粘弾性振動子の強制調和振動*
(分数階微分を含む1自由度振動応答)清水 信行*¹, 大和田 浩史*², 飯島 正樹*³Forced Harmonic Vibration of Viscoelastic Oscillator
(Vibration Responses of SDOF System with Fractional Derivative)

Nobuyuki SHIMIZU, Hirofumi OWADA and Masaki IJIMA

The equation of motion for the forced harmonic vibration of a viscoelastic oscillator is formulated in terms of a fractional derivative in addition to ordinary derivatives. This equation of motion is exactly solved using the theory of fractional differential equations. An equivalent model of the viscoelastic oscillator is derived and used to estimate the responses of the oscillator. The validity of the equivalent model is proved by comparing the solutions of the exact model and the equivalent model for harmonic excitation. Damping property of the vibration of the viscoelastic oscillator is elucidated by the obtained responses.

Key Words: Viscoelastic, Fractional Derivative, Forced Vibration, Equivalent Model

1. はじめに

粘弾性体の応力とひずみを表す構成方程式の数学モデルに関しては、これまで多くの研究がある⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。筆者らもシリコンゲルを対象に応力とひずみを実測し、分数階微分を含む一般化Voigtモデルで記述した⁽⁵⁾。このような粘弾性体は減衰特性に優れているため、工業用製品の振動減衰材として広く用いられるようになってきた。

粘弾性体を振動減衰材として用いた場合の1自由度粘弾性振動子の振動特性については、数値積分法およびフーリエ変換法による応答計算例⁽¹⁾はあるが、その厳密解は求められていない。そこで筆者らは1自由度系の粘弾性振動子の運動方程式を分数階微分を含む形で誘導し、自由振動応答の厳密解を求め、その振動の特徴を明らかにしてきた⁽⁶⁾。本論文では、1自由度系の強制振動の運動方程式を立て、その厳密解を求める。次に等価粘性減衰系を誘導し、その応答を求め、両者の比較を行う。これより等価系の有効性を明らかにする。次に、これらの応答の結果より粘弾性振動子の強制振動応答の特徴を明らかにする。

2. 運動方程式

分数階微分を含む1自由度系の粘弾性振動子の強制振動の運動方程式は

$$[mD^2 + c_q D^q + kD^0]x(t) = F_0 \sin \omega t \quad (1)$$

と書ける。ここで $x(t)$ は変位応答, m : 質量, c_q : 粘弾性減衰係数, k : ばね定数, t : 時間, F_0 : 強制外力の振幅, ω : 外力の角振動数である。初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2)$$

とする。 q 階の分数階微分は、 $0 \leq q < 1$ に対して、

$$D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} D \left[\int_0^t \frac{x(\xi)}{(t-\xi)^q} d\xi \right] \quad (3)$$

で定義される。 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。 D は通常の微分である。式(1)を、両辺 m で割って標準形にすると、

$$[D^2 + 2\xi\omega_c^{2-q} D^q + \omega_c^2 D^0]x(t) = a \sin \omega t \equiv f(t) \quad (4)$$

となる。ただし、

$$\omega_c^2 = \frac{k}{m}, \quad \xi = \frac{c_q}{2m\omega_c^{2-q}}, \quad a = \frac{F_0}{m} \quad (5)$$

3. 運動方程式の解

粘弾性体の多くが $q=1/2$ に近い値を示すので、ここでは $q=1/2$ の場合に限って考えることにする。式(4)の方程式の解は初期条件(2)のもとで、次の手順で解くことができる⁽⁹⁾。

* 原稿受付 1996年7月22日。

*¹ 正員, いわき明星大学理工学部 (〒970 いわき市中央台飯野5-5-1)。*² 学生員, いわき明星大学学部生。*³ いわき明星大学大学院。

まず式(4)のインディシャル多項式は $q=1/2$ に対して

$$P(r) = r^4 + 2\xi\omega_e^{3/2}r + \omega_e^2 \quad (6)$$

と与えられる。この逆数は次のように書ける。

$$P^{-1}(r) = \frac{1}{r^4 + 2\xi\omega_e^{3/2}r + \omega_e^2} = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i}{r - \alpha_i} \quad (7)$$

