スティフな断片線形系の時刻歴応答解析に関する研究* (付加質量法の提案)

今西 悦二郎^{*1}, 廣 岡 栄 子^{*2}, 井 上 喜 雄^{*1}

Time Historical Analysis Method for Stiff Piecewise-Linear System (Method of Adding Mass)

Etsujiro IMANISHI, Eiko HIROOKA and Yoshio INOUE

We present a characteristic improvement method for time historical analysis of stiff piecewise-linear system by adding mass. Hydraulic power lines with check valves and control valves for construction machinery exhibit piecewise-linear characteristics for hydraulic flow rate and spool stroke. The proposed method involves no time delay in determining the mass by considering both eigenvalue distortion of the system and time response. This method is useful for time historical analysis of hydraulic power lines including stiff piecewise-linear elements such as check valves, relief valves and control valves.

Key Words: Nonlinear Vibration, Oil Hydraulics, Numerical Integration, Dynamic Simulation

1. 緒 言

最近の建設機械では、操作性や乗り心地の向上に関する要求が高まっている。そのため、新機種の開発設計段階における事前評価技術の確立が求められている。建設機械では動力として油圧が用いられており、その動特性を把握することが評価技術を確立させる上で重要な課題となる。

著者らは、以前から油圧パワーラインを含む建設機械の動的シミュレーション⁽¹⁾⁽²⁾を実施してきた。しかし、油圧機器のなかでもチェック弁などのように流量に対して強い非線形性を示す機器や、スライドスプール形方向制御弁(以下、コントロール弁と呼ぶ)などのようにスプール変位に対して強い非線形性を示す機器を取扱う場合には、Newmark- β 法を用いた数値積分の特性が大きく変化してしまう。このような場合に精度を確保するためには、時間刻みを小さくするなどの注意を要した。そのため、自由度が大きくなると計算時間が膨大になり、設計者向けの解析ツールとして活

用するには、数値積分の特性を改善する必要性が生じた。

そこで本報では、チェック弁やコントロール弁のようなスティフな断片線形要素を含む系の時刻歴応答解析法において、数値積分の特性を改善する方法として時間刻みに対応した質量を付加する手法(以下、付加質量法と呼称する)を提案する。付加質量の大きさは、清水ら⁽³⁾が提案した数値積分に関連する固有値のひずみに着目した手法を用いることによって、数値積分の特性を改善し、かつ応答性に影響を与えないように決めることができる。本手法は、時間刻みが大きくても断片線形要素の折れ曲がり点の通過を容易にし、応答性能に影響を与えず、かつタフに解析することを可能にする。

2. 断片線形系における解析理論

2・1 運動方程式 油圧系を含む機械システムの動的シミュレーションを実施するに際して、通常の有限要素法の場合と同様に、系全体をあらかじめ準備された標準要素を用いてモデル化し、次式のような運動方程式を生成する。

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [C]\dot{\mathbf{x}} + [K]\mathbf{x} = \mathbf{f} \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は機械系では変位、油圧系では流量の積分

* 原稿受付 1996年7月5日。

^{*1} 正員、(株)神戸製鋼所機械研究所 (〒651-22 神戸市西区高塚台1-5-5)。

^{*2} 正員、(株)コベルコ科研 (〒651-22 神戸市西区高塚台1-5-5)。

Fig. 1 Break point passing algorithm

値を表す状態ベクトルであり、 f は外力、圧力を表す外力ベクトルである。 $[M], [C], [K]$ はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリックスであり、線形問題では $[M], [C], [K]$ は一定であるが、非線形問題では $x, \dot{x}$ などの関数となるので、各時間ステップごとに断片線形化し各マトリックスに組込む。

2・2 折れ曲がり点通過アルゴリズム 断片線形系における折れ曲がり点通過アルゴリズムは、通過直前の状態量を用いて折れ曲がり点を予測する手法⁽⁴⁾を採用している。ここでは、変位に対する断片線形要素について説明する。図1に示すように $n+1$ ステップにおいてある断片線形要素が折れ曲がり点を通過した場合、 n ステップの状態に戻り、そのときの状態量(変位 x_n 、速度 $\dot{x}_n$ 、加速度 $\ddot{x}_n$ 、加加速度 $\ddot{\ddot{x}}_n$)から次式を用いて折れ曲がり点 x_p を予測し、

$$x_p = x_n + \tau \dot{x}_n + \frac{\tau^2}{2} \ddot{x}_n + \frac{\tau^3}{4} \ddot{\ddot{x}}_n \quad \dots\dots\dots (2)$$

折れ曲がり点の手前に設けた許容範囲に入るように時間刻みを調節する。そのため、状態量が数値的にひずまされていると正確な予測が難しくなり、逆に計算時間がかかってしまう恐れがある。そこで、以下ではスティフな断片線形要素として、減衰特性が大きく変化する高減衰断片線形要素、および剛性特性が大きく変化する高剛性断片線形要素を取り上げ、それぞれの要素を含む系に対する Newmark- β 法($\beta=1/4$)を用いた時刻歴応答解析法において、数値積分の特性を改善する付加質量法の検討を行う。

