基本座標系 C_1 , C_2 , C_{q1} (図示せず), C_{q2} が与えられている。任意の瞬間の接触点を P およびその共通法線を n とし, n を含む軸IIに平行な平面を作用面 G_2 , 同様に軸Iに平行な平面を作用面 G_1 (G_2 との交線で示されている) とする。接触点 P は歯面IIの集中荷重の法

線力 F_{N2} の作用点でもあり, 共通法線 n はその方向を表している。接触点 P の軌跡が接触点の軌跡であり, 接触点の軌跡とその共通法線とを各歯車軸とともに回転する座標系に変換すれば歯形曲線 I, II が得られ, 歯形曲線 I, II を含む互いに干渉しない任意の曲面として歯面 I, II が与えられている。ここで接触点 P お

Fig. 1 Fundamental dimensions of a gear pair

* 原稿受付 1995年8月11日。

*¹ 正員, (株)豊田中央研究所機械2部 (〒480 11 愛知県愛知郡長久手町)。

よびその共通法線 $\mathbf{n}$, 接触の条件式が以下のように与えられているものとする⁽¹⁾。

(1) 接触点 $P(q_{2c}, -R_{b2}, z_{2c})$ およびその共通法線の傾き角 $n(\phi_2, \psi_{b2})$ は, 座標系 C_{q2} および C_2 を用い, 歯車 II の回転角 θ_2 を助変数として次のように表されている。

$$\left. \begin{aligned} q_{2c}(\theta_2) &= \int_0^{\theta_2} [R_{b2}(\theta_2)(1 - d\chi_2/d\theta_2)/\{\tan \phi_{b2}(\theta_2)\tan \eta_{b2}(\theta_2) + 1\}]d\theta_2 + q_{2c}(0) \\ R_{b2}(\theta_2) &= \int_0^{\theta_2} (dR_{b2}/d\theta_2)d\theta_2 + R_{b2}(0) \\ z_{2c}(\theta_2) &= \int_0^{\theta_2} [R_{b2}(\theta_2)(1 - d\chi_2/d\theta_2)/\{\tan \phi_{b2}(\theta_2) + 1/\tan \eta_{b2}(\theta_2)\}]d\theta_2 + z_{2c}(0) \\ \eta_{b2}(\theta_2) &= \int_0^{\theta_2} (d\eta_{b2}/d\theta_2)d\theta_2 + \eta_{b2}(0) \\ \chi_2(\theta_2) &= \int_0^{\theta_2} (d\chi_2/d\theta_2)d\theta_2 + \chi_2(0) = \pi/2 - \phi_2(\theta_2) \\ \psi_{b2}(\theta_2) &= \int_0^{\theta_2} (d\psi_{b2}/d\theta_2)d\theta_2 + \psi_{b2}(0) \\ \text{ただし } \tan \eta_{b2}(\theta_2) &= (dz_{2c}/d\theta_2)/(dq_{2c}/d\theta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

(2) 接触点 P およびその共通法線の傾き角は座標系 C_1 と C_{q1} とに変換されて, 次のように表されている。

$$\left. \begin{aligned} P\{u_{1c}(\theta_2), v_{1c}(\theta_2), z_{1c}(\theta_2)\} \\ P\{q_{1c}(\theta_2), -R_{b1}(\theta_2), z_{1c}(\theta_2)\} \\ n\{\phi_1(\theta_2) = \pi/2 - \chi_1(\theta_2), \psi_{b1}(\theta_2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(3) 接触点 P の共通法線 $\mathbf{n}$ は作用面 G_1, G_2 の交線上にあるから, 接触の条件式は次のようになる。

$$R_{b1}(\theta_2)\dot{\theta}_1 \cos \phi_{b1}(\theta_2) = R_{b2}(\theta_2)\dot{\theta}_2 \cos \phi_{b2}(\theta_2) \dots\dots\dots (3)$$

したがって角速度比 $i(\theta_2)$ および歯車 I の回転角 θ_1 は次のようになる。ただし $\theta_2=0$ のとき, $\theta_1=0$ とする。

$$\left. \begin{aligned} i(\theta_2) = \dot{\theta}_1/\dot{\theta}_2 &= R_{b2}(\theta_2)\cos \phi_{b2}(\theta_2)/\{R_{b1}(\theta_2)\cos \phi_{b1}(\theta_2)\} \\ \theta_1 &= \int_0^{\theta_2} i(\theta_2)d\theta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上記のように与えられた接触点の軌跡とその共通法線をもつ歯車対の運動および軸受荷重の変動を解析する。