ここで α_i はインディシャル多項式の根、 β_i は、 $P^{-1}(r)$ を式(7)のように部分分数にしたときの係数である。 s をラプラス変換の変数とすると $r = s^{1/2}$ に対して

$$P^{-1}(s^{1/2}) = \frac{1}{P(s^{1/2})} = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i}{s^{1/2} - \alpha_i} \quad (8)$$

積分核 $K(t)$ は $P^{-1}(s^{1/2})$ の逆ラプラス変換により与えられ

$$\begin{aligned} K(t) &= \mathcal{L}^{-1}[P^{-1}(s^{1/2})] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i}{s^{1/2} - \alpha_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 \alpha_i^{j-1} \beta_i E_i\left(\frac{j}{2} - 1, \alpha_i^2\right) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで関数 $E_i(\cdot)$ は、次のように定義される⁽⁹⁾。

$$E_i(\nu, a) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)} \quad (10)$$

式(9)を用いて式(4)の解 $x(t)$ は

$$x(t) = \int_0^t K(t-\xi) f(\xi) d\xi + C_1 K(t) + C_2 DK(t) \quad (11)$$

と書ける。ここで特に $t=0$ で $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$ のときは、コンボリューション積分

$$x(t) = \int_0^t K(t-\xi) f(\xi) d\xi = K(t) * f(t) \quad (12)$$

となる。したがって、ラプラス変換を用いて次のように解くことができる。

すなわち、外力のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[a \sin \omega t] = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (13)$$

と書ける。したがって応答 $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ は初期条件を $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$ とすると、

$$X(s) = \frac{F(s)}{P(s^{1/2})} = \sum_{i=1}^4 \frac{a\beta_i\omega}{(s^{1/2} - \alpha_i)(s^2 + \omega^2)} \quad (14)$$

式(14)の逆ラプラス変換は文献(9)の 330 ページの式(4.28)を用いて

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^4 \frac{a\beta_i\omega}{(s^{1/2} - \alpha_i)(s^2 + \omega^2)}\right] \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{a\beta_i}{\alpha_i(\alpha_i^4 + \omega^2)} \sum_{j=1}^2 [\omega\alpha_i^j E_i(\frac{j}{2} - 1, \alpha_i^2) \\ &\quad - \omega\alpha_i^j C_i(\frac{j}{2} - 1, \omega) - \alpha_i^{2+j} S_i(\frac{j}{2} - 1, \omega)] \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで関数 $E_i(\cdot)$, $C_i(\cdot)$, $S_i(\cdot)$ は、次のように書ける⁽⁹⁾。

$$E_i(0, a) = e^a \quad (16)$$

$$C_i(0, a) = \cos at \quad (17)$$

$$S_i(0, a) = \sin at \quad (18)$$

$$E_i(-\frac{1}{2}, a) = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + aE_i(\frac{1}{2}, a) \quad (19)$$

$$E_i(\frac{1}{2}, a) = a^{-1/2} e^a \text{Erf}(at)^{1/2} \quad (20)$$

$$C_i(-\frac{1}{2}, a) = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} - aS_i(\frac{1}{2}, a) \quad (21)$$

$$S_i(-\frac{1}{2}, a) = aC_i(\frac{1}{2}, a) \quad (22)$$

$$C_i(\frac{1}{2}, a) = \sqrt{\frac{2}{a}} [(\cos at)C(y) + (\sin at)S(y)] = D^{-1/2} \cos at \quad (23)$$

$$S_i(\frac{1}{2}, a) = \sqrt{\frac{2}{a}} [(\sin at)C(y) - (\cos at)S(y)] = D^{-1/2} \sin at \quad (24)$$

ただし

$$y = \sqrt{2at/\pi} \quad (25)$$

さらに $\text{Erf}(z)$, $C(z)$, $S(z)$ は、 z を複素数として次のように定義されている。

誤差関数:

$$\text{Erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (26)$$

フレネル積分:

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{1}{2} \pi t^2 dt \quad (27)$$

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{1}{2} \pi t^2 dt \quad (28)$$

式(15)は式(16)~(25)を用いて変形すると

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \omega \alpha_i}{\alpha_i^4 + \omega^2} \exp(\alpha_i^2 t) [1 + \text{Erf}(\alpha_i \sqrt{t})] \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \omega}{\alpha_i^4 + \omega^2} [\omega D^{-1/2} \sin \alpha t - \alpha_i \cos \alpha t] \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \alpha_i^2}{\alpha_i^4 + \omega^2} [\omega D^{-1/2} \cos \alpha t + \alpha_i \sin \alpha t] \end{aligned} \quad (29)$$

となる。次に応答の漸近的な性質を調べる。式(29)に含まれる

基本関数の漸近展開は次のように書ける^{(10),(11)}。

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} z e^{z^2} \text{Erfc} z &= 1 - \frac{1}{2z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \\ (z: \text{複素数}, z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{3}{4}\pi) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} D^{-1/2} \sin \omega t &= \omega^{-1/2} \left\{ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{(\omega t)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + O((\omega t)^{-3/2}) \right\} \\ (\omega: \text{実数}, \omega t \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} D^{-1/2} \cos \omega t &= \omega^{-1/2} \left\{ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{(\omega t)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + O((\omega t)^{-3/2}) \right\} \\ (\omega: \text{実数}, \omega t \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (32)$$

式(30)~(32)の漸近展開、インディシャル多項式の根 α_i 、展開係数 β_i 、および関係式

$$\text{Erfc} z = 1 - \text{Erf} z \quad (33)$$

$$\text{Erf} z = -\text{Erf}(-z) \quad (34)$$

$$\text{Erf} \bar{z} = \overline{\text{Erf} z} \quad (\bar{z}: z \text{ の複素共役}) \quad (35)$$

などの性質を利用すると、式(29)の $x(t)$ の右辺の第 1 項、第 2 項、第 3 項はそれぞれ十分大きな t に対して

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \omega \alpha_i}{\alpha_i^4 + \omega^2} e^{\alpha_i^2 t} [1 + \text{Erf}(\alpha_i \sqrt{t})] \cong O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \omega}{\alpha_i^4 + \omega^2} [\omega D^{-1/2} \sin \alpha t - \alpha_i \cos \alpha t] \\ \cong \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \omega}{\alpha_i^4 + \omega^2} \left(\omega \sin(\alpha t - \frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \alpha_i \cos \alpha t \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \alpha_i^2}{\alpha_i^4 + \omega^2} [\omega D^{-1/2} \cos \alpha t + \alpha_i \sin \alpha t]$$

$$\equiv \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a \alpha_i^2}{\alpha_i^4 + \omega^2} \left(\omega \cos(\alpha x - \frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}\right) + \alpha_i \sin \alpha x \right) \quad (38)$$

となるから、 $x(t)$ は最終的に十分大きな t に対して

$$x(t) \equiv \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i a}{\alpha_i^4 + \omega^2} [\omega^2 \sin(\alpha x - \frac{\pi}{4}) - \alpha_i \omega \cos \alpha x - \alpha_i^2 \omega \cos(\alpha x - \frac{\pi}{4}) - \alpha_i^3 \sin \alpha x] \quad (39)$$

となる。式(36)～(38)より $x(t)$ は t の大きな値に対して、振動中心が $1/\sqrt{t}$ のオーダーで減衰していくことが分かる。

4. 等価粘性減衰系

粘弾性体の分数階微分 Voigt モデルと等価力学的挙動をばね要素 k_{eq} とダッシュポット要素 c_{eq} を並列に配置した Voigt モデルで近似することを試みる。その方法として4.1節と4.2節を考える。