3. 高減衰断片線形系の挙動と精度検討

3・1 高減衰断片線形系の挙動 まず、高減衰断片線形要素を含む油圧系におけるモデル化と、その挙動について示す。そこで、図2(a)に示すような油圧系に高減衰断片線形要素としてチェック弁が取付けられているモデルを考える。油圧系は、作動油の質量お

Fig. 2 Hydraulic power line model

Fig. 3 Nonlinear characteristics of check valve

よび圧縮性を考慮すると、図2(b)に示すように3自由度のばね質点系にモデル化することができる⁽²⁾。なお、チェック弁はポペット部の応答性が、他の油圧系の動特性に比べて無視できる場合を考える。この時のチェック弁の流量特性は、正方向の流量に対してはある圧力損失が存在し、負の方向の流量に対しては流れないという特性である。これを断片線形系としてモデル化したものが、図3である。この場合、流れないというモデル化は、減衰係数 c_{21} を正方向の減衰係数 c_{22} より十分大きな値(10^7 倍)として、モデル化している。また、油圧系右端に取付けられたオリフィスは、流量に比例した圧力損失を示すものとする。

この系に図4(a)に示すような圧力 p_1, p_2 が、それぞれ左端と右端に作用したときの応答を解析する。時間刻みは、実固有値解析から決まる最高次の固有周期(0.037 s)の1/20以下である0.001 sとした。このときの流量 $\dot{x}$ と加速度 $\ddot{x}$ を図4(b), (c)に示す。これらの図から、 $\ddot{x}$ が時間3~7 sにおいて、時間刻みごとに大きく振動していることがわかる。これは、時間

Fig. 4 Simulation results of check valve model

0～3sではチェック弁部の減衰係数は c_{22} であるが、時間3～7sでは c_{21} となるためと考えられる。そのため、 $\ddot{x}$ を用いて折れ曲がり点を予測するためには、十分小さな時間刻みにする必要があり、解析時間も増加する。そこで、時間刻みを大きくしても精度よく折れ曲がり点を予測できる手法として、減衰係数と時間刻みに比例した質量を付加する手法(付加質量法)の検討を行う。

3・2 数値積分法の性質 付加質量法による高減衰断片線形系の数値積分における特性改善効果を評価するために、清水ら⁽³⁾が提案した数値積分に関連する固有値のひずみに着目した手法を用いて、その性質を検討する。ここでは簡単化のため、1自由度の減衰-質点系モデルを考える。この系の運動方程式は、外力項を無視すると次式のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $x = Xe^{-\alpha_0 t}$ とおき整理すると、1次系の固有値 α_0 が得られる。

Fig. 5 Eigenvalue distortion $\alpha\tau$ vs. $\alpha_0\tau$

$$\alpha_0 = c/m \quad \dots\dots\dots (4)$$

一方、この系に対するNewmark- β 法($\beta=1/4$)の特性方程式 $z = e^{-\alpha\tau}$ は、差分方程式を z 変換することによって、次式のように与えられる⁽³⁾。

$$\left(1 + \frac{\alpha_0\tau}{2}\right)z^2 - 2z + \left(1 - \frac{\alpha_0\tau}{2}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 τ は時間刻みである。上式を z に関して解き、さらに対数変換すると次式が得られる。

$$\alpha\tau = -\ln \left| \frac{1 - \frac{\alpha_0\tau}{2}}{1 + \frac{\alpha_0\tau}{2}} \right| \quad \dots\dots\dots (6)$$

上式は、系の固有値と時間刻みの積 $\alpha_0\tau$ がNewmark- β 法によって $\alpha\tau$ にひずまされることを示す。 $\alpha_0\tau$ と $\alpha\tau$ の関係を図5に示す。図2に示す油圧系では、節点2における $\alpha_0\tau (=c_{22}\tau/m_2)$ はチェック弁の減衰係数 c_{22} , c_{21} によって 5×10^{-2} から 5×10^5 まで変化していることがわかる。 $\alpha_0\tau = 5 \times 10^{-2}$ では、 $\alpha\tau/\alpha_0\tau \approx 1$ となるが、 $\alpha_0\tau = 5 \times 10^5$ では $\alpha\tau/\alpha_0\tau \approx 0$ となり、固有値が大きくひずまされていることがわかる。

3・3 付加質量法による特性の改善 3・2節の検討によって高減衰断片線形要素に対しては、時間刻みを小さくすることなく、付加質量 Δm を与えることによって $\alpha_0\tau$ を小さくし、数値積分の特性を改善することができそうである。しかし、あまり大きな Δm を与えると、応答性が悪化し解析結果に悪影響を与える可能性がある。そこで、1自由度の減衰-質点系モデルを用いて、 $\alpha_0\tau$ を変化させたときのステップ応答特性を検討する。

まず、 $c\tau$ を一定にし、 m を変化させることによって $\alpha_0\tau = c\tau/m$ を変化させたときの解析結果を、図6に示す。この図から、 m を大きくして $\alpha_0\tau$ を小さくすると、流量 $\dot{x}$ が滑らかに変化しているが、 m を小さくして $\alpha_0\tau$ を大きくすると、 $\dot{x}$ の変化が激しくなり、 $\alpha_0\tau = 10^3$ では時間刻みごとに振動していることがわ

