剛体ブロック形構造物のロッキング振動 に関する基礎的研究*

鄭 萬 溶^{*1}, 鈴木 浩 平^{*2}

Basic Study on the Dynamic Behaviour of Rocking Rigid Body Structure

Man Yuong JEONG and Kohei SUZUKI

This paper deals with the experimental and analytical study of the rocking response of a free-standing block subjected to horizontal base excitation. Using blocks and base conditions of a plate without and with a slip-proof sheet, experiments were performed for both the free rocking and harmonic excitation tests. Experimental results of the rocking test are applied for evaluating the coefficient of restitution, which could be used to determine the reduction of angular velocity at the moment of impact between the body and the base. The coefficient of restitution obtained from the results of the free rocking test is used in the simulation. A piecewise-linearized equation is used for the numerical calculation by applying a newly developed algorithm to attain high accuracy. The results of the calculation are compared with those of the harmonic excitation test.

Key Words: rocking vibration, free rocking test, coefficient of restitution, stability diagrams

1. 結 言

剛体のロッキング振動に関する研究は1960年代から多くの研究者によって行われてきた^{(1)~(5)}。しかし、それらの研究のほとんどは主として非線形運動方程式の線形化による理論的解析に依存しているため、構造物の耐震設計など実設計に利用するには以下のような問題点がある。従来の多くの研究では、構造物とそのベースが剛体であり、滑り運動が起こらない程度の大きい摩擦力の作用を仮定して解析を行っている。しかし、すべての実在ブロック構造物のロッキング振動系がそのような安定した環境下にあるとは限らず、各種構造物固有の設置条件下においての剛体運動として解析する必要がある。そのためには異なった条件での挙動の変化を実験的に可能な限り詳細に検討し、ロッキング振動挙動を精細に把握することが必要となっている。ブロックのロッキング振動の実験的考察によって取られた特性は地震応答解析で必要となるロッキング振動系のモデル化にも役立つことになる。

1995年1月に生じた兵庫県南部地震では多くの建

築・土木構造物に被害が確認された。また、建築物内に設置されている冷蔵庫、書庫などの家具類、さらには生産企業における工作機械をはじめとする剛体構造物が転倒したり、移動したという報告も多く、この問題の重要性が改めて認識されている。

本論文は、上記の背景のもとに、主として剛体構造物の耐震設計法の確立を展望しつつ、剛体ブロックのロッキング挙動を解明する加振実験とそれにより得られた特性を述べたものであり、自由ロッキング振動実験と正弦波励振による強制ロッキング振動実験を行ってロッキング発生と転倒などの基本的挙動を把握することを目的としている。また、接触面での摩擦条件を変えるため、剛体ブロック設置表面にシート(sheet)を敷いた場合(以下シートあり)と敷かない場合(以下シートなし)の両条件下で加振実験を行い、応答特性の差異を考察する。これらの結果を剛体ロッキング運動の方程式から求めた応答解析結果と比較し、ロッキング応答の再現性や応答モードの分布などを評価した。

2. 水平入力を受ける剛体の ロッキング振動の基本式

本研究では、シートありとシートなしの両環境での

* 原稿受付 1995年9月22日。

^{*1} 正員, 東京都立大学大学院 (〒192-03 八王子市南大沢1-1)。

^{*2} 正員, 東京都立大学工学部。

実験応答と線形ロッキング運動方程式による解析応答を比較し実ロッキング系での非線形特性, すなわち, ロッキング系のモデリングに考慮すべき因子を調べるため, 一般化された線形ロッキング運動方程式を用いて応答解析を行う。図1に示すような最も基本的な剛体ブロックのロッキングについては, Spanos らにより運動方程式が与えられる⁽²⁾。これらをもとに, ロッキング応答解析用の方程式を以下に示す。