3. 歯車対の運動方程式と軸受荷重

3・1 歯車 II と I の運動方程式と軸受荷重 図 2 は図 1 の接触点 P における歯車 II の集中荷重の法線力 $\mathbf{F}_{N2}$ および軸受荷重 $B_{z2}, B_{vq2f}, B_{vq2r}, B_{q2f}, B_{q2r}$ の関係を座標系 C_{q2} を用いて示したものである。接触点 P およびその共通法線 $\mathbf{n}$ は式 (1) によって与えられている。歯面の潤滑は十分で, 集中荷重の摩擦成分は無視できるものとする。また歯車 II は軸受 b_{2a}, b_{2f}, b_{2r} によって軸方向にも, 半径方向にも剛に支えられていて, 軸の剛性も十分大きいものとする。

歯車 II は入(出)力トルク $\mathbf{T}_2$ および歯車 I から集中荷重の法線力 $\mathbf{F}_{N2}$ を受けて固定軸 II の周りに回転運動をしているから, 歯車 II の運動方程式および軸受荷重の式は座標系 C_{q2} の各軸に関するトルクと力の釣合

$$\left. \begin{aligned} J_2\ddot{\theta}_2 &= F_{q2}R_{b2}(\theta_2) + T_2 \\ B_{z2} &= -F_{z2} = -F_{q2}\tan \phi_{b2}(\theta_2) \\ B_{vq2r}b_{20} &= F_{z2}R_{b2}(\theta_2) \\ B_{q2f} + B_{q2r} &= -F_{q2} \\ B_{q2f}b_{20} &= -F_{q2}\{z_{2c}(\theta_2) - z_{2cr}\} \\ &\quad + F_{q2}q_{2c}(\theta_2)\tan \phi_{b2}(\theta_2) \\ B_{vq2f} + B_{vq2r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに

- J_2 : 歯車 II の慣性モーメント
- θ_2 : 歯車 II の回転角
- T_2 : 歯車 II の入(出)力トルク(一定)
- F_{q2}, F_{z2} : $\mathbf{F}_{N2}$ の q_{2c}, z_{2c} 軸方向成分
- B_{z2} : 軸受 b_{2a} の z_{2c} 軸方向荷重
- B_{q2f}, B_{q2r} : 軸受 b_{2f}, b_{2r} の q_{2c} 軸方向荷重
- B_{vq2f}, B_{vq2r} : 軸受 b_{2f}, b_{2r} の v_{q2c} 軸方向荷重
- z_{2cf}, z_{2cr} : 軸受 b_{2f}, b_{2r} の荷重作用点の z_{2c} 座標
- b_{20} : 軸受 b_{2f}, b_{2r} の間隔 ($z_{2cf} - z_{2cr} > 0$)

ただし荷重方向は座標系 C_{q2} の各軸方向に正である。歯車 I についても全く同様にして次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 \ddot{\theta}_1 &= F_{q1} R_{b1}(\theta_2) + T_1 \\
 B_{z1} &= -F_{z1} = -F_{q1} \tan \phi_{b1}(\theta_2) \\
 B_{vq1r} b_{10} &= F_{z1} R_{b1}(\theta_2) \\
 B_{q1f} + B_{q1r} &= -F_{q1} \\
 B_{q1f} b_{10} &= -F_{q1} \{z_{1c}(\theta_2) - z_{1cr}\} \\
 &\quad + F_{q1} q_{1c}(\theta_2) \tan \phi_{b1}(\theta_2) \\
 B_{vq1f} + B_{vq1r} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに

J_1 : 歯車 I の慣性モーメント

θ_1 : 歯車 I の回転角

T_1 : 歯車 I の入(出)力トルク(一定)

F_{q1}, F_{z1} : 歯車 I の集中荷重の法線力 F_{N1} の q_{1c} , z_{1c} 軸方向成分

B_{z1} : 軸受 b_{1a} の z_{1c} 軸方向荷重

B_{q1f}, B_{q1r} : 軸受 b_{1f}, b_{1r} の q_{1c} 軸方向荷重

B_{vq1f}, B_{vq1r} : 軸受 b_{1f}, b_{1r} の v_{q1c} 軸方向荷重

z_{1cf}, z_{1cr} : 軸受 b_{1r}, b_{1r} の荷重作用点の z_{1c} 座標

b_{10} : 軸受 b_{1f}, b_{1r} の間隔 ($z_{1cf} - z_{1cr} > 0$)

