ステッピングモータ駆動平行2輪車の スライディングモード姿勢制御*

平岡延章^{*1}, 則次俊郎^{*2}

Sliding Mode Posture Control of a Parallel Biwheel Vehicle Driven with a Stepping Motor

Nobuaki HIRAOKA and Toshiro NORITSUGU

A sliding mode control scheme with a discrete time control model is applied to posture control of a parallel biwheel vehicle (PBV) which is driven with a stepping motor operated in an open-loop mode. Both equivalent and discontinuous control inputs are applied to the PBV. The former brings states on a sliding surface to the origin of state space along the surface. The latter causes states off the sliding surface to move toward the surface and be bound on it. Posture of the PBV can be controlled within ± 0.005 rad around an unstable equilibrium position when the PBV starts from an initial inclination of 0.1 rad off the perpendicular. Trajectories of the initial response in state space reveal that the state of the PBV is closely bound on a sliding surface, hence the sliding mode is established. The stable initial responses are also maintained under additional weighting of up to 1.5 kg, which is almost equal to the weight of the PBV, near the center of mass or on the bottom of the PBV. The vehicle can easily recover stable posture when the body is pushed from the stable position. Consequently, the occurrence of the sliding mode is confirmed using the PBV with the step rate as the control input. The sliding mode can result in quick response, stable posture and robustness of the vehicle motion.

Key Words: Motion Control, Robust Control, Moving Robot, Digital Control, Stepping Motor, Sliding Mode Control, Inverted Pendulum, Parallel Biwheel Vehicle

1. 緒 言

ステッピングモータは、開ループで精密にモータ軸の回転角を制御できるデジタルアクチュエータであり、低速・微速動作が容易で、静止時に保持トルクを発生する。しかし、応用に当たっては、回転トルクの調節が困難、動作周波数領域内に機械的共振点がある、過負荷により同期外れを生じる、といった点に配慮を要する。このような事情から、ステッピングモータは、OA、FA分野において、目標位置までの総駆動パルス数とパルス速度の加減速パターンを指令値とする、PTP位置決め用途にもっぱら用いられている。

一方、始点と終点の位置精度のみを規範とするPTP制御の範囲を越え、軌道追従性や移動中の動特性をも考慮して、ステッピングモータによりロボットを駆動する試みが報告されている⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。小島ら⁽¹⁾は、間欠運動に起因する振動を考慮して、ステッピングモータにより駆動する水平2関節型ロボットの動特性の定式化を試み、ステッピングモータの駆動周波数が系の支配的な共振振動数にほぼ等しいとき、大振幅の持続的

振動が生起することを、シミュレーションならびに実験により検証した。佐藤ら⁽²⁾は、ステッピングモータにより駆動する閉ループ型マニピュレータを用いて、駆動パルス波形の工夫による低速動作時の振動抑制法を論じた。對馬らは、脱調防止のため、ステッピングモータの周波数-トルク特性を近似式で表すトルク最適化制御法⁽³⁾を提案し、さらに関節軸の捩じれとステッピングモータのスティフネス特性を利用して関節駆動トルクを制御することにより、スカラロボットの振動抑制⁽⁴⁾や力制御⁽⁵⁾を試みている。

ステッピングモータの最大の魅力は、開ループで回転角の制御が可能な点であり、小型・高トルク型ステッピングモータの普及にとめない、動的システムをステッピングモータで駆動したいという要求は、今後ますます高まるものと思われる。本研究では、ステッピングモータの主用途である位置決めから一步踏み出し、ステッピングモータにより駆動する動的システムの運動制御を試みている。前報^{(6),(7)}では、ステップレートを操作量として閉ループ運動制御系を構成する手法を提案し、この手法をステッピングモータにより駆動する倒立振子型平行2輪車の姿勢制御に適用して、その有用性を示した。

* 原稿受付 1996年1月12日。

^{*1} 正員、高松工業高等専門学校 (〒761 高松市勅使町355)。

^{*2} 正員、岡山大学工学部 (〒700 岡山市津島中3-1-1)。

本報では、さらに安定でロバストな姿勢制御系の構築を目的として、非線形ロバスト制御法の一つである離散時間スライディングモード制御法を、ステッピングモータ駆動平行2輪車の姿勢制御に適用した結果を報告する。以下の節において、離散時間スライディングモード制御系の設計手順を概説し、つづいて、ステップレートを操作量とするスライディングモード制御則を、ステッピングモータ駆動平行2輪車に適用する。さらに、姿勢制御実験の結果を記し、前報で用いた状態フィードバック則による姿勢制御結果との比較を含め、スライディングモード制御による姿勢制御性能の改善結果について議論する。