動的な加速度入力を $a_h(t)$ として, 図1の O と O' まわりのロッキング運動の方程式は

$$I_0 \ddot{\theta} + MR \cos(\psi \mp \theta) a_h(t) \pm MgR \sin(\psi \mp \theta) = 0, \theta \geq 0 \quad (1)$$

となる。ここで, 上側の符号は O' まわりのロッキング, 下側は O まわりのロッキングに対応する。 I_0 はブロックの慣性モーメントであり, $\psi = \cot^{-1}(H/B)$ である。ブロックとベースの衝突による角速度の変化は

$$\dot{\theta}(t^+) = r \dot{\theta}(t^-), 0 \leq r \leq 1 \quad (2)$$

となる。 r は反発係数であり, t^- と t^+ はそれぞれ衝突直前と直後の時刻である。また, r は反発係数である。基礎に加わる水平励振加速度,

$$a_h(t) = A g \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

がブロックに加わったときのロッキング振動発生条件を与える振幅は

$$A > \frac{\tan(\psi)}{\phi} \quad (4)$$

となる。ロッキング固有振動数 p は

$$p^2 = \frac{MgR}{I_0} = \frac{3g}{4R} \quad (5)$$

となる。ここで, 式(1)を一般化して線形化する。変数変換

$$\theta = \phi x, \tau = pt, \Omega = \omega/p \quad (6)$$

を行うと,

$$\ddot{x} - x \pm 1 = -A \cos(\Omega \tau + \phi), x \geq 0 \quad (7)$$

ここで, x は一般化角, τ は無次元時刻, Ω は無次元振動数である。

この運動方程式を初期条件 $x^+(t_0) = x_0, \dot{x}^+(t_0) = \dot{x}_0$

Fig. 1 Rocking of rigid block

で解くとブロックのロッキング応答を求めると,

$$x^\pm(t) = a^\pm \sinh \tau + b^\pm \cosh \tau \pm 1 + \beta \cos(\Omega \tau + \phi), x \geq 0 \quad (8)$$

ここで, a^+, b^+, a^-, b^- と β はそれぞれ次式で得る。

$$a^\pm = x_0 - \beta \cos \Omega \tau_0 \mp 1, \\ b^\pm = \dot{x}_0 + \Omega \beta \sin \Omega \tau_0 \quad (9)$$

$$\beta = \frac{A}{\Omega^2 + 1} \quad (10)$$

これらの方程式は応答解析に必要な基本式となる。

3. 実験

ブロック構造体のロッキングによる動特性を調べるため実験を行った。供試体と計測装置の概要を図2に示す。加振実験はシートなしの場合とシートありの場合の両条件下で行い, ブロックとベース間の摩擦係数と接触状態が応答に与える影響を調べた。シートは厚さ約1 mmの滑り止め用のラバーシートを用いた。

3.1 供試体 加振実験には通常気象庁震度階でV程度の地震で家具, 墓石などの自由支持の構造物の転倒がみられることから $g/4$ (約250 Gal) を転倒開始条件として目安にするため, 幅 $B=50$ mm, 高さ $H=200$ mm, 奥行 $L=100$ mmの寸法形状のS55Cブロックを製作した。ブロックの重さ W は7.81 kgfであり, 大きさを決める寸法 R は103.1 mmである。形状角 ψ (ブロックの縦横寸法比に関する角) は0.245 rad (14.04°)である。これらの値を式(6)に代入するとロッキング振動数 p は8.45となる。

3.2 計測装置 加振実験では, 図2のようにブロックの頂部に加速度計を取付けてその加速度を計測する。また, ベースプレートから26 mmと69.5 mmの高さにそれぞれレーザ変位計A, Bを設置し, おおのの水平変位を計測する。

Fig. 2 Outline of measuring system

ブロックの回転変位角は二つのレーザ変位計から計測された水平変位から

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d_2 - d_1}{h} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{d}{h} \right) \dots\dots\dots (11)$$

