二つの鉄道車輪とレールの連成振動系に発生する 接触力変動について*

柳 允 善^{*1}, 嘩 道 佳 明^{*2}
須 田 義 大^{*2}, 大 野 進 一^{*2}

Contact Force Fluctuation Generated by Coupled Vibration System of Two Wheels and Railway Track

Yunseon RYU, Yoshiaki TERUMICHI,
Yoshihiro SUDA and Shinichi OHNO

Corrugation is a phenomenon in which periodical undulation is formed on a railway track by wheels running on it. One of the principal causes is the contact force fluctuation at the contact point between the wheel and railway track, which is generated by coupled vibration. In this study, contact forces between wheels and railway track are calculated using a model in which two masses move on an elastically supported beam and Hertz's contact elasticity between wheels and railway track is taken into account. As a result, it is shown that the ratio of the contact force of the trailing wheel to that of the leading wheel can be smaller or larger than unity and is uniquely determined by the relative contact position index introduced by us.

Key Words: Coupled Vibration, Vibration of Moving Body, Vibration of Continuous System, Railway, Modeling

1. は じ め に

レール上を鉄道車両が走行する際、車輪とレールの間に生じる連成振動が、車輪・レール間の接触力変動を引き起こす。この接触力変動は、レール上の波状摩耗の発生に密接に関係すると考えられる⁽¹⁾。

波状摩耗は、レールの表面に波状の規則的な圧こんが発生する現象であり⁽²⁾、騒音と振動の大きな原因となること、レールの保守管理に悪影響を与えることなどからも回避すべき問題である。しかしながら、車輪とレールからなる振動系は、移動質量と弾性支持はりと連成振動系であり、その解析は極めて複雑となるため、波状摩耗の発生および成長のメカニズムは十分な説明がなされているとはいえない。

この問題の研究としては、波状摩耗の発生および成長に関して、剛体モデルを用いて円筒接触系において基礎的な検討がなされている⁽³⁾。また、レールを無限はりとして考え、その上を車輪の慣性力が周期的外力として移動する際のレール・車輪間の接触力変動が調べられている⁽⁴⁾。さらに、鉄道における走行車両を用

いた実験的検討もなされている⁽⁵⁾。これらの従来の研究では、車輪の振動を単純な外力に置き換えるなどの系の簡略化が試みられているが、いずれも一つの車輪とレールとの連成振動を解析対象とした検討に止まっている。また、実験的検討においても、車輪とレールの接触点の振動を車輪の走行に追従して測定することは困難で、波状摩耗の発生要因を特定するには至っていない。

ところで実測結果において、2軸台車の前輪によって引き起こされた振動と後輪によって引き起こされた振動では、その大きさに差異が見られ、両輪の相互作用の影響があることが推察される。台車とレールからなる振動系の主たる特徴は、二つの車輪が非常に短い時間間隔でレール上を引き続いて通過する点にあり、振動が十分減衰しない間隔で通過する車輪の振動が、互いに影響を及ぼしあうことは考慮すべき点であろう。しかしながら、この影響に関する議論は目下のところ行われていないようである。

著者らはすでに、一つの車輪とレールとの連成振動解析のための解析モデルを構築し、これより導いた運動方程式を用いて得られた系の動的挙動を実測結果と比較することにより、その有効性を検証した⁽⁶⁾。そこで本報では、上述した車輪間の相互作用下における接

* 原稿受付 1996 年 5 月 20 日。

^{*1} 東京大学大学院 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

^{*2} 正員、東京大学生産技術研究所。

接触力変動についての基礎的知見を得ることを目的として、2軸台車の前、後輪、および枕木に支持されるレールからなる系を解析対象とし、これを二つの移動質量・接触ばね系と弾性支持はりとの連成振動系としてモデル化する。そして、数値シミュレーションにより、二つの車輪が走行する際の、後輪における接触力変動に着目する。またこのとき、この接触力変動の特徴の指標となる指数を新たに提案する。

2. 解析モデルと運動方程式

2.1 解析モデル 枕木に支持されるレール上を二つの車輪が一定の間隔を隔てて走行する際の連成振動解析のために、レールを弾性支持されるはりとしてモデル化する。はりは、一様断面で、自重の影響を無視し、上下振動のみを考える。また、はりはせん断変形と回転慣性を無視するオイラーはりとし、曲げ剛性 EI 、断面積 A 、単位長さ当たりの質量 ρA 、粘性減衰係数 c を有するものとする。枕木は粘性減衰係数 c_s 、剛性 k_s 、間隔 l_s の支持部として考える。一方、レール上を走行する二つの車輪は、二つの移動質量・接触ばね系として、台車の質量を含む前輪、後輪の等価質量をそれぞれ m_1, m_2 とする。二つの車輪は間隔 l_w で、一定な速度 V で走行すると考える。また、車輪とレールとの間の接触ばねとしては、Hertzの接触剛性 k_w のばねと粘性減衰係数 c_w の減衰が並列に入っているものとする⁽⁷⁾。以上のようにモデル化した車輪・レール系の連成振動モデルを図1に示す。