ただし荷重方向は座標系 C_{q1} の各軸方向に正である。

3.2 歯車対の運動方程式 歯車 I と II の運動方程式と作用反作用の式および式(3)とを連立させれば、歯車対の運動は次のように表すことができる。

Fig. 2 Tooth load and bearing loads of gear II

接点とその共通法線は式(1)によって与えられているから、式(6)は未知数 θ_1 , θ_2 , F_{q1} , F_{q2} の連立方程式になっていて、歯形曲線が与えられた歯車対の運動を記述するための基礎式である。式(6)は接点の軌跡が連続かつ微分可能な領域でのみ成立するから、接点の軌跡が微分不可能な点を含む場合には、その点近傍の運動は別に求める必要がある。例えば連続だが微分不可能な噛みあい歯数の変化する点では、法線速度の不連続に起因する歯面衝突が生じている⁽²⁾。

4. 軸受荷重の変動を零とするための条件

歯車対の回転によって歯車 II に生じる荷重変動は、軸受 b_{2a} , b_{2f} , b_{2r} の荷重の(静止)座標系 C_2 に対する変動としてとらえることができる。そこで座標系 C_{q2} で表された各軸受荷重を座標系 C_2 の各軸方向成分に変換すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 B_{z2c} &= B_{z2} \\
 &\quad \text{(軸受 } b_{2a} \text{ の } z_{2c} \text{ 軸方向荷重)} \\
 B_{u2cf} &= B_{q2f} \cos \chi_2 - B_{vq2f} \sin \chi_2 \\
 &\quad \text{(軸受 } b_{2f} \text{ の } u_{2c} \text{ 軸方向荷重)} \\
 B_{v2cf} &= B_{q2f} \sin \chi_2 + B_{vq2f} \cos \chi_2 \\
 &\quad \text{(軸受 } b_{2f} \text{ の } v_{2c} \text{ 軸方向荷重)} \\
 B_{u2cr} &= B_{q2r} \cos \chi_2 - B_{vq2r} \sin \chi_2 \\
 &\quad \text{(軸受 } b_{2r} \text{ の } u_{2c} \text{ 軸方向荷重)} \\
 B_{v2cr} &= B_{q2r} \sin \chi_2 + B_{vq2r} \cos \chi_2 \\
 &\quad \text{(軸受 } b_{2r} \text{ の } v_{2c} \text{ 軸方向荷重)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

軸受荷重の変動分は式(7)の微分を用いて次のように表すことができる。

(a) 軸受 b_{2a} の z_{2c} 軸方向荷重の変動分

$$\begin{aligned}
 \Delta B_{z2c} &= \Delta B_{z2} = -\Delta F_{z2} \\
 \Delta F_{z2} &= \Delta F_{q2} \tan \phi_{b2} + F_{q2} \Delta \phi_{b2} / \cos^2 \phi_{b2} \\
 \Delta F_{q2} &= \{ \Delta (J_2 \ddot{\theta}_2) - F_{q2} \Delta R_{b2} \} / R_{b2}
 \end{aligned}$$