4.1 周波数応答関数による c_{eq} と k_{eq} の導出⁽¹²⁾

分数階微分 Voigt モデルにおいて粘弾性減衰項

$$f_q(t) = c_q D^q x(t) = c_q \frac{d^q x}{dt^q} = c_q x^{(q)} \quad (40)$$

を考える。これをフーリエ変換し、ド・モアブルの公式

$$j^q = \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (41)$$

を用いると

$$\frac{F_q(\omega)}{X(\omega)} = c_q \omega^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + j c_q \omega^q \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (42)$$

となる。ただし $F_q(\omega)$ 、 $X(\omega)$ は $f_q(t)$ 、 $x(t)$ のフーリエ変換、 j は虚数単位である。

一方、式(40)と等価な Voigt モデルを

$$f_q(t) = c_{eq} \frac{dx}{dt} + k_{eq} x(t) \quad (43)$$

で近似すると、このフーリエ変換は

$$\frac{F_q(\omega)}{X(\omega)} = j c_{eq} \omega + k_{eq} \quad (44)$$

となる。式(42)の右辺と式(44)の右辺を等置して

$$\gamma \equiv \frac{c_{eq}}{c_q} = \omega^{q-1} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (45)$$

$$\delta \equiv \frac{k_{eq}}{c_q} = \omega^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (46)$$

が求められる。これより振動数 ω の調和運動では、式(40)の分数階微分項は、式(43)の等価 Voigt モデルで近似的に表すことが可能である。

4.2 消費エネルギーによる c_{eq} の導出

粘弾性減衰装置に $x = a \sin \alpha x$ の強制振動を与えた場合を考える。消費エネルギー(減衰容量) W_q は、 τ を周期として

$$W_q = \oint f_q dx = \int_0^\tau f_q \dot{x} dt \quad (47)$$

と与えられる。粘弾性減衰装置の減衰力 f_q は式(40)より

$$f_q = c_q x^{(q)} = c_q \frac{d^q}{dt^q} (a \sin \alpha x) \equiv c_q \omega^q a \sin(\alpha x + \frac{q\pi}{2}) \quad (48)$$

と書ける。ここで、右辺最終項は時間が十分に経過した定常振動に対する式である。

式(47)に式(48)および $\dot{x} = a \omega \cos \alpha x$ を代入し積分すると、

$$W_q \equiv c_q \omega^q a^2 \pi \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (49)$$

となる。一方、これと等価な粘性減衰装置の減衰力 $f_D = c_{eq} \dot{x}$ による減衰容量 W_D は、

$$W_D = \oint f_D dx = \pi c_{eq} \omega a^2 \quad (50)$$

となるから、式(49)の W_q と式(50)の W_D を等置して、粘弾性減衰装置と等価な粘性減衰係数 c_{eq} として式(45)と同じ式を得る。

5. 等価粘性減衰振動系

式(1)の $c_q D^q x(t)$ と等価な Voigt モデルは式(43)と書けた。このとき振動数 ω で振動している系に対して c_{eq} 、 k_{eq} は、式(45)、(46)のように与えられた。したがって式(1)と等価な粘性減衰系は次のように書ける。

$$m \ddot{x}(t) + [c_{eq} \dot{x}(t) + k_{eq} x(t)] + k x(t) = F_0 \sin \omega t \quad (51)$$

これを標準形にすると

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = a \sin \omega t \equiv f(t) \quad (52)$$

となる。ここで

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n}, \quad \omega_n^2 = \frac{k_{eq} + k}{m}, \quad a = \frac{F_0}{m} \quad (53)$$

である。式(52)の解はすでに知られており

$$x(t) = A_0 \exp(-\zeta \omega_n t) \cos(\omega_n t - \phi_0) + A \sin(\omega t - \phi) \quad (54)$$

と書ける(例えば文献(13))。ここで関数 A_0 、 $\tan \phi_0$ 、 A 、 $\tan \phi$ は、初期条件を $x(0) = 0$ 、 $\dot{x}(0) = 0$ とすると、

$$A = x_{st} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (55)$$

$$\tan \phi = \frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \quad (56)$$

$$A_0 = x_{tr} = \sqrt{\left\{ \frac{2\zeta\lambda}{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{(2\zeta\lambda)\zeta - (1-\lambda^2)\lambda}{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2} \right\}^2} \quad (57)$$

$$\tan \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{(2\zeta\lambda)\zeta - (1-\lambda^2)\lambda}{2\zeta\lambda} \quad (58)$$