2. スライディングモード制御

スライディングモード制御系の設計手順については、多くの手法が知られている⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾が、本節では、離散時間系のスライディングモード制御系を構成するため、Furuta⁽¹¹⁾の方法に従って制御系の設計手順を概説する。

以下の議論においては、システムの次数を n 、入力数を1とし、離散系の状態方程式と状態の線形関数 $\sigma(\mathbf{x})$ を、次のように定義する。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k) \quad (1)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \mathbf{x}(k) \quad (2)$$

スライディングモード制御では、 $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ を満足する状態空間内の平面（以下、切換面と呼ぶ）上において、システムの状態を安定にする $\mathbf{S}$ を設計することになる。

いま、制御入力 u を

$$\begin{aligned} u(k) &= u_e(k) + u_d(k) \\ &= (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_d) \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

と表すことにする。ここで、 u_e は等価制御入力と呼ばれ、状態を切換面上に留めるための入力を表す。一方、 u_d は切換制御入力と呼ばれ、状態の変化を切換面の方向に向かわせ、状態を切換面に到達させるための入力である。

等価制御入力 u_e は、 $\sigma(\mathbf{x})$ が時刻 k 以降変化しない条件

$$\mathbf{S} \mathbf{x}(k) = \mathbf{S} \mathbf{x}(k+1) \quad (4)$$

に、式(1)を代入して整理することにより、

$$u_e(k) = \mathbf{K}_e \mathbf{x}(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_e = -(\mathbf{Sb})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (6)$$

と表される。なお、行列 $(\mathbf{Sb})$ は正則であると仮定する。式(5)、(6)を、状態方程式(1)に代入すると、切換面上でのシステムの運動方程式は、

$$\mathbf{x}(k+1) = \{\mathbf{A} - \mathbf{b} (\mathbf{Sb})^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{A} - \mathbf{I})\} \mathbf{x}(k) \quad (7)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{x}(k) = 0 \quad (8)$$

となる（ただし、切換面上では、 $u_d=0$ とする）。 $\mathbf{S}$ は、運動方程式(7)、(8)を安定にし、かつ望ましい滑り状態が得られるように設計すればよい。

次に、切換制御入力を設計する。いま、リアプノフ関数の候補 $V(\mathbf{x})$ を

$$V(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})^2/2 \quad (9)$$

とする。さらに、切換ゲイン $\mathbf{K}_d$ の要素を $[K_1, K_2, \dots, K_n]$ と表し、 K_i を次式のように選ぶ。

$$K_i = \begin{cases} \kappa_i ; & \text{for } (\mathbf{Sb}) \sigma(k) \mathbf{x}_i(k) < -\delta_i \\ 0 ; & \text{for } -\delta_i \leq (\mathbf{Sb}) \sigma(k) \mathbf{x}_i(k) \leq \delta_i \\ -\kappa_i ; & \text{for } (\mathbf{Sb}) \sigma(k) \mathbf{x}_i(k) > \delta_i \end{cases} \quad (10)$$

ただし、

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n |x_i(k)| |x_j(k)| \kappa_j (\mathbf{Sb})^2/2 \quad (11)$$

$$0 < \kappa_i < |2/(\mathbf{Sb} \sum_{j=1}^n |t_{ij}|)| \quad (12)$$

とする（ t_{ij} は、状態方程式を正準系に変換する変換行列の要素）。このようにすると、リアプノフの安定定理により、システムは漸近安定となることが示される（付録参照）。

3. 平行2輪車の制御

3・1 平行2輪車の状態方程式 図1に、平行2輪車の機構とモデルを示す。ここで、車体の鉛直からの傾斜角を θ_p (rad)、車輪の回転角を θ_w (rad)とし、次式のように状態変数を選ぶ。

$$\mathbf{x} = [\dot{\theta}_p \quad \theta_p \quad \dot{\theta}_w]^T \quad (13)$$

ステッピングモータのステップレートを制御入力 u (pps)とし、サンプリング間隔を10 msとして離散化すると式(1)の遷移行列 $\mathbf{A}$ 、駆動行列 $\mathbf{b}$ の値は、次のようになる⁽⁷⁾。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.735 & 0.00617 \\ 0 & 0.960 & 0.00968 \\ 0 & -7.81 & 0.923 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{b} = [-2.50^{-5} \quad -6.64^{-5} \quad 2.66^{-4}]^T \quad (15)$$

Fig. 1 Mechanism and model of parallel biwheel vehicle.

