有限要素法と線形計画法を用いた三次元構造薄肉平歯車の
歯面荷重および接触応力の解析法*石 田 武^{*1}, 李 樹 庭^{*2}A Method for Analyzing Tooth Load Distribution
and Contact Stress of a Thin Wall Spur Gear
Using FEM and a Mathematical Programming Method

Takeshi ISHIDA and Shuting LI

A method for the analysis of load distribution and contact stress on tooth faces of a thin wall spur gear are proposed by combining a mathematical programming method with the three-dimensional finite element method (3D-FEM). A program that can be used to carry out tooth load calculation for a sophisticated gear structure with a personal computer is developed. The main procedures of the method are as follows: Firstly, the region on tooth faces surrounding the geometrical contact line which are fairly larger than the theoretical region calculated by the Hertzian's contact theory, is defined as a assumed contact face, secondly, reference points on the assumed contact face are taken on each gear, thirdly, influence coefficient on each reference point is calculated by 3D-FEM, lastly tooth load on each reference point is calculated by the mathematical programming method. The contact stress transformed from the tooth load is well agreed with the theoretical one for a thick gear. Furthermore, strains calculated on the compressive side of the tooth root of the thin wall gear are well agreed with the measured ones.

Key Words: Gear, Spur Gear, Contact Problem, Thin wall Gear, Tooth Load Distribution, Contact Stress, Mathematical Programming Method, Finite Element Method

1. 緒 言

歯車減速機の軽量化のために、歯車自体の軽量化が望まれ、とりわけ、航空機の動力伝達用歯車には、歯車のリムやウェブの薄肉化が強く望まれている。歯車の強度に関しては各部の曲げ応力や歯面接触応力が問題となり、このために歯面荷重の分布を解明することが重要である。厚肉歯車については、歯車の接触線上のたわみ影響係数を理論的に求めて、Fredholm 積分方程式を用いることにより、歯面荷重分布を求めることが多い^{(1)~(4)}。薄肉ウェブ・リム歯車(以下、薄肉歯車とする)については、構造が複雑であり、歯車全体が三次元的な変形をするため、たわみ影響係数を理論的に求めることが容易でなく、このため、Fredholm 積分方程式で歯面荷重分布を求めることが簡単ではない。

一方、Conry と Seireg⁽⁵⁾ は弾性体の接触を多数の点の接触として離散的に取扱い、各点のたわみ影響係数を用いて、接触荷重を線形計画法で求めることを提案した。そして、厚肉はすば歯車に対して、接触部近

傍のたわみを、軸の曲げたわみとねじりたわみ、歯の曲げたわみとヘルツ接触によるたわみの総和と考え、たわみ影響係数を理論的に求め、線形計画法を利用して、歯面荷重分布を解析した⁽⁶⁾。紀⁽⁷⁾は厚肉平歯車の歯面荷重を求めるのに、二次元有限要素法における剛性マトリックスの逆マトリックスとしてたわみ影響係数マトリックスを求め、線形計画法を利用している。

しかし、剛性マトリックスの逆マトリックスとしてたわみ影響係数マトリックスを求める方法を、三次元的な構造で自由度の多い場合に適用すると、多くの繰返し計算を必要とするため、計算機の累積誤差が大きくなるので、正確なたわみ影響係数マトリックスを求めることが困難になる。

本研究では三次元的な構造の薄肉歯車の接触問題を解く方法を提案する。すなわち、一對の歯車間の面接触を有限個の点の接触に置き換え、接触の生じる可能性のある領域近傍の各点のたわみ影響係数マトリックスを有限要素法で求め、これより、線形計画法を応用して、接触点の荷重分布を求めるプログラムを開発した。このプログラムを用いて、接触部における分割数を検討するとともに、薄肉歯車の歯面荷重解析を行い、得られた歯面荷重分布より、歯元ひずみを計算して、