となる。ここで $\lambda = \omega/\omega_n$ である。

式(54)に対して時間が十分経過したときの解は、第1項が消えるから次式となる。

$$x(t) \equiv A \sin(\omega t - \phi) \quad (59)$$

6. 分数階微分系と等価系の周波数応答関数

2章の式(4)の分数階微分を含む粘弾性系(以下分数階微分系(fractional derivative model)と呼ぶ)と式(52)の等価粘性減衰系(以下等価系(equivalent model)と呼ぶ)の周波数応答関数 $H(j\omega)$ と $H_{eq}(j\omega)$ を求める。そのために、ここでは外力 $f(t)$ として

$$f(t) = e^{j\omega t} \quad (60)$$

とおき、これに対する式(4)、式(52)の応答 $x(t)$ を

$$x(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \quad (61)$$

$$x(t) = H_{eq}(j\omega)e^{j\omega t} \quad (62)$$

とおく。式(60)、(61)を式(4)に代入して

$$[(j\omega)^2 + (j\omega)^q 2\xi\omega_c^{2-q} + \omega_c^2]H(j\omega) = 1 \quad (63)$$

を得る。式(41)のド・モアブルの公式を式(63)に用いると次のようになる。

$$H(j\omega) = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_c^{2-q}\omega^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + j2\xi\omega_c^{2-q}\omega^q \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)} \quad (64)$$

一方、式(60)、(62)を式(52)に代入すると次のようになる。

$$H_{eq}(j\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n\omega} \quad (65)$$

7. 数値計算

7.1 応答 $x(t)$ の計算

3章～5章で得られた $x(t)$ の時間応答関数を計算する。計算に用いるパラメータをつぎのようにする。

$q=1/2$, $m=1[\text{kg}]$, $k=1[\text{Ns}^q/\text{m}]$, $\xi=0.5$, $\omega=1[\text{rad/s}]$, $a=1[\text{m/s}^2]$
これより

$$\omega_c = 1[\text{rad/s}], \quad c_q = 2m\omega_c^{2-q}\xi = 1.0[\text{Ns}^q/\text{m}],$$

$$k_{eq} = c_q\omega^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707[\text{N/m}],$$

$$c_{eq} = c_q\omega^{q-1} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707[\text{Ns/m}],$$

$$\omega_n = \sqrt{(k_{eq} + k)/m} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})/2} = 1.307[\text{rad/s}],$$

$$\zeta = c_{eq}/(2m\omega_n) = 0.271[-], \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = 1.258[\text{rad/s}]$$

上記の手順で $\xi=0.1, 0.5, 2.0$ に対する等価系のパラメータ値を求め表1にまとめた。ここで特に $\omega_c=1[\text{rad/s}]$ とした等価系を system-1 とした。

Table 1 Value of the equivalent system-1, ($\xi=0.1, 0.5, 2.0$)

$\xi[-]$	$c_q[\text{Ns}^q/\text{m}]$	$k_q[\text{N/m}]$	$c_{eq}[\text{Ns/m}]$	$\omega_c[\text{rad/s}]$	$\omega_n[\text{rad/s}]$	$\lambda[-]$	$\zeta[-]$
0.1	0.2	0.141	0.141	1.067	1.066	0.936	0.066
0.5	1.0	0.707	0.707	1.307	1.258	0.765	0.271
2.0	4.0	2.828	2.828	1.957	1.352	0.511	0.723

次に、インディシャル多項式(6)の根 α_i と式(8)中の値 β_i を $\xi=0.1, 0.5, 2.0$ に対し求め表2に示した。図1は、 $\xi=0.1, 0.5, 2.0$ に対する α_i の複素平面上での配置である。

図2、図3は、図1の根の配置に対応させ、式(15)をもとに $x(t)$ をグラフ化したものである。最終的な応答波形は、実線で示された波形となる。なお、図2は $q=1/2, \xi=0.5$ 、図3は $q=1/2, \xi=2.0$ のときの波形である。