以降の議論は、システムの次数 n を3として進める。

3・2 切換面と安定領域・等価制御ゲイン 切換面を設計するに当たって、切換面の係数 S の特性を明確にし、 S による等価制御ゲインの変化のようすを明らかにすることは有用である。

式(8)は原点を通る平面の方程式であり、ベクトル S は状態空間における切換面の法線方向ベクトルである。スライディングモード制御では、状態空間における切換面の方位すなわちベクトル S の方向が重要であり、 S の大きさや符号は特別な意味を持たない。例えば、式(6)、(10)において、 S の大きさや符号は分子分母で相殺され、 S の要素間の比(ベクトルの方向)のみが設計パラメータとして意味を持つ。そこで、 S のノルムを1とした単位法線ベクトルを s と表し、以下の議論は s を用いて行なう。

まず、式(14)、(15)に示す平行2輪車の遷移行列 A 、駆動行列 b の値を用いて、式(7)を安定にする切換面の存在範囲を調べる。単位法線ベクトル s を用いると、単位球面上に運動方程式(7)の安定領域をマッピングすることが可能となり、数値計算により図2が得られる。なお、安定領域も、 s の符号に依存せず原点に対して対称となるため、図には正の半球面を平面に投影する方法で表示した。式(7)を安定にする領域は、 s 空間で、半球面の1/4より少し大きな斜線を施した領域となる。

次に、式(6)を用いて安定領域内での等価制御ゲインの値を計算し、同様のマッピングを行なう。式(6)に式(14)の遷移行列の値を代入すると、平行2輪車システムでは、 K_e の第一要素 K_{e1} は、恒等的に0となる(これは、等価制御系において、式(8)の条件により、式(7)が、入力 u の次数だけ低次元化されることに起因する)。一方、 K_{e2} 、 K_{e3} の値は s の値とともに、図3に示すように変化する。

(a) s_1 - s_2 plane ($s_3 > 0$)

(b) s_2 - s_3 plane ($s_1 > 0$)

Fig. 2 Stable area of eq.(7) on s sphere.

3・3 切換面の設計指針 切換面の設定は、式(7)の運動方程式を安定にする限り任意であるが、実システムでは、システムの構造により任意の切換面にシステムの状態を拘束できるとは限らない。たとえば、ここで取り上げる平行2輪車の場合、車輪の回転により車輪接地点を重心の直下に移動させ倒立姿勢を維持する。平行2輪車の姿勢を安定に保つには、車輪の自由な回転が必須であり、姿勢維持のため $\dot{\theta}_w$ が変動しても滑り状態を持続できるような切換面(法線ベクトル s が、 $\dot{\theta}_w$ 軸とほぼ垂直な方向を向き、 $\dot{\theta}_w$ 軸に沿った面)が望まれる。逆に、車輪の回転速度を常に零付近に拘束するような切換面(法線ベクトル s が、 $\dot{\theta}_w$ 軸に近づき、 $\dot{\theta}_w$ のわずかな変動に対しても、状態が切換面から大きく逸脱するような面)を選択し、滑り状態を保ちながら車体の傾きを速やかに零に戻すような動作は、シス

 (a) K_{e2}

 (b) K_{e3}

 Fig. 3 Equivalent control gain mapped on s sphere (s_2 - s_3 plane, $s_1 > 0$).

テムの運動特性と矛盾しており、実現不可能である。

さらに、切換面上に拘束された状態を速やかに原点に収束させるため、等価制御ゲインが大となる面が好ましい。このような考察から、車輪回転速度に対する自由度が大きく、かつ等価制御ゲインが十分大きくなる切換面を、3.2節の図2、図3に示した数値計算の結果に基づき選定する。スライディングモード制御系の設計に当たっては、本例のように物理システムの特性を十分考慮して切換面を設計することが必要である。

本論文では、Furuta⁽¹¹⁾の方法により、離散時間スライディングモード制御系を構成したが、Furutaは切換ゲイン式(10)の右辺において、すべての状態に対し同一のゲイン f_0 ($=\kappa_1=\kappa_2=\dots=\kappa_n$) を与えた。しかし、実システムでは状態変数や単位系の選び方によ