のように計算される。二つのレーザ変位計の間には図2に表されているようにレーザ光遮断膜を設けてレーザ光の干渉による誤差発生を防ぐ。この計測装置を含む実験装置の構成概要を図3に示す。

3.3 自由ロッキング振動実験 ここでいう自由ロッキング振動実験とは、弦を用いてブロックに初期回転変位を与え、その弦を切ることによってロッキングによる自由振動を発生させることをいう。

図4の実線と点線はそれぞれシートなしの場合とシートありの場合の自由振動実験結果である。図4に示されているようにブロックのロッキング振動は特定の固有周期をもたずロッキング周期が振幅減少とともに短くなる振動となる。自由ロッキング振動実験の結果からベースの性質による減衰効果の有無を調べるため、Housnerにより与えられた剛体ロッキング振動の振幅と周期との関係式を用いる⁽¹⁾。

$$T = \frac{4}{p} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 T は周期であり、 p はブロックの固有振動数、 x は一般化角変位である。ロッキング周期と振幅に対

Fig. 3 Set up of experimental equipments

Fig. 4 Results of Free rocking experiment

する実験と理論式の比較結果の一例を図5に示す。ここで、実線はHousnerによる十分大きい摩擦を前提とする理想環境上のブロックのロッキング振幅と周期の関係である⁽¹⁾。

図5からシートなし、シートありの条件にかかわらずロッキング振幅と周期の間には一定の関係があることが明らかになった。

ここでは、ロッキング振動エネルギーの損失は、ブロックがベースに衝突する瞬間に消散するエネルギーのみと考えられる。すなわち、ブロックとベースの衝突はブロックのロッキング固有周期に影響しないことがわかる。

3.4 強制ロッキング振動実験 強制ロッキング振動実験では、5 Hz から 10 Hz までの範囲で 1 Hz 刻みに振動数を変え、正弦波を用いブロックがロッキングを開始する振幅から転倒に至る振幅まで徐々に振幅を増加しながら加振実験を行う。しかし、本実験では、9 Hz と 10 Hz の比較的高域振動数では、加振機の性能上、ブロックが転倒に至るまでの入力レベルでの加振が不可能であったため、加振可能な振幅範囲で励振した。入力波形の一例を図6に示す。

3.4.1 ロッキング振動モード 強制ロッキング振動を考察する際、ロッキング振動モードに対する理解が必要なため、ここでロッキング振動モードについて説明しておく。

ロッキング振動モードは通常、 (m, n) モードのような表現を使うが、 (m, n) モードとは、入力が n 周期分加わったときに応答が m 周期分励起されるロッキン

Fig. 5 Relation between rocking period and angle

Fig. 6 Excitation Force
($Amp=0.88g$, $\omega=7$ Hz)

Fig. 7 (1, 1) Rocking mode
($Amp=1.28g$, $\omega=4.23$)

Fig. 8 (1, 3) Rocking mode
($Amp=3.67g$, $\omega=11.6$)

Fig. 9 Forced rocking responses excited by 7 Hz
(without-sheet)

Fig. 10 Forced rocking responses excited by 10 Hz
(without-sheet)

グ定常応答の形態である。図7と8はそれぞれロッキング応答解析から得られた(1, 1)モードと(1, 3)モードの一例である。ここで、右の図は応答1周期分に対する位相図であり、図中の点はPoincareの点といい、入力加速度が零のときの応答を位相図に示した点である。

3・4・2 シートなしの場合の実験結果 シートを敷かない状態での強制ロッキング振動実験の結果から最も特徴的な例を次の図9と10に示す。図9では、(1, 3)モードのロッキング応答領域で定常応答を示さ

Fig. 11 Forced rocking responses excited by 7 Hz
(with-sheet)

Fig. 12 Forced rocking responses excited by 10 Hz
(with-sheet)

Fig. 13 Reappearance of rocking response
(Excitation Frequency, without-sheet)

Fig. 14 Reappearance of rocking response
(Excitation Frequency, with-sheet)