(b) 軸受 b_{2f} の u_{2c} , v_{2c} 軸方向荷重の変動分

$$\begin{aligned}
 \Delta B_{u2cf} &= \Delta B_{q2f} \cos \chi_2 - B_{q2f} \sin \chi_2 \Delta \chi_2 \\
 &\quad - \Delta B_{vq2f} \sin \chi_2 - B_{vq2f} \cos \chi_2 \Delta \chi_2 \\
 \Delta B_{v2cf} &= \Delta B_{q2f} \sin \chi_2 + B_{q2f} \cos \chi_2 \Delta \chi_2 \\
 &\quad + \Delta B_{vq2f} \cos \chi_2 - B_{vq2f} \sin \chi_2 \Delta \chi_2 \\
 \Delta B_{q2f} &= -[\Delta F_{q2} (z_{2c} - z_{2cr} - q_{2c} \tan \phi_{b2}) \\
 &\quad + F_{q2} \{ \Delta z_{2c} - \Delta q_{2c} \tan \phi_{b2} \\
 &\quad - q_{2c} \Delta \phi_{b2} / \cos^2 \phi_{b2} \}] / b_{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta B_{vq2f} &= -(\Delta F_{z2} R_{b2} + F_{z2} \Delta R_{b2}) / b_{20} \\ (c) \quad \text{軸受 } b_{2r} \text{ の } u_{2c}, v_{2c} \text{ 軸方向荷重の変動分} \\ \Delta B_{u2cr} &= \Delta B_{q2r} \cos \chi_2 - B_{q2r} \sin \chi_2 \Delta \chi_2 \\ &\quad - \Delta B_{vq2r} \sin \chi_2 - B_{vq2r} \cos \chi_2 \Delta \chi_2 \\ \Delta B_{v2cr} &= \Delta B_{q2r} \sin \chi_2 + B_{q2r} \cos \chi_2 \Delta \chi_2 \\ &\quad + \Delta B_{vq2r} \cos \chi_2 - B_{vq2r} \sin \chi_2 \Delta \chi_2 \\ \Delta B_{q2r} &= -\Delta F_{q2} - \Delta B_{q2f} \\ \Delta B_{vq2r} &= -\Delta B_{vq2f} \end{aligned}$$

任意の回転角 θ_2 における歯車IIの軸受荷重の変動分は、 Δq_{2c} , ΔR_{b2} , Δz_{2c} , $\Delta \chi_2$, $\Delta \phi_{b2}$, $\Delta \ddot{\theta}_2$ の6個の変数の変動分で表すことができる。

入(出)力トルク一定の条件下で歯車IIが回転するとき、回転位置によらず歯車IIの軸受荷重の変動が常に零となるためには、少なくともその変動分が零でなければならないから、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta B_{z2c} &= \Delta B_{u2cr} = \Delta B_{v2cr} = \Delta B_{u2cr} = \Delta B_{v2cr} = 0 \\ \text{したがって歯車IIの軸受荷重変動が零となる条件は次の5項目に整理される。ただし } t \text{ は時間を表している。} \\ (1) \quad \Delta \chi_2(\theta_2) &= 0 \\ (2) \quad \Delta \phi_{b2}(\theta_2) &= 0 \\ (3) \quad \Delta R_{b2}(\theta_2) &= 0 \\ (4) \quad \Delta z_{2c}(\theta_2) &= \Delta q_{2c}(\theta_2) \cdot \tan \phi_{b2}(\theta_2) \\ (5) \quad \Delta \ddot{\theta}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)の各項目について以下に検討する。

(1) $\Delta \chi_2(\theta_2) = 0$ の条件
作用面 G_2 の傾き角 $\chi_2(\theta_2)$ は一定(χ_{20} とする)である。

$\chi_2(\theta_2) = \chi_2(0) = \chi_{20} = \pi/2 - \phi_{20}$
(2) $\Delta \phi_{b2}(\theta_2) = 0$ の条件
接触点における共通法線の作用面 G_2 上の傾き角 $\phi_{b2}(\theta_2)$ は一定(ϕ_{b20} とする)である。

$\phi_{b2}(\theta_2) = \phi_{b2}(0) = \phi_{b20}$
(3) $\Delta R_{b2}(\theta_2) = 0$ の条件
接触点における共通法線の接する基礎円筒半径 $R_{b2}(\theta_2)$ は一定(R_{b20} とする)である。

$R_{b2}(\theta_2) = R_{b2}(0) = R_{b20}$
(4) $\Delta z_{2c}(\theta_2) = \Delta q_{2c}(\theta_2) \cdot \tan \phi_{b2}(\theta_2)$ の条件
 $\phi_{b2}(\theta_2) = \phi_{b20}$ および式(1)を用いれば
 $\Delta z_{2c}(\theta_2) = \Delta q_{2c}(\theta_2) \cdot \tan \phi_{b20}$
 $\eta_{b2}(\theta_2) = \phi_{b20} = \eta_{b2}(0)$