り、状態変数のとり値が状態ごとに大きく異なる場合があり、すべての状態に対して同一のゲインを設定すると、式(3)より値の大きな状態のみが切換制御入力 u_d に寄与するという不合理を生じる。そこで、式(10)のごとく、状態ごとに異なる値のゲイン κ_i を設定し、状態や単位の選び方により生じる切換制御入力 u_d への寄与の片寄りを補償することを考えた。この修正を行なってもシステムの安定性に影響を及ぼさないことは、付録に示したとおりであり、離散時間スライディングモード制御法を実システムに適用する際に考慮すべき有効な方法である。

4. 実験結果および考察

4.1 実験装置

実験には、図1に示す平行2輪車(高さ約600mm、車輪直径約60mm、車輪間隔約80mm、質量約1.5kg)を用い、上部に取付けた4相励磁定電流駆動の5相ステッピングモータにより、歯付きベルトを介して車輪を駆動した。車体傾斜角 θ_p は、下端が路面に沿って滑る接触子とポテンシオメータ(導電性プラスチック型)を用いて検出し、12ビットADコンバータにより計測した(角度分解能 5×10^{-5} rad)。車体傾斜角速度 $\dot{\theta}_p$ は、 θ_p の差分から得た。制御系の構成に当たっては、測定雑音を低減するため、 θ_p と $\dot{\theta}_p$ を入力とするカルマンフィルタを用いて3つの状態 $\hat{\theta}_p$, $\hat{\dot{\theta}}_p$, $\hat{\dot{\theta}}_w$ を推定した。

以下に結果を示す実験においては、 $s=[0.9999, 0.01, 0.01]$, $\kappa=[2000, 15000, 30]$ とした。(等価制御ゲインは、式(6)より、 $K_w=[0, 28500, 239]$ となる。)

4.2 初期値応答

車体の初期傾斜角を0.1 rad としたときの、初期値応答における状態の推定値 $\hat{\theta}_p$, $\hat{\dot{\theta}}_p$, $\hat{\dot{\theta}}_w$, 切換関数 σ , 等価制御入力 u_e , 切換制御入力 u_d , 制御入力 u の時間波形を図4に示す。平行2輪車の姿勢は、約1.5秒で倒立平衡状態に到達し、その後、安定姿勢が持続している。安定姿勢では、切換制御入力の切換により生じる微振動を伴うが、振動の周期が短く(0.1~0.2 s)、振幅が小さい(車体傾斜角 $\hat{\theta}_p$ で ± 0.005 rad 以下、モータ回転量にして数ステップ程度)ため、平行2輪車の挙動に及ぼす悪影響はわずかである。

図5は、図4の初期値応答に示した3つの状態を、3次元状態空間の軌跡に書き換えたものである。点の間隔は、サンプリング間隔と同じ(10 ms)で、状態が切換面に対していずれの側にあるか($\sigma(x)$ の正負)により $\times/+$ の記号を用いてプロットした。図5(a)は、鳥瞰図で、格子は切換面を表す。状態は、○印で示す初期状態から出発し、 $\hat{\dot{\theta}}_w$ 軸の正方向に大きく膨らんだ後、原点に向かって収束している。図5(b)は、 $\hat{\theta}_p$ 軸の正方向(切換面とほぼ垂直な方向)から見た図である。点 p

Fig. 4 Initial response for $\theta_{p0} = 0.1$ rad.

付近から、状態が切換面に拘束され、オーバーシュートなく原点に収束しており、滑り状態が生じている。

緒言で述べたように、ステッピングモータは過負荷が加わると、駆動パルスとモータの回転が同期なくなり、脱調と呼ばれる不具合を生じる。本研究で扱うような動的システムの制御においては、ステップレートは不規則にかつ大きく変動するが、開ループで駆動するステッピングモータの脱調を、実時間で予測あるいは検出することは、容易でない。したがって、あらかじめモータ駆動回路に加わるステップレートに上限値を設定し、脱調を防止する必要がある。本研究では、この上限値として、実装状態での最大自起動周波数に相当するステップレート (約 2700 pps) を用いた。図4(g)から、初期値応答の初めの部分において、制御入力がこの上限値を越えている。その影響は、図5(b)の状態軌跡において、点q付近の軌跡に不連続変動として現われているが、制御系の安定性への悪影響は見られない。このように、制御入力に対する、適切な上限値 (飽和値) の設定により、脱調の弊害を回避することが可能である。

図6は、実験に用いた平行2輪車において、制御則のみを状態フィードバック則に変更したときの初期値応答の状態軌跡を、図5と同様にしてプロットしたものである (フィードバックゲインは前報⁽⁷⁾と同じ)。両図を

(a) Bird's-eye view

(b) View from $+\hat{\theta}_p$ direction

Fig. 5 Trajectory of initial response in the state space.