ここで、レールの長さについては、両端の境界条件の影響が無視できる十分な長さを考えるものとし、レールの上を車輪が走行する際の動的効果の影響が及ぶ範囲を考慮して、枕木24区間分の長さ ($L=15$ m) を取扱う。

2.2 運動方程式 解析モデル図1において、レ

Fig. 1 Coordinate system and analytical model of two wheels-railway track system

ールの無負荷時の状態からの鉛直下向きのたわみを $u(x, t)$ とする。また、二つの車輪の変位 $y_1(t), y_2(t)$ は、それぞれの車輪の静的平衡状態からの下向きの変位とする。ここで、 x はレールの軸方向の位置、 t は時間である。このとき二つの車輪とレールとの相互作用を考慮した運動方程式は、次のように表される。

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = G - P - M \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + c_w \frac{dy_1(t)}{dt} + k_w y_1(t) = Q \quad \dots\dots (2)$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_w \frac{dy_2(t)}{dt} + k_w y_2(t) = R \quad \dots\dots (3)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$ を Dirac のデルタ関数として、

$$P = \sum_{i=1}^n \left\{ c_s \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k_s u(x, t) \right\} \delta(x - x_i) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$G = m_1 g \delta(x - x_{k1}) + m_2 g \delta(x - x_{k2}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$M = m_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} \delta(x - x_{k1}) + m_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} \delta(x - x_{k2}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$Q = \left\{ c_w \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k_w u(x, t) \right\} \delta(x - x_{k1}) \quad \dots\dots (7)$$

$$R = \left\{ c_w \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + k_w u(x, t) \right\} \delta(x - x_{k2}) \quad \dots\dots (8)$$

ここで、 n は枕木の個数、 x_i は枕木の位置である。前輪、後輪とレールとの接触点をそれぞれ x_{k1}, x_{k2} とする。レールの境界条件は両端が枕木によって支持されるものとして、次のように表される。

$$EI \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^3} = k_s u(0, t),$$

$$EI \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^3} = -k_s u(L, t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$EI \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(1)はレールの運動方程式であり、右辺には車輪の重力と慣性力が外力として作用している。式(2)、(3)は、それぞれ、前、後輪の運動方程式であり、車輪には、レールの復元力が外力として作用する。ここで、前輪と後輪の間には直接的な力の作用はないが、式(7)、(8)に示されるようレールの振動を介して相互に作用する。

なお、以後に示す数値解析に当たっては、Duhamel 積分と Runge-Kutta 法を適用し解を求めた。

3. 走行中の車輪・レール系の連成振動と接触力の変動

本章では、数値シミュレーション結果を用いて、二つの車輪における接触力変動を検討する。そのため

に、まず車輪が通過する際のレールの振動について二つの特徴的な現象を指摘する。後述するように、これらの現象は、車輪とレールとの接触力変動の説明のために重要な役割を果たす。次に、この知見の下に、接触力変動の特徴を示す指標となる指数を提案し、さらに、この指数を用いて後輪の接触力変動の特徴を明らかにする。

なお、数値シミュレーションでは、表1の諸元を用いた。したがって、二つの車輪間隔は、四つの枕木区間にまたがっている。これらは、ある実際の鉄道における車両、レール系の諸元に大抵対応している。

3・1 レールの振動 図2は、まず一つの車輪が、解析している24区間のうち12～14番めの区間を通過する際のレールの振動を示している⁽⁶⁾。ここで、観測点は13番めの区間における、(a)進行方向後方の枕木上、(b)枕木区間の中央、(c)進行方向前方の枕木上の各点である。図2で、縦軸は観測点(a)、(b)、(c)でのレールの振動加速度であり、横軸は時間である。なお車輪は一定速度で通過しているため、この時

間は、車輪がレールと接触する位置に相当している。図中線①は、図上部に示した枕木の位置に対応しており、図では枕木3区間についてのみ表示している。この図より、車輪が枕木区間の中央を通過した後、レール各点の振動がほぼ同時に最大となることが示される。また、振動のようすは各点ともほぼ同じである。すなわち、レール上で観測される振動が大きくなるのは、車輪が支持点上にあるときでも観測点上を通過するときでもなく、車輪が支持部区間の中央を通過した後であることがわかる。