すなわち接触点の軌跡の作用面 $G_2(q_{2c}, z_{2c}$ 平面)上の傾き角は共通法線のそれに一致しなければならない。条件(1)～(4)の結果を式(1)に代入し、座標系 C_2 を用いて表せば、接触点の軌跡およびその共通法線は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} q_{2c}(\theta_2) &= R_{b20} \theta_2 \cos^2 \phi_{b20} + q_{2c}(0) \\ u_{2c}(\theta_2) &= q_{2c}(\theta_2) \cos \chi_{20} + R_{b20} \sin \chi_{20} \\ v_{2c}(\theta_2) &= q_{2c}(\theta_2) \sin \chi_{20} - R_{b20} \cos \chi_{20} \\ z_{2c}(\theta_2) &= R_{b20} \theta_2 \cos \phi_{b20} \sin \phi_{b20} + z_{2c}(0) \\ n(\phi_{20} = \pi/2 - \chi_{20}, \phi_{b20}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式(9)は接触点の軌跡が、座標系 C_{q2} 上で点 $P_0\{q_{2c}(0), -R_{b20}, z_{2c}(0)\}$ を通り、座標系 C_2 に対する傾き角 $n(\phi_{20} = \pi/2 - \chi_{20}, \phi_{b20})$ の共通法線に一致する直線であることを表している。

式(9)を座標系 C_1, C_{q1} に変換すれば、式(2)を用いて点 $P_0\{q_{1c}(0), -R_{b10}, z_{1c}(0)\}$ を通り、座標系 C_1 に対する傾き角 $n(\phi_{10} = \pi/2 - \chi_{10}, \phi_{b10})$ の直線として表すことができる。したがって角速度比および歯車Iの回転角は式(4)を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} i(\theta_2) &= \dot{\theta}_1 / \dot{\theta}_2 \\ &= R_{b20} \cos \phi_{b20} / (R_{b10} \cos \phi_{b10}) = i_0 \\ \theta_1 &= i_0 \theta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

角速度比は一定(i_0 とする)である。

(5) $\Delta \ddot{\theta}_2(t) = 0$ の条件
 $\ddot{\theta}_2$ は一定、すなわち等加速度運動を意味している。ここで対象としている歯車対は入出力一定の定常運動を仮定しているから $\ddot{\theta}_2 = 0$ 、すなわち $\dot{\theta}_2$ 一定の等速運動を意味している。さらに式(10)を用いれば $\dot{\theta}_1$ も一定となるから、歯車Iについても $\ddot{\theta}_1 = 0$ が成り立つ。したがって式(6)により

$$\begin{aligned} F_{q2} R_{b20} &= -T_2 \\ F_{q1} R_{b10} &= -T_1 \end{aligned}$$

式(10)と作用反作用の式を用いれば

$$i_0 = F_{q2} \cdot R_{b20} / (-F_{q1} \cdot R_{b10}) = -T_2 / T_1$$

すなわち歯車対の角速度比 i_0 は、与えられたトルク比(この場合は入出力の仮定から一定)でなければならない。

歯車Iに生じる荷重変動についても全く同様にして式(8)の条件によって軸受荷重変動零が実現している。したがって入出力一定で定常運動する歯車対から発生する軸受け荷重変動を零にするためには、接触点の軌跡とその共通法線は次の条件を満たさなければならない。

(a) 接触点が静止空間(座標系 C_2 上)に任意に与えられたとき、接触点の軌跡はその接触点の共通法線に一致する直線で、しかも静止空間に固定された直線でなければならない。

(b) しかもその接触点における角速度比 i_0 は一定で、与えられたトルク比に一致しなければならない。

い。

図3に軸受荷重変動が零となる作用平面 G_{20} 、基礎円筒(半径 R_{b20})、接触点の軌跡(共通法線 n)、集中荷重の法線力 F_{N2} の関係を座標系 C_2 、 C_{q2} によって示している。複数かみあいの場合には、条件(a)は各歯の法線力の合力の作用点の軌跡が、常に合力の作用線に一致する直線であることを意味する。したがってこの直線が条件(b)を満たす接触点の軌跡でありかつ共通法線である歯面対を設定すれば、各歯の法線力はこの直線上に並び、軸受荷重変動零を実現できる。