Fig. 15 Reappearance of rocking response
(Excitation Frequency, with-sheet)

ず、入力が 1.40 g の時系列のように、本来の (1, 1) モードの応答より長い過渡応答をもった (1, 1) モードの応答になるか、または、入力 1.15 g のように不安定な応答を示す。このときの状況を詳しく観察すると、ブロックとベースが衝突する瞬間に回転中心であるブロックの端での並進力が双方間の摩擦より大きくなり滑り運動が生じてロッキング応答が安定しないことに対応している。図 10 の 10 Hz の応答では比較的安定した (1, 3) モードのロッキングが見られるが、全体的に非対称で不安定な応答になっている。

3・4・3 シートありの場合の実験結果 シートを敷いた状態での加振実験結果では、シートなしの場合に比べて摩擦が大きくなっている。したがって図 11 と 12 に示すように広い励振振幅領域で比較的安定した (1, 3) ロッキングモードを示す。図 11 の場合には図 9 のシートなしの実験結果より小さい励振振幅でブロックは転倒している。このことは、高励振振幅ではシートの特性がブロックのロッキング応答にかなりの影響を与えていることを意味する。すなわち、励振振幅の増加に伴いブロックの衝突時、ブロックとベースの間に発生するインパルス力も大きくなり、それが応答に大きく影響していると考えられる。

3・4・4 応答再現性評価による考察 この項では、同一励振振幅による加振実験結果を比較することによりブロックのロッキング応答再現性評価を行う。シートなしの実験結果では、図 13 に示されているように応答の再現性が悪くなっている。このことから、シートなしの場合には、ブロックとベースの間の摩擦力が小さいため、かなり激しい滑り運動が生じていることがわかる。また、シートなしの場合には応答再現性が悪いため、実験結果からブロックの厳密な転倒条件を定めることが難しくなる。図 14 と 15 の振動波形からは、シートありの実験結果では応答の再現性が非常によくなっているが励振振動数 10 Hz 、励振振幅 1.28 g の場合の応答再現性が悪くなっていることが明らかであり、その付近が滑り運動の境界領域であると考えられる。

4. 応答解析

理想環境上のロッキング応答と実ロッキング系のロッキング応答の差異点を調べ、モデリングに考慮すべき因子を探るため、ここでは、一般化ロッキング運動方程式を用いた応答解析を行う。応答計算では、第 2 章の式 (2) と (9)、(10)、式 (11) のロッキング応答式を用いる。

4・1 ブロックの自由ロッキング振動 ブロック

の自由ロッキング振動はブロックとベースの衝突による断続的なエネルギー散逸により振幅とともにロッキング振動周期も減少していく非線形振動である。その自由ロッキング振動計算には次式を用いる。

$$x^{\pm}(\tau) = a^{\pm} \sinh(\tau) + b^{\pm} \cosh(\tau) + s \quad \cdots \cdots (13)$$

また、初期条件式は次のようになる。

$$a^{\pm} = x_0 - s, \quad b^{\pm} = \frac{\dot{x}_0}{p} \quad \cdots \cdots (14)$$

ここで、 s は符号変数であり、プラス側の計算では 1 となり、マイナス側の計算では -1 になる。

4.2 シミュレーションによる反発係数の計算

ブロックがロッキング振動するときにブロックとベースの衝突の評価は最も重要な問題の一つである。本研究では自由振動実験結果から滑りによる並進変位はほとんど生じなかったため、並進変位を無視し衝突時の角速度の変化による運動エネルギーの変化だけを考慮することにする。つまり、反発係数は式(13)と(14)、式(2)を用いて自由ロッキング振動実験結果の時刻列に近似するまで r の値を変えながら自由ロッキング振動の応答計算を行い、最もよく近似する値 r を各々のシステムの反発係数とする。これまでの研究では、理論値をもとに反発係数を理想系での 0.925 と仮定し、応答解析にはその値を用いている⁽²⁾⁽³⁾。しかし、実在系での反発係数は、おのおののロッキング振動系の特性により大きく変わり、またそれはロッキング応答や安定条件に大きく影響する。この特性を調べるために自由ロッキング振動の数値シミュレーションを行う。シミュレーション結果を図 16 と 17 に示す。ここで、