図3は、観測点を、図2における(b)点として、二つの車輪が走行する際のレールの振動を示している。(a)、(b)は、車輪間の距離をそれぞれ、1.875 mおよび1.925 mとしたときのシミュレーション結果を示す。これらの車輪間距離はそれぞれ後述の式(11)の $\eta=0$ および $\eta=8$ に相当しているものである。図3の縦軸はレールの振動加速度であり、横軸は時間である。図3で、時間的に先に顕著になる振動①は、前輪が観測している枕木区間を通過する時に生じる振動で

Table 1 The principal data for calculation

EI	Flexural rigidity of a rail	4.03 MNm ²
m_r	Mass of a rail	50.47 kg/m
A	Sectional area of a rail	6.4x10 ⁻³ m ²
I	Principal moment of inertia of area of a rail	1.96x10 ⁻⁶ m ⁴
l_s	Distance between sleepers	0.625 m
k_s	Stiffness of a support spring	0.68 MN/m
c_s	Damping coefficient of support	5 kNsec/m
k_w	Stiffness of a contact spring	2000 MN/m
c_w	Contact damping coefficient	51 kNsec/m
m	Effective mass of a wheel	349 kg
V	Moving velocity	37,47,57km/h
l_w	Distance between wheels	1.75~2m

Fig. 2 Vibration responses of railway track

(a) Vibration response at mid-point of railway track for decreasing case ($l_w=1.875$ m)

(b) Vibration response at mid-point of railway track for increasing case ($l_w=1.925$ m)

Fig.3 Vibration response at mid-point of railway track under two wheels

あり、ある時間を経て再び顕著になる振動②は後輪が同じ枕木区間を通過するときに生じる振動である。これらの結果により、レールの振動が、後輪通過時のほうが前輪通過時より小さくなる場合と、後輪通過時のほうが大きくなる場合とがあることがわかる。ただし、両図に示されるように、前輪の振動はともにだいたい等しく、後輪の振動は前輪の振動に影響を与えないことが推察される。

上述した二つの知見は次章以降で車輪とレールの接触力変動を検討する際に考慮される系の振動現象の特徴である。

3.2 相対接触位置指数 前述した図3に示された数値シミュレーション結果からも、前、後輪の接触力変動がどのような要因に支配されるかを検討することは興味深い。3.1節で述べたように、レール上各点の振動は、車輪が枕木区間の中央を通過するたびに顕著になるが、二つの車輪が通過する際にはこの両者の相互作用があると考えられるからである。

そこで本節では、同時刻における前、後輪のレール上の位置、すなわち支持される枕木1区間についての相対的な位置に着目する。このためにまず、以下のような二つの車輪の枕木1区間上における相対的位置を

示す指標を導入する。

$$\eta = \frac{(l_w - l_s \times n)}{l_s} \times 100, \quad -50 \leq \eta \leq 50 \quad \cdots (11)$$

ここで、図1に示すように、 l_s は枕木の間隔、 l_w は車輪の間隔であり、 n は整数である。ここに示した η を、相対接触位置指数と呼ぶことにする。相対接触位置指数は、枕木間隔と二つの車輪の間隔から決定され、前輪がレールの枕木の真上に位置している時、相対的に後輪が枕木の位置からどの程度離れて位置しているのかを表す。したがって、前輪および後輪がともに枕木の位置にあるとき、相対接触位置指数は零になる。

図4は、この相対接触位置指数 η と、前、後輪における最大接触力の比の関係を示している。なお、接触力は、車輪・レール間に介した接触ばねが受ける力として、次の式で与えられる。 f_{lead} , f_{trail} はそれぞれ、前、後輪の接触力である。

$$f_{lead} = c_w \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{dy_1(t)}{dt} \right\} \delta(x - x_{k1}) + k_w \{ u(x, t) - y_1(t) \} \delta(x - x_{k1}) \quad \cdots (12)$$

$$f_{trail} = c_w \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{dy_2(t)}{dt} \right\} \delta(x - x_{k2}) + k_w \{ u(x, t) - y_2(t) \} \delta(x - x_{k2}) \quad \cdots (13)$$

図4に示されるように、相対接触位置指数 η によって、前輪の接触力と後輪の接触力の大小関係が規則的に変化することが示され、二つの車輪がレールと接触する相対的な位置と接触力との間に密接な関係があると考えられる。特に、相対接触位置指数 η が零であるとき、後輪の接触力は最小になる。