5. 軸受荷重の変動が零となる歯形曲線

5.1 歯形曲線 II 座標系 C_2 に対して原点 C_2 と z_{2c} 軸を共有し、 z_{2c} 軸の周りに θ_2 で回転する座標系を座標系 $C_{r2}(u_{r2c}, v_{r2c}, z_{r2c})$ とすれば、式(9)を座標系 C_{r2} に変換して、軸受荷重の変動が零となる歯形曲線 II およびその法線の傾き角は次のように求められる。ただし $\theta_2=0$ のとき u_{r2c} 軸は u_{2c} 軸に一致しているものとする。

$$\left. \begin{aligned} \chi_{r2} &= \chi_{20} - \theta_2 = \pi/2 - \phi_{20} - \theta_2 \\ u_{r2c} &= q_{2c}(\theta_2) \cos \chi_{r2} + R_{b20} \sin \chi_{r2} \\ v_{r2c} &= q_{2c}(\theta_2) \sin \chi_{r2} - R_{b20} \cos \chi_{r2} \\ z_{r2c} &= z_{2c}(\theta_2) \\ n(\phi_{20} + \theta_2, \phi_{b20}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

5.2 歯形曲線 I 全く同様にして座標系 C_1 に対して、 z_{1c} 軸の周りに θ_1 で回転する座標系を座標系

Fig. 3 Path of contact without variation of bearing loads

$C_{r1}(u_{r1c}, v_{r1c}, z_{r1c})$ とする。式(9)を座標系 C_1 、 C_{q1} に変換すれば、点 $P_0\{q_{1c}(0), -R_{b10}, z_{1c}(0)\}$ をとおり、座標系 C_1 に対する傾き角 $n(\phi_{10}=\pi/2-\chi_{10}, \phi_{b10})$ の直線となり、この直線上の任意点は式(2)によって与えられているから、この直線を座標系 C_{r1} に変換すれば、軸受荷重の変動が零となる歯形曲線 I およびその法線の傾き角は次のように求められる。ただし $\theta_1=0$ のとき u_{r1c} 軸は u_{1c} 軸に一致しているものとする。

$$\left. \begin{aligned} \chi_{r1} &= \chi_{10} - \theta_1 = \pi/2 - \phi_{10} - \theta_1 \\ u_{r1c} &= q_{1c}(\theta_2) \cos \chi_{r1} + R_{b10} \sin \chi_{r1} \\ v_{r1c} &= q_{1c}(\theta_2) \sin \chi_{r1} - R_{b10} \cos \chi_{r1} \\ z_{r1c} &= z_{1c}(\theta_2) \\ n(\phi_{10} + \theta_1, \phi_{b10}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$\theta_1=i_0\theta_2$ であることを用い、あらためて θ_1 を助変数として、 $q_{1c}(\theta_2)$ と $z_{1c}(\theta_2)$ を $q_{1c}(\theta_1)$ と $z_{1c}(\theta_1)$ とで置き直せば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} q_{1c}(\theta_1) &= R_{b10} \theta_1 \cos^2 \phi_{b10} + q_{1c}(0) \\ z_{1c}(\theta_1) &= R_{b10} \theta_1 \cos \phi_{b10} \sin \phi_{b10} + z_{1c}(0) \\ \chi_{r1} &= \chi_{10} - \theta_1 = \pi/2 - \phi_{10} - \theta_1 \\ u_{r1c} &= q_{1c}(\theta_1) \cos \chi_{r1} + R_{b10} \sin \chi_{r1} \\ v_{r1c} &= q_{1c}(\theta_1) \sin \chi_{r1} - R_{b10} \cos \chi_{r1} \\ z_{r1c} &= z_{1c}(\theta_1) \\ n(\phi_{10} + \theta_1, \phi_{b10}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

実用上は式(13)のほうが式(12)よりも使いやすい。

式(11)、(13)は歯形曲線 I、II が、接触点の軌跡に対応するインボリュートヘリコイド上の曲線になっていることを示している。

歯面としてはこの歯形曲線 I、II を含む任意の互いに干渉しない曲面が可能であるが、インボリュートヘリコイドまたはその修整歯面以外の曲面は、実際上上記のような接触点の軌跡とその共通法線を実現することは難しいから、動力伝達用歯車としては不向きだといえよう。またこの歯形曲線は歯当たりを意味しているから、例えば歯面 II の歯当りは歯形曲線 II に沿ってつけなければならないことを示している。歯当たりが騒音低減上重要な意味をもつ理由である。

6. 歯車対から励起される荷重変動

入出力一定で定常運動をする歯車対は式(8)の5条件を満たすとき、軸受荷重の変動が零となる。したがって歯車対の荷重変動はこの5条件が満たされないことによって励起され、5条件に対応して次の5項目からなっている。ただし $\theta_2=0$ の接触点 P_0 を荷重変動の基準点とし、この点の χ_{20} 、 ϕ_{b20} 、 $F_{q20} = -T_2/R_{b20}$ は