また、式(6)=0において根が2組の共役複素根から1組の共役複素根および2組の実根に移行するときの ξ の臨界値は、

$$\xi = \frac{2}{3^{3/4}}\omega_c^{q-1/2} = 0.87738\omega_c^{q-1/2} \quad (66)$$

である⁽⁸⁾。

Table 2 Value of α_i and β_i

ξ	0.1	0.5	2.0
α_1	0.708+0.756j	0.727+0.934j	0.872+1.381j
α_2	-0.708+0.656j	-0.727+0.430j	-0.251
α_3	-0.708-0.656j	-0.727-0.430j	-1.493
α_4	0.708-0.756j	0.727-0.934j	0.872-1.381j
β_1	-0.176-0.153j	-0.154-0.081j	-0.073-0.01j
β_2	0.176-0.203j	0.154-0.346j	0.254
β_3	0.176+0.203j	0.154+0.346j	-0.107
β_4	-0.176+0.153j	-0.154+0.081j	-0.073+0.01j

j: imaginary unit

Fig.1 Distribution of roots of indicial polynomial in complex plane

Fig.2 Displacements corresponding to the roots of indicial polynomial ($q=1/2, \xi=0.5$)

Fig.3 Displacements corresponding to the roots of indicial polynomial ($q=1/2, \xi=2.0$)

式(15)と式(54)により、分数階微分系(F.D.)と等価系(Equivalent)の応答 $x(t)$ を求め、図 4, 5, 6 に示した。一方、近似式(39)および式 (59)による時間が十分経過したときの時間応答 $x(t)$ の近似値は時間の後半では図 4, 5, 6 と一致した。

Fig. 4 Response of Eqs. (15) and (54), ($\xi = 0.1$)

Fig. 5 Response of Eqs. (15) and (54), ($\xi = 0.5$)

Fig. 6 Response of Eqs. (15) and (54), ($\xi = 2.0$)

7. 2 周波数応答関数 $H(j\omega)$ の計算

6 章で述べた周波数応答関数を計算する。式(64)は

$$|\omega_r^* H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + 2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^{2q}\right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^q \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)\right]^2}} \quad (67)$$

$$\arg H(j\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^q \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right)}{1 + 2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^{2q}} \right\} \quad (68)$$

となる。図 7 は、 $q=1/2$ とし、 ξ をパラメータとして横軸に ω/ω_r をとり、縦軸にこれらの値をプロットしたものである。

Fig. 7 Frequency response function ($q = 1/2$)

次に粘弾性系と等価系の周波数応答関数を計算するためパラメータを次のようにする。

$$q = 1/2, \quad m = 1[\text{kg}], \quad \omega_r = 1[\text{rad/s}], \quad a = 1[\text{m/s}^2], \quad \omega_n = 1[\text{rad/s}]$$

ここで、分数階微分系と等価系の周波数応答関数 $H(j\omega)$ と $H_{eq}(j\omega)$ を $\lambda = \omega/\omega_n = 1$ で合わせるようなばね定数を求め、表 3 にまとめた。ここで特に $\omega_n = 1[\text{rad/s}]$ とした等価系を system-2 とした (なお、 ω_r/ω_n の関係は、文献(12)に述べられている)。

Table 3 Value of the equivalent system-2, ($\xi = 0.1, 0.5, 2.0$)

ξ [-]	k [N/m]	ω_n [rad/s]	c_1 [Ns/m]	k_n [N/m]	c_n [Ns/m]	ζ [-]	ω_n [rad/s]
0.1	0.872	0.934	0.181	0.128	0.128	0.064	0.998
0.5	0.549	0.741	0.638	0.451	0.451	0.225	0.974
2.0	0.189	0.435	1.147	0.811	0.811	0.405	0.914