定められた反発係数の値はシートありの場合に 0.957 であり、シートなしの場合には 0.927 である。この結果からシートありの場合にはシートの弾性の影響で回転変位の小さい領域では若干ずれているが、反発係数は 0.957 に近い値であるとして応答解析にはその値を用いている。

4.3 強制ロッキング振動応答解析

数値解析では、ロッキング自由振動実験結果に基づいて定められた反発係数を用いる。線形運動方程式からの応答は式(15)のプラス側の応答式とマイナス側の応答式を切換えながら計算する。

$$x^{\pm}(\tau) = a^{\pm} \sinh(\tau) + b^{\pm} \cosh(\tau) + s + \beta \cos(\Omega \tau + \phi) \quad \cdots \cdots (15)$$

この応答計算に用いる初期条件を含んだ係数は次式で定められる。

$$a^{\pm} = x_0 - \beta \cos \Omega \tau_0 + s \quad \cdots \cdots (16)$$

$$b^{\pm} = \dot{x}_0 + \Omega \beta \sin \Omega \tau_0 \quad \cdots \cdots (17)$$

符号変数 s の切換えの際、衝突直後の速度 $\dot{x}(\tau^+)$ は次式で計算される。

$$\dot{x}(\tau^+) = r \dot{x}(\tau^-), \quad r = 0.927, 0.957 \quad \cdots \cdots (18)$$

解 $x^+(\tau)$ と $x^-(\tau)$ に相当する係数 a^+, b^+ と a^-, b^- は初期値 $x(0)$ と $\dot{x}(0)$ によって定められる。解 $x(\tau)$ は $x^+(\tau)$ と $x^-(\tau)$ の切換えによって得られるので、解 $x(\tau)$ の符号が変化する部分を 5 段階に分け $d\tau/10$ 刻みで切って解 $x(\tau)$ が零になる時刻を捜す。その時刻 τ での衝突速度は $\dot{x}(\tau^-)$ であり、 τ^+ は τ^- と同じである。衝突直後の速度 $\dot{x}(\tau^+)$ は衝突する直前の速度 $\dot{x}(\tau^-)$ と反発係数 r の積で計算される。 τ^+ で運動方

Fig. 16 Free rocking simulation result (without sheet)

Fig. 17 Free rocking simulation result (with sheet)

Fig. 18 Comparison of experimental and analytical result [(1,1) mode, without-sheet, Excitation force]

Fig. 19 Comparison of experimental and analytical result [(1,3) mode, without-sheet, Excitation force]

Fig. 20 Rocking response mode diagram for experiment (with-sheet)

Fig. 21 Rocking response mode diagram for analysis (with-sheet)

程式の切換えが行われるが、そのときの初期条件は $x(\tau^+) = 0, \dot{x}(\tau^+)$ となる。この計算過程はブロックが転倒するか、調和運動になるまで続ける。計算に用いた無次元時間間隔は 0.02 である。また、一般化ロッキング応答 $x(\tau)$ が 1 を超えるとブロックは転倒されたと考えて計算を中断する。

5. 実験結果と解析結果の比較による考察

図 18 と 19 はそれぞれ励振周波数 8 Hz での (1, 1) モードと (1, 3) モードの比較結果である。ただし、両図はシートなしの場合の実験結果と解析結果の比較であり、比較的滑りが小さく安定した実験結果を用いて比較を行った。また、シートありの場合の強制振動実験結果は、シートの弾性の影響を受けるため、解析結果との良好な近似は得られなかった。また、シートな