与えられているものとする。

(1) 作用面の角度変動 ($\Delta\chi_2$) による v_{q2c} 軸方向の荷重変動 ($F_{q20}\Delta\chi_2$)

(2) 共通法線の作用面上の傾き角変動 ($\Delta\phi_{b2}$) による z_{2c} 軸方向の荷重変動 ($F_{q20}\Delta\phi_{b2}$)

(3) 共通法線が接する基礎円筒の変動 (ΔR_{b2}) による z_{2c} 軸周りのトルク変動 ($F_{q20}\Delta R_{b2}$)

(4) 接触点の軌跡の作用面上の傾き角変動 (歯当たりの不適切) によって生じる v_{q2c} 軸周りのトルク変動 $\{F_{q20}\Delta q_{2c}(\tan \eta_{b2} - \tan \phi_{b20})\}$

(5) 回転変動によって生じる z_{2c} 軸周りのトルク変動 ($J_2\Delta\ddot{\theta}_2$): 角速度比 (= 入出力トルク比) 一定の運動を伝達する歯形曲線からの偏差 (誤差およびたわみ) による不等速運動の結果生じる。

歯車対から励起される荷重変動は、静荷重 F_{q20} の静止空間における作用点、傾き角の変化によるトルクまたは荷重変動 (第1～4項) と回転変動に起因するトルク変動 (第5項) とから成り立っているといえる。従来の理論における動荷重増分は (5) 項のみを対象としていたが、実際には上記のように静荷重の変動に起因する動荷重増分も考慮する必要がある。傘歯車やハイボイドギヤの歯面においても、インボリュートヘリコイドの重要性を示すものである。さらに (4) 項の歯当たりの選択は、従来の理論では組付け誤差、たわみを補正して (5) 項を実現する補助手段とみなされていたが、接触点の軌跡と共通法線との関係を特定する条件であって、静荷重変動低減のためにも重要な手段である。

ここで求められた荷重変動は、歯形曲線が連続かつ微分可能な場合であって、連続であっても微分不可能なみあい歯数の変化する点での荷重変動は別に求める必要があり、それは瞬間的な速度や変位の変化 (かみあい衝撃) として (5) 項を増加させることになる。

7. 結 論

2 軸の位置関係と角速度の方向とが与えられている

とき、新歯形論によって定義された接触点の軌跡とその共通法線とをもつ任意の歯車対の運動方程式と軸受荷重とから、軸受け荷重変動が零となる条件を解析し、以下の結論を得た。

(1) 任意の接触点における運動方程式および軸受荷重の式が求められた。

(2) 軸受荷重変動が零となる接触点の軌跡とその共通法線のもつべき条件が明らかにされた。すなわち

(a) 接触点が静止空間 (座標系 C_2 上) に任意に与えられたとき、接触点の軌跡はその接触点の共通法線に一致し、しかも静止空間に固定された直線でなければならない。

(b) しかもその接触点における角速度比は一定で、与えられた入出力トルク比でなければならない。

これは接触点の軌跡に対応する歯形曲線がインボリュートヘリコイド上の曲線になっていることを示している。歯面としてインボリュートヘリコイド以外の曲面が動力伝達用歯車としては不向きであることと、歯当たり (歯面上の接触点の移動軌跡 = 歯形曲線) とが騒音低減上重要な意味をもつ理由である。

(3) 歯車対から発生する荷重変動とは、実際の接触点の軌跡とその共通法線とが上記条件を満たさないために励起される荷重変動またはトルク変動であって、従来から考えられていた回転変動のほか、基礎円、ねじれ角、接触点の軌跡 (歯当たり)、作用面の変化による静荷重の変動によっても生じていることを示した。

ここで求められた歯形曲線は誤差やたわみを含むから、与えられた負荷状態でこの歯形曲線を実現するために、歯車諸元、歯面形状 (無負荷) をどのように決定すべきかが、動力伝達用歯車の設計の際の重要な課題である。

文 献

- (1) 本多捷, 機論, 62 600, C(1996), 3262-3268.
- (2) 本多捷, 機論, 57 544, C(1991), 3947-3951.