図 8, 9, 10 は、 $\xi = 0.1, 0.5, 2.0$ に対する周波数応答関数 $H(j\omega)$, $H_{eq}(j\omega)$ および、位相角 $\arg H = \tan^{-1}(-\text{Im} H / \text{Re} H)$, $\arg H_{eq}$ である。周波数応答関数は、 $\lambda = 1$ (図中●印の点) で一致させるように求めたものである。 $\xi = 0.1$ の場合、周波数応答関数および位相角はよい一致を見た。 ξ が大きくなるにつれ $\lambda = 1$ では $H(j\omega)$ と $H_{eq}(j\omega)$ および、 $\arg H$ と $\arg H_{eq}$ は一致しているものの、その他の周波数での一致度は低下していることが観察される。

Fig. 8 Frequency response function ($\xi = 0.1$)

Fig.9 Frequency response function($\xi = 0.5$) Fig.10 Frequency response function($\xi = 2.0$)

8. 考察

2章で定式化した分数階微分を含む粘弾性振動方程式を3章において厳密に解いた。この解より時間が十分経過した場合の漸近応答を求めた。4章では等価粘性系を求めた。粘弾性系と等価粘性減衰系は等価系を作る際に参照した振動数では、時間応答、周波数応答とも良い一致を見た。過渡応答の部分において、応答は粘弾性系の平均値が初期加振の影響を受け一方にずれる傾向(弾性余効)のあることが分かった。これは、自由振動応答の場合の傾向と対応している。

6章および7章で示した粘弾性系と等価粘性減衰系の周波数応答関数の比較の結果、両者は等価系を作る際に参照した振動数では完全に一致するが、 ξ が大きくなるにつれその他の周波数では次第に一致度が悪くなることが分かった。したがってランダムな入力を受ける系の等価系を決める際にはこの点の配慮が必要である。

9. 結論

8章までの検討から粘弾性系を1/2階微分でモデル化した1自由度粘弾性減衰系において以下のことを得た。

- (1) 正弦波入力に対する厳密解を求めた。
- (2) 時間が十分経過したときの漸近応答を求めた。
- (3) (1)と等価な粘性減衰系を求めた。

- (4) 粘弾性系と等価粘性系の応答は時間応答、周波数応答とも等価のための注目周波数において良好な一致を見た。
- (5) 粘弾性系の応答では粘弾性減衰値が大きい場合、減衰応答に弾性余効が強く現れた。この漸近応答は $O(1/\sqrt{t})$ で減衰していくことが分かった。

参考文献

- (1) A.Gemant, A Method of Analyzing Experimental Results Obtained from Elasto-Viscous Bodies, Physics, Vol.7 (1936), pp 331-317.
- (2) G.W.Scott Blair and J.E.Caffyn, An Application of the Theory of Quasi-Properties to the Treatment of Anomalous Strain-Stress Relations, Philos. Mag, Series 7,40 (1949), p80.
- (3) M.Caputo and F.Mainardi, A New Dissipation Model Based on Memory Mechanism, Pure Applied, Geophys, 91 (1971), pp 134-147.
- (4) P.J.Torvik and R.L.Bagley, A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity, J. of Rheology, 27(3) (1983), pp201-210.
- (5) P.J.Torvik and R.L.Bagley, Fractional Calculus in Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures, AIAA Journal, Vol.23 (1985), pp918-925.
- (6) 清水、粘弾性振動子の動的性質、機論、61-583, C (1995), pp166-170.
- (7) C.G.Koh and J.M.Kelly, Application of Fractional Derivatives to Seismic Analysis of Base-Isolated Models, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19 (1990), pp229-241.
- (8) 清水、飯島、粘弾性体の分数次微分モデル、機論、62-604, C (1996), pp23-27.
- (9) K.S.Miller and B.Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc. (1993).
- (10) M.Abramowitz and I.A.Stegun ed., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc. The ninth printing (1972), pp 339-340.
- (11) K.B.Oldham and J.Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press (1974), pp108-110.
- (12) 飯島、清水、分数次微分を含む粘弾性モデルの等価粘性減衰係数の導出、日本機械学会第73期通常総会講演会論文集 (I) (1996), pp 339-340.
- (13) 清水、パソコンによる振動解析、共立出版 (1989), p105.