図4(a)では、37, 47, 57 km/hの三とおりの走行速度について、また図4(b)では、0.48, 0.68, 0.84 MN/mの三とおりの枕木剛性についてのシミュレーション結果を示しているが、このような範囲では、ここで示した相対接触位置指数 η に対する接触力変動の大小関係の推移は常に成り立つことがわかる。な

(a) Maximum contact force ratio versus relative contact position index for variation of traveling speed

(b) Maximum contact force ratio versus relative contact position index for variation of sleeper stiffness

Fig. 4 Maximum contact force ratio versus relative contact position index η

Fig. 5 Frequency difference versus relative contact position index η

お、枕木剛性は表1の値を中心に $\pm 30\%$ 増減したものである。

3.3 接触力変動についての一考察 図4に示した接触力の大小関係の規則的な変化は、その周期性に特徴がある。しかしながら、解析対象が連続体であることや、車輪通過時の過渡応答であることなどから、この機構を厳密に解明することは難しい。本節では、その周期性の要因を検討することを試みる。

図5は接触力が最大となるとき、車輪・レール系の連成固有振動数と車輪・接触ばね系のみの固有振動数の差と、相対接触位置指数 η との関係を示したものである。固有振動数の計算については、既報⁽⁶⁾に示した解析的導出方法を用い、さらに、二つの車輪を考慮にいった。図4の結果と比較検討すると、車輪・レール系の固有振動数が、車輪・接触ばね系の固有振動数に近いとき、接触力は前輪のほうが大きくなり、一方、離れているときには、接触力は後輪のほうが大きくなるという規則性が指摘される。図4および5に示される相対接触位置指数 η に対する規則性はほぼ一致している。これより、車輪・レール系の固有振動数が、車輪・接触ばね系のみの固有振動数に近づくことにより車輪の振動が吸振器的な役割を果たし、結果的に図4に示される接触力変動の傾向が生じたと考えられる。

4. おわりに

本報では、鉄道レール上に発生する波状摩耗の支配的な要因の一つと考えられる車輪・レール間の接触力変動について、より厳密な知見を得るために、二つの移動質量・接触ばね系と弾性支持はりとの連成振動モデルを用いて数値的解析を行った。特に、前、後輪とレールの振動の相互作用において、前輪での接触力変動に対する後輪での接触力変動の大きさに着目し、以下の結論を得た。

(1) 前、後輪が走行するとき、前輪から後輪に与える振動の影響は認められるが、後輪から前輪に与え

る振動の影響はほぼ無視できる。

(2) 後輪における接触力の最大値は、前輪と後輪がレールと接触する点の枕木に対する相対的位置に依存する。

(3) 相対接触位置指数を導入すると、前、後輪の接触力の最大値の比は、車速、枕木剛性が変化しても、相対接触位置指数によってほぼ一義的に決められる。

(4) 相対接触位置指数が零であるとき、すなわち前、後車輪の間隔と枕木間隔が整数倍の関係にあるとき、後輪の接触力が最小になる。

(5) 車輪・レール系の固有振動数と相対接触位置指数との関係は、前、後輪の接触力の最大値の比と相対接触位置指数との関係に類似しており、これにより、車輪の振動が吸振器的な役割を果たしていることが推察される。

文 献

- (1) Grassie, S. L. and Kalousek, J., Rail corrugation: characteristics, causes and treatments, *Proceedings of IMechE*, vol. 207(1993), 57-68.
- (2) Thompson, Wheel-rail noise generation, part I: introduction and interaction model, *J. Sound Vib.*, **161**-3 (1993), 387-400.
- (3) 須田義大・井口雅一・今泉博英, コルゲーションの成長・減衰機構の研究(第2報, 理論解析), *機論*, **54**-499, C(1985), 544-551.
- (4) Grassie, S. L., Gregory, R. W., Harrison, D. and Johnson, K. L., The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation, *J. Mech. Eng. Sci.*, **24**-2(1982), 77-90.
- (5) Clark, R. A., Dean, P. A., Elkins, J. A. and Newton, S. G., An investigation into the dynamic effects of railway vehicle running on corrugated rail, *J. IMechE*, **24**-2 (1982), 65-76.
- (6) 柳允善・曙道佳明・須田義大・大野進一, 接触剛性を考慮した車輪・レール系の連成振動解析モデルについて, *機論*, **62**-603, C(1996), 4147-4152.
- (7) Roark, R. J. and Young, W. C., *Formulas for Stress and Strain*, 5th Ed., (1975), 517, McGraw-Hill.
- (8) 柳允善・曙道佳明・須田義大・大野進一, 移動質量・接触ばね系と弾性支持梁の連成振動解析, *生産研究*, **47**-10 (1995), 71-75.