しの実験ロッキング応答は再現性が悪く、(1, 3) モード領域で定常応答を示した応答時刻歴が少ない。

したがって、ここではシートありの場合の実験結果と解析結果の応答モード分布図を書いて評価することにする。ここでいう応答モード分布図とは、それぞれの入力振幅と周波数に対する応答の形態を示したもので、線形化による応答誤差を無視すれば、これによって解析と実験の比較により衝突時のブロックの滑り運動がロッキング系の応答に与える影響を考察することができる。図 20 と 21 はシートありの場合の実験と解析結果によるものでおのの周波数と振幅に対するロッキングモードを表した図である。両方の比較では、まずシートなしの場合とは異なってロッキング開始振幅が実験では解析より下まわっていることがわかる。これはベースに滑り止め用のシートを敷いたため、そのシートの弾性によってシートからインパルス力を受け解析より低い励振振幅でロッキングが開始されているためである。また、実験結果は解析結果と多少異なったモード分布を示していることがわかる。このこともシートからのインパルス力によるものと考えられる。そして、上の二つの図による実験と解析の比較でもっとも特徴的なものは、実際の系では高い周波数と振幅領域で実験の方が解析よりかなり小さい振幅領域で転倒してしまうことである。これは高励振振動数、高振幅領域でブロックとベースの間にかなり激しい滑り運動が生じていることが原因であると考えられる。以上のことから、ロッキング振動系のモデル化やブロック形構造物の耐震設計において最も注目すべきことはブロックの設置環境やブロックとベースの衝突による非線形性であると考えられる。

6. 結 論

本研究では、ブロック形構造物のロッキング振動に対し、耐震設計の視点から、シートなしとシートありの二つの環境下の最も基本的なロッキング振動系を対象として、自由振動実験と正弦波励振による強制振動実験およびロッキング系の線形化による応答解析を行い、反発係数、応答時系列、モード分布などに基づいた両者の比較考察により次のような結論を得た。

(1) シートなしおよびシートありの自由ロッキング振動実験とそのシミュレーションの結果から、ベースの弾性、つまりブロックとベース間のインパルス力によって反発係数が理論値より大きくなっている。しかし、このことはブロックのロッキング固有周期に影響しない。

(2) 剛体ブロックのロッキング振動では、励振入

力の周波数が高く、また、振幅も大きいときロッキング応答が不安定になり、解析から得られた転倒条件に比べてかなり小さい励振振幅条件でブロックは転倒に至る。

(3) シートなしの低励振振幅での実験ロッキング応答と解析ロッキング応答はよく対応しているが、高励振振幅では、ブロックとベースの衝突時の非線形現象によって実験結果と解析結果は一致しない。

今後は、実際のブロック構造物がもつさまざまな固有の環境を厳密に把握し、摩擦力、インパルス力などの影響を考慮したモデルを作り、ブロック構造物の耐震設計上必要となる転倒条件を求めていく所存である。

なお、本研究を進めるにあたり東京都立大学機械工学科の吉村卓也教授および三森友彦、渡辺鉄也の両氏

に数々の助言をいただいた。ここに深く感謝する。

文 献

- (1) Housner, G. W., The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes, *Bulletin of the seismological society of America*, **53**-2, (1963), 404-417.
- (2) Spanos, P. D. and Koh, A. S., Rocking of rigid blocks due to harmonic shaking, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, **110**-11 (1984), 1627-1642.
- (3) Solomon, C. S. Yim and Huan Lin, Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects, *J. Eng. Mech.*, **117**-9 (1991), 2079-2100.
- (4) Hogan, S. J., On the dynamics of rigid-block motion under harmonic forcing, *Proc. R. Soc. Lond. A* **425**, (1989), 441-476.
- (5) Yim, C. S., Chopra, A. K. and Penzien, J., Rocking response of rigid blocks to earthquakes, *Earthquake Engrg. Struct. Dna.*, 8-6 (1980), 565-587.