比較すると、状態フィードバック制御では、原点に対してオーバーシュートがあり、原点周りの振動も十分抑制されていない。一方、図5に示すスライディングモード制御では、滑り状態の発生にともない、原点に向かってオーバーシュートのない、速やかな収束が見られる。初期傾斜角 0.1 rad から、安定姿勢 ($|\hat{\theta}_p| < 0.005$ rad) に整定するまでに要する時間は、スライディングモード制御で 1.2 s、状態フィードバック制御で 3.6 s である。すなわち、滑り状態の発生は、倒立平衡点に向かうときの応答性と収束性の著しい改善として現われ、姿勢回復性能の向上に対する寄与が顕著である。

4・3 ロバスト性

4・3・1 荷重に対する応答 制御系のロバスト性

(a) Bird's-eye view

 (b) View from $+\hat{\theta}_p$ direction

Fig. 6 Trajectory of initial response with state feedback regime.

を調べるため、車体に質量を附加した状態での初期値応答実験を行ない、図7の結果を得た。図7(a)は、図中に付記した質量の錘を平行2輪車の重心付近に附加した場合の応答である。平行2輪車の質量とほぼ同じ1.5 kgの荷重に対しても、初期値応答波形に顕著な変化は見られない。図7(b)は、同様にして車体下部に錘を附加したときの応答である。車体下部に荷重することにより、重心位置や重心周りの慣性モーメントが大きく変動し、応答波形に変化が現われたが、この場合にも倒立平衡状態に到達し、安定姿勢を持続できた。したがって、構成した制御系は、実験装置の質量が2倍に変化するようなパラメータ変動に対してもロバストである。

図8は、制御則のみを状態フィードバック則に変更

(a) Weighting nearby the center of gravity

(b) Weighting on the bottom of body

Fig. 7 Initial responses under additional weighting.

して、同様の実験を行なったときの応答である。この場合には、荷重の増加とともにオーバーシュートが大きくなり、また倒立平衡点周りの振動を伴うため整定時間も長くなる。図7, 8を比較すると、重心付近に1.5 kg 荷重した場合、スライディングモード制御におけるオーバーシュート量は初期値の10%、状態フィードバック制御では初期値の75%である。車体下部への同量の荷重に対しては、スライディングモード制御で45%、状態フィードバック制御で100%のオーバーシュートを生じた。また、すべての荷重条件に対し、スライディングモード制御のほうが良好な過渡特性を示しており、車体質量や重心位置の変化に対してよりロバストである。

4.3.2 外力に対する応答 図9は、車体上部に左右から外力を加えたときの、平行2輪車の挙動を記

(a) Weighting nearby the center of gravity

(b) Weighting on the bottom of body

Fig. 8 Initial responses under additional weighting with state feedback regime.

録したものである。図中に矢印で示した時刻に、矢印方向の変位を与えるような外力を加えた。矢印の方向に生じた小さく鋭い変動が、外力を加えたことにより生じた外乱であり、これに続いて、逆方向の振幅が大きくややゆっくりとした姿勢回復応答が見られる。図に示した範囲では、外乱の大小にかかわらず、約2秒で安定姿勢を回復しており、外力の作用に対しても、平行2輪車の挙動はロバストである。

図10は、制御則のみを状態フィードバック則に変更して、同様の実験を行なったときの応答である。各状態は倒立平衡点に復帰する際、オーバーシュートを伴い、倒立平衡点近傍で振動していることがわかる。このような現象は、図9には見られず、スライディングモード制御のほうが、より良い整定特性を示す。

Fig. 9 Responses against push off from the stable position.

Fig. 10 Responses against push off from the stable position with state feedback regime.

以上の実験結果から、荷重による質量の増加や外力の作用に対しても、容易に安定姿勢を回復することができ、スライディングモード制御により、外乱に対してもロバストな制御系が構成された。

5. 結 言

本論文では、ステッピングモータにより駆動する平行2輪車の姿勢安定化に、ステップレートを操作量とする離散時間スライディングモード制御法を適用し、制御性能の評価ならびに検討を行なった。はじめに、初期傾斜角0.1 radからの初期値応答において、システムの状態が切換面の近傍に拘束され、切換面に沿った滑り状態が発生していることを確認した。次に、平行2輪車に、車体質量程度の質量を附加した場合の初