* 原稿受付 1996年4月18日。

^{*1} 正員, 山口大学工学部 (〒755 宇部市常盤台 2557)。^{*2} 正員, 山口大学大学院。

ひずみの実測値とを比較することにより、プログラムの妥当性を示した。

2. 接触解析の概要

図1(a)は二つの弾性体①と②を三次元的に示したものであり、弾性体①、②に力 P を作用させ、その力を大きくしていくと、弾性体①の点 $1, 2, \dots, n$ は弾性体②の点 $1, 2, \dots, n$ とそれぞれ接触するものとする。また、図1(b)、(c)は図1(a)の一断面を示したもので、(b)の実線が力 P を作用させない、変形前の状態を、図1(c)は点 O_1, O_2 にそれぞれ力 P を作用させて接触後の変形した状態を示す。また、図1(b)の破線は接触後の変形状態のまま O_1, O_2 を元の位置に帰した状態を示す。図1において、 ε_k は任意の点対 ($k-k$) の初期分離量で、 δ_0 は弾性体①、②の間の最小距離、 δ は力 P の作用点 O_1, O_2 間の変位量である。また、 $\omega_{k(1)}, \omega_{k(2)}$ はそれぞれ弾性体①と②の点 k における力の作用方向の変形量で、凹の場合を正と定義する。力 P を作用させる時、点対 ($k-k$) が接触していれば、次の変形関係

$$\omega_{k(1)} + \omega_{k(2)} + \varepsilon_k - \delta = 0 \quad (1)$$

が成り立ち、点対 ($k-k$) が接触していなければ

$$\omega_{k(1)} + \omega_{k(2)} + \varepsilon_k - \delta > 0 \quad (2)$$

が成り立つ。

接触領域における連続的に分布する接触荷重を点 $1, 2, \dots, n$ に作用する集中力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ で置き換えると、弾性体①、②の点 k の変形量 $\omega_{k(1)}, \omega_{k(2)}$ と点 j の荷重 F_j との間には次の関係が成り立つ。

$$\omega_{k(1)} = \sum_{j=1}^n a_{kj(1)} F_j, \quad \omega_{k(2)} = \sum_{j=1}^n a_{kj(2)} F_j \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $a_{kj(1)}, a_{kj(2)}$ はそれぞれ弾性体①、②のたわみ影響係数である。

式(3)を用いて、式(1)、(2)を書き直すと、次のようになる。

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj(1)} + a_{kj(2)}) F_j + \varepsilon_k - \delta \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに、総外力 P と接触荷重 F_j との間には次の関係が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^n F_j = P \quad \dots\dots\dots (5)$$

したがって、接触問題は、 $a_{kj(1)}, a_{kj(2)}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) を求め、式(4)の等式と式(5)を満足する F_j ($j=1, 2, 3, \dots, n$) を求めることに帰着する。本報では、 $a_{kj(1)}, a_{kj(2)}$ を有限要素法で求め、式(4)と(5)を線形計画法によって解析し、薄肉歯車の歯面荷重を求める。

3. 歯車の歯面荷重の計算法

一对の歯車同士の接触は幾何学的な接触線近傍の幅をもった面で行われる。接触領域の決定のためには、実際の接触領域よりやや広い領域においてたわみ影響係数 a_{ij} を決定する必要がある。このため、本研究では、幾何学的な接触線を中心とし、片当たりのない厚肉歯車同士がピッチ点でかみあい状態にあるときに、ヘルツ接触理論で求まる接触領域の幅 $2a^{(8)}$ の約1.8倍 ($=1.8 \times 2a$) の幅をもった範囲においてたわみ影響係数 a_{ij} を求めた。この範囲を図2(b)に模式的に Width で示している。また、図2(a)の歯車に格子点で示しているように、一方の歯車①の歯面上においてたわみ影響係数 $a_{ij(1)}$ を求める位置を決め、他方の歯車②については、図2(b)に示すように、歯車①の歯面上の格子点を通り、作用線と平行な線が歯車②の歯面と交差する点のたわみ影響係数 $a_{ij(2)}$ を対応させることにした。

歯面の摩擦力を無視して解析する。したがって、図2のような歯車モデルにおいても、式(4)の条件が得られることになる。

式(4)に対して、負でない変数 $Y_k \geq 0$ を導入すると、式(4)の不等式は式(6)の等式になる。

Fig. 1 Contact model of elastic bodies

Fig. 2 Face-contact model of gears

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj(1)} + a_{kj(2)}) F_j + \varepsilon_k - \delta = Y_k$$