期値応答や、車体上部に外力を加えたときの姿勢回復応答から、構成した制御系の外乱に対するロバスト性を確認した。これらの結果から、開ループで駆動するステッピングモータをアクチュエータとして用いる動的システムにおいて、ステップレートを操作量とする閉ループ運動制御系が、離散時間スライディングモード制御法により安定化でき、構築した系は外乱に対してロバストな制御系であることが示された。

参考文献

- (1) 小島宏行, 池田真治, 田畑貴史, 計測自動制御学会論文誌, **26-4** (1990), 420-426.
- (2) 佐藤治, 下嶋浩, 李丁, 長友聖二, 機論, **60-572**, C (1994), 1344-1350.
- (3) 橋本豪之, 稲毛敏行, 對馬一憲, 機論, **60-572**, C (1994), 1358-1363.
- (4) 宮本宗徳, 橋本豪之, 對馬一憲, ロボティクス・メカトロニクス講演会'95 講演, **A** (1995), 342-345.
- (5) 佐々木啓介, 橋本豪之, 對馬一憲, 機論, **61-592**, C (1995), 4674-4679.
- (6) N.Hiraoka, and T.Noritsugu, Proc. 2nd Japan-France Congress on Mechatronics, **1** (1994), 7-10.
- (7) 平岡延章, 則次俊郎, 機論, **61-592**, C (1995), 4638-4645.
- (8) V.I.Utkin, IEEE Trans. Autom. Control, **AC-22** (1977), 212-222.
- (9) V.I.Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, (1992), Springer-Verlag.
- (10) 野波健蔵, 田宏奇, スライディングモード制御, (1994), コロナ社.
- (11) K.Furuta, Systems & Control Lett., **14** (1990), 145-152.

A. 付 録

式 (9) がリアプノフ関数の要件を満たすことは、切換ゲイン式 (10) を用いて以下の手順で証明される。

リアプノフ関数の候補 $V(x)$ を式 (9) より、

$$V(x) = \sigma(x)^2/2 \quad (A1)$$

とする。定義より、 $V(0) = 0$ 、切換面外では、 $V(x) > 0$ 、 $\|x\| \rightarrow \infty$ のとき $V(x) \rightarrow \infty$ となることは明らかである。したがって、

$$V(x(k+1)) < V(x(k)) \quad (A2)$$

が示されれば、式 (A1) はリアプノフ関数であり、リアプノフの安定定理によりシステムは漸近安定となる。

式 (A2) の関係は、以下の手順で導くことができる。まず、 $\Delta\sigma$ を次のように定義する (以下、 $\sigma(x(k))$ を $\sigma(k)$ と表す)。

$$\Delta\sigma(k+1) = \sigma(k+1) - \sigma(k) \quad (A3)$$

式 (A1)、(A3) を用いて、式 (A2) を変形すると、

$$\sigma(k) \Delta\sigma(k+1) < -\{\Delta\sigma(k+1)\}^2/2 \quad (A4)$$

となる。

式 (A3) は、式 (1)、(3)、(5)、(6) を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(k+1) &= S(A + bK_e - I)x(k) + SbK_d x(k) \\ &= SbK_d x(k) \end{aligned} \quad (A5)$$

となる (式(4),(5)より $Sx(k) = S(A + bK_e)x(k)$ であることに注意)。よって、式 (A4) の左辺は、 K_d と $x(k)$ を成分で表すことにより、以下のように変形できる。

$$\sigma(k) \Delta\sigma(k+1) = \sum_{i=1}^n \{(Sb) \sigma(k) x_i(k) K_i\} \quad (A6)$$

まず、少なくとも一つの i に対して $|Sb \sigma(k) x_i(k)| > \delta_i$ である場合を考える。式 (A6) に、式 (10) の切換ゲインを代入して、 $\delta_i > 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \sigma(k) \Delta\sigma(k+1) &< - \sum_{i=1}^n (\delta_i |K_i|) \\ &\leq - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i(k)| |x_j(k)| |K_i|^2 (Sb)^2/2 \\ &\leq - (Sb)^2 \left(\sum_{i=1}^n |K_i| |x_i(k)| \right)^2/2 \\ &\leq - \{\Delta\sigma(k+1)\}^2/2 \end{aligned} \quad (A7)$$

を得る。以上により、式 (A4) すなわち式 (A2) の関係が、式 (10) の切換ゲインにより満たされる。よって、システムの安定性が示された。

次に、すべての i に対して $|Sb \sigma(k) x_i(k)| \leq \delta_i$ である場合についても、文献(11)と同様の手順で証明できる。