$$(k=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (6)$$

式(1), (2), (4)と(6)と対比すると, Y_k の値は次のことを意味することがわかる。

$Y_k=0$: 点 k は接触する。すなわち, $F_k \geq 0$

$Y_k > 0$: 点 k は接触しない。すなわち, $F_k = 0$

式(6)を整理してマトリックス表示すれば, 式(7)が得られる。

$$-[S]\{F\} + \delta\{e\} + [I]\{Y\} = \{\varepsilon\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} S_{kj} &= a_{kj(1)} + a_{kj(2)}, (k=1, 2, \dots, n) \\ \{F\} &= \{F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_n\}^T \\ \{Y\} &= \{Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n\}^T \\ \{e\} &= \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(7)において $[I]$ は $n \times n$ の単位マトリックスを示している。また, 出力歯車のトルクと基礎円半径をそれぞれ T, r_g とし, 接触領域の幅が r_g に比較して非常に小さいことを考慮すると, 式(5)に対応して式(9)が得られる。

$$\{e\}^T \{F\} = T/r_g \dots\dots\dots (9)$$

したがって, 一对の歯車の接触問題は式(7), (9)を満足する変数 $\{F\}, \delta, \{Y\}$ を探すことになる。

式(8)に示すように, 各変数 F_k, δ, Y_k はいずれも

$F_k, \varepsilon_k, Y_k \geq 0$ であるので, この問題は, 負でない変数 $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+n}, X_{n+n+1} \geq 0$ を導入すると, 式(10)の目的関数 Z を式(11)の制約条件のもとで, 最小にすることに帰着する⁽⁹⁾。

目的関数:

$$Z = X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+n} + X_{n+n+1} \dots\dots (10)$$

制約条件:

$$\left. \begin{aligned} &-[S]\{F\} + \delta\{e\} + [I]\{Y\} + [I]\{Z\} \\ &= \{\varepsilon\}\{e\}^T \{F\} + X_{n+n+1} = P \\ &F_k \geq 0, Y_k \geq 0, \varepsilon_k \geq 0, \delta \geq 0 \\ &X_{n+l} \geq 0, l=1, 2, \dots, n+1 \\ &\{Z\} = \{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+n}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(10), (11)を満足する変数 $\{F\}, \delta, \{Y\}$ を線形計画法の単体法⁽⁹⁾を用いることにより求めた。

4. 有限要素法の利用

4.1 要素のタイプ 要素として, 六面体要素の八つの頂点と内部の3点の合計11節点をもつ三次元ソリッド要素を用いた。要素局座標系 (ξ, η, ζ) において, その形状関数を式(12)に示す。

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8 \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8 \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8 \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8 \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8 \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) &= (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8 \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) &= (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8 \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8 \\ N_9(\xi, \eta, \zeta) &= 1-\xi^2 \\ N_{10}(\xi, \eta, \zeta) &= 1-\eta^2 \\ N_{11}(\xi, \eta, \zeta) &= 1-\zeta^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$N_1 \sim N_8$ は六面体の8頂点の形状関数で, $N_9 \sim N_{11}$ は六面体内部の3の節点の形状関数である。

このタイプの要素は六面体の頂点のみに節点をもつ8節点三次元ソリッド要素より精度が高く⁽¹⁰⁾, 要素の形が細長くなっても, 解の収束性がよい⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

4.2 有限要素モデル 図3に示す厚肉歯車と薄肉歯車がかみあう場合の解析を行った。図3の歯車の緒元を表1に示す。この歯車対の要素分割図を図4に示す。図4(a)の薄肉歯車内周は図3(a)の歯車のボス外周部に, また, 図4(a)の厚肉歯車内周は図3(b)の歯車のリム内周に相当する。図4において, (b)はかみあい状態にある歯の部分の拡大図で, (c)は(b)

Table 1 Gear parameters

Gear type	Standard involute spur gear
Number of teeth	$z_1 = z_2 = 50$
Module	$m = 4\text{mm}$
Pressure angle	$\alpha_0 = 20^\circ$
Contact ratio	1.75
Edge radius of cutter	0.6mm
Gear precision	JIS 1st grade

(a) Thin wall gear (b) Thick wall gear

Fig. 3 Structure of the pair of spur gears

(a) FEM model of the pair of gears

(b) Contact teeth (c) Contact area (d) Tooth root

Fig. 4 FEM model of gears

の接触部付近の拡大図を示し、(d)は(b)の歯元すみ肉部の拡大図である。一対の歯車の分割はかみあい位置の変化に伴って、かみあい部付近の分割を自動的に細かく行えるようにしている。

4.3 たわみ影響係数 図2に示す歯車の歯面上の格子点を有限要素モデルの節点に対応させて取扱う。図2(b)のWidthで示す部分のたわみ影響係数マトリックスを求める際、計算精度を低下させないため、各節点に単位力を作用させ、ガウスの消去法により、各節点の変形量を求め、これより直接たわみ影響係数マトリックスを求めた。この際、薄肉歯車の場合は図4(a)の内周上の各節点を固定し、厚肉歯車の場合は図4(a)に示す4枚歯の厚肉歯車モデルの内周および円周方向の端部の各節点を固定している。

5. 歯面荷重計算の流れ図

歯車の加工誤差、組立誤差がない場合を対象として解析を行った。したがって、解析に当たっては、幾何学的なかみあい線上でかみあうときを基準にとり、図1(a)に示す δ_0 を零として計算を行った。歯面荷重計算のための流れ図を図5に示す。図5において、(5)～(7)では、二つの歯車について、別々に要素分割、剛性マトリックスの計算、たわみ影響係数の計算を行うことを示している。

一対の歯車において、図2のように無負荷時に決定

Fig. 5 Flow chart of tooth load calculation

した点対($k-k$)の位置は、歯車の変形により、わずかにずれるために、厳密には点対($k-k$)は接触後には一致しない。図5の(10)~(12)は、(1)~(9)の計算で求めた歯面荷重を用いて、歯面上の各点の変形量を求め、変形後の歯面から点対($k-k$)の位置を修正し、最終的な歯面荷重分布を求める過程を示している。

計算にはCPU PENTIUM 120 MHz, メモリー 16 MB, ハードディスク 2 GB のパーソナルコンピュータを用いている。

6. 歯元ひずみの測定法

計算結果の検証のために、求めた歯面荷重を用いて、有限要素法により薄肉歯車の歯元ひずみを求め、実測値と比較した。歯元ひずみの測定に際しては、図6に示すように、歯車の歯元圧縮側に8枚のひずみゲージをはり付けて、薄肉歯車を駆動歯車とし、歯車の約1.2回転分のひずみを連続的に測定した。図7は実験に用いた動力循環式歯車試験装置である。測定時には、負荷トルク $T=294\text{ Nm}$ を作用させ、モータ⑭を1.65 rpm で回転させた。

Fig. 6 Positions of strain gauges

Fig. 7 Experimental apparatus of gears

7. 結果と考察

7.1 接触領域の要素分割数と計算精度の関係

図3(b)に示す厚肉歯車同士がかみあう場合を例にとり、接触部分の要素分割数 n を検討した。駆動歯車の歯先から0.83ピッチかみあいが進んだ位置において求めた荷重分布より接触応力分布を算出したものを図8(a)に示す。図8(a)には、図2(b)のWidthを理論値⁽⁸⁾ $2a$ の1.5倍とし、この範囲を n 等分したときの歯面荷重から求めた接触応力分布を示す。図8(a)の最大応力点の接触応力および最大応力点位置の変形量と要素分割数 n の関係を図8(b)に示す。なお、図8のTheoryは理論式⁽⁸⁾で計算した値である。図8により、Width部の分割は $n=10$ 以上あればよいことがわかる。したがって、薄肉歯車の計算において $Width=1.8 \times 2a$ としているので、 $n=12$ とした。

7.2 計算結果と実験結果の比較 かみあい部付近のひずみの解析には、図4(a)の薄肉歯車モデルに歯面荷重を負荷して得られた結果を用いた。また、かみあい部から離れた部分のひずみの解析には、図4(a)の薄肉歯車モデルに歯面荷重を負荷して得られた節点変位を、図4(a)の薄肉歯車のかみあい部と同じ細かい分割にした4枚歯のモデルの境界条件とする

(a)

(b)

Fig. 8 Relationship between number of elements in contact area and FEM precision for a pair of thick wall gear (Mesh position=0.83 pitch, $T=294\text{ Nm}$)

Fig. 9 Tooth root strain for one rotation ($T=294$ Nm)

Fig. 10 Tooth root strain for four pitches ($T=294$ Nm)

ことにより行った。

図6の測定位置1, 3, 8の歯車1回転中におけるひずみの測定値と計算値を比較して図9に示す。図10は各測定位置のひずみを時間軸を拡大して示したものである。図9, 10より、各測定位置の歯元ひずみとも、計算値と測定値がよく一致していることがわかり、本計算法により、薄肉歯車の歯面荷重が精度よく計算できていることがうかがえる。なお、図を省略したが、他の測定位置のひずみも、計算値と測定値はよく一致していた。

7.3 歯面荷重の歯すじ方向分布 図4の歯車対において、薄肉歯車の歯先から0.83ピッチほどかみあいが進んだ位置における接触応力分布を図11に示

Fig. 11 Contact stress of the thin wall gear (Mesh position=0.83 pitch, $T=294$ Nm)

Fig. 12 Tooth load distribution ($T=294$ Nm)

Table 2 Influence of tooth deformation on contact stress
(Mesh position=0.92 pitch, $T=294$ Nm)

	L_1 (mm)	L_2 (mm)	σ_{c1} (MPa)	σ_{c2} (MPa)
I	0.3316	0.1105	596.6	231.9
II	0.3316	0.1105	590.5	228.8

Note: I : Process (1)~(9) in Fig. 5

II : Process (1)~(12) in Fig. 5

す。図 11 において、ウェブは奥側にある。図 11 より、本研究で解析した薄肉平歯車においては、ウェブのない側では接触幅、歯面接触応力ともに小さく、ウェブのある側では、接触幅、歯面接触応力ともに大きいという、予想されるような傾向を示すのがわかる。

図 12(a), (b) に、二対かみあい時と一対かみあい時の歯すじ方向の歯面荷重分布を示す。図 12 の横軸は、図の上側に示す歯すじ方向位置に対応している。また、縦軸は単位歯すじ長さ当たりの歯面荷重を示したものであり、かみあい位置を図中に○、●印で示して区別している。図 11, 12 より、薄肉平歯車の歯面荷重分布は厚肉の場合と大きく異なることがわかる。

7.4 歯の変形の影響 薄肉歯車の歯先から 0.92 ピッチほどかみあいが進んだ位置において、歯面接触応力 σ_{c1} , σ_{c2} および接触幅 L_1 , L_2 (図 11 参照) を、図 5 の (1)~(9) で求めた場合と図 5 の (1)~(12) で求めた場合で比較して表 2 に示す。表 2 より、歯面接触応力および接触幅ともに (1)~(9) の場合と (1)~(12) の場合とではほとんど差が認められず、図 3(a) 程度の薄肉歯車では、歯の変形による接触領域の変化を考慮する必要がないことがわかった。

7.5 本解析法の応用 本解析法を応用することにより、複雑な構造の歯車対の歯当たりや歯面接触応力の分布、各部の曲げ応力の分布の解析が可能である。さらに、図 2(c) に示す力の作用点の変位量 δ より、 δ/r_g を求めることにより、歯車減速機の入出力軸

間の回転伝達誤差を解析できる。

8. 結 論

本研究では、一対の歯車同士の接触を、幾何学的なかみあい線を含む歯面上の多数点での接触と考え、これらの点を有限要素法の節点とし、各点のたわみ影響係数を有限要素法で求めて、線形計画法を用いることにより歯面上の荷重分布を解析できる方法を示した。この方法により計算した厚肉歯車の接触応力とヘルツ接触理論で求めた接触応力とはよく一致した。また、この方法により求めた薄肉ウェブ・リム歯車の歯面荷重を用いて計算した歯元ひずみは測定値とよく一致した。

この方法を応用すれば、自由度の多い薄肉構造歯車に対して、歯当たりや歯面のヘルツ応力分布を求めることができ、各部の曲げ応力を計算することができる。また、この方法を回転伝達誤差の解析にも応用する予定である。

文 献

- (1) 林国一, 機論, 28-193(1962), 1093-1101.
- (2) 林国一・佐山武英, 機論, 28-193(1962), 1102-1112.
- (3) 梅沢清彦, 機論, 40-330(1974), 576-584.
- (4) 久保愛三・梅沢清彦, 機論, 43-371(1977), 2771-2779.
- (5) Conry, T. F. and Seireg, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 6(1971), 387-392.
- (6) Conry, T. F. and Seireg, A., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 11(1973), 1115-1122.
- (7) 紀名剛, 西北工業大学科技資料(中国), No. SHJ8032, (1980), 1-18.
- (8) 例えば, 成瀬政男監修, 歯車の研究, (1960), 216-247, 養賢堂.
- (9) 例えば, 平本巖・長谷彰, 線形計画法, (1973), 7-46, 培風館.
- (10) 劉更, 構造動力学有限元程序设计(中国), 6(1993), 37-44, 国防工業出版社.
- (11) 何窮, 上海交通大学学报(中国), 4(1981), 24-31.
- (12) 陳万吉, 力学学报(中国), 3(1982), 262-271.