Fig. 6 Step response characteristics by adding mass

Fig. 7 Step response characteristics by changing time step

かる。

一方、 $a_0 = c/m$ を一定にし、 τ を変化させたときの解析結果を図7に示す。この場合、流量に対する時定数 T は $T = m/c = 0.1$ s となるが、時間遅れは $a_0\tau = 1$ までは大きくないことがわかる。しかも、このときの時定数は $T = 1/a_0 = \tau$ となっていることがわかる。通常、時間刻み τ の選定に際しては、解析したい挙動を十分表現できる程度に小さくしており、 $a_0\tau = 1$ となるように m を決めても応答性には影響を与えないことがわかる。

以上の検討結果から、高減衰断片線形要素に対しては、 $a_0\tau = 1$ すなわち $\Delta m = c\tau$ となるように付加質量を与えることによって、応答性に影響を与えず、しかも流量 $\dot{x}$ および加速度 $\ddot{x}$ の精度が向上することによって、折れ曲がり点の予測を容易にすることができる。

3・4 解析例 ここでは、付加質量法の妥当性を

(a) Flow rate

(b) Acceleration

Fig. 8 Simulation results by adding mass

検証するために、図2に示した油圧系の解析を行う。3・3節において示したように、チェック弁の減衰係数 $c_2(c_{21}, c_{22})$ に比例した付加質量 $\Delta m_2 = c_2\tau$ を計算し、各時間ステップごとにチェック弁部に組み込み、図4と同様の解析を行った。その結果を図8に示す。この図から、時間3～7sにおいても加速度 $\ddot{x}$ の変動は小さく抑えられており、しかも流量の応答性に関しては付加質量を与えていないときの結果と同等であることがわかる。また、折れ曲がり点通過に関する繰返し計算回数は、9363回から2回に減少した。

4. 高剛性断片線形系の挙動と精度検討

4・1 高剛性断片線形系の挙動 次に、高剛性断片線形要素を含む油圧系におけるモデル化と、その挙動について示す。そこで、図9に示すように高剛性断片線形要素としてコントロール弁モデルを考える。コントロール弁のスプール部にはばねが取付けられており、さらにストローク制限のためストップが設けられている。このときのコントロール弁スプール部のばね特性を断片線形系としてモデル化したものが、図10である。この場合ストップのモデル化は、ばね定数 k_1 を原点付近のスプール部ばね定数 k_2 より十分大きな値(10^6 倍)として、モデル化している。また、スプール部には線形な減衰が作用しているものとし、減衰比を原点付近では0.1、ストップ部では1とした。

この系に図11(a)に示すようなパイロット力 f が

Fig. 9 Control valve model

Fig. 10 Nonlinear characteristics of control valve

作用したときの応答を解析する。時間刻み τ は、原点付近のばね定数によって決まる固有周期 (0.063 s) の 1/20 以下である 0.001 s とした。このときのスプール部変位 x と加速度 $\ddot{x}$ を図 11(b), (c) に示す。これらの図から、 $\ddot{x}$ が時間 0.3~0.7 s において、時間刻みごとに大きく振動していることがわかる。これは、時間 0~0.3 s ではスプール部のばね定数は k_2 であるが、時間 0.3~0.7 s では k_1 となるためと考えられる。そのため、 $\dot{x}$, $\ddot{x}$ を用いて折れ曲がり点を予測するためには、十分小さな時間刻みにする必要があり、解析時間も増加する。そこで、時間刻みを大きくしても精度よく折れ曲がり点を予測できる手法として、ばね定数と時間刻みの二乗に比例した質量を付加する手法(付加質量法)の検討を行う。

4.2 数値積分法の性質 付加質量法による高剛性断片線形系の数値積分における特性改善効果を評価するために、3.2 節と同様な手法を用いて、その性質を検討する。ここでは簡単化のため、1 自由度のばね-減衰-質点系モデルを考える。この系の運動方程式は、外力項を無視すると次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (7)$$

ここで、 $x = Xe^{i\omega t}$ とおき整理すると、二次系の固有値 λ_0 が得られる。

$$\lambda_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0 = -\zeta_0\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2} \quad (8)$$

ここで、 $\zeta_0 = c/2\sqrt{mk}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $i = \sqrt{-1}$ である。一方、この系に対する Newmark- β 法 ($\beta=1/4$) の特性方程式 $z = e^{i\omega\tau}$ は、差分方程式を z 変換することに

(a) Pilot force

(b) Spool displacement

(c) Acceleration

Fig. 11 Simulation results of control valve model

よって、次式のように与えられる⁽³⁾。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \zeta_0\omega_0\tau + \frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right)z^2 - \left(2 - \frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\right)z \\ & + \left(1 - \zeta_0\omega_0\tau + \frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで、 τ は時間刻みである。上式を z に関して解き、さらに対数変換すると次式が得られる。

$$\lambda\tau = \alpha\tau \pm i\beta\tau \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\alpha\tau = \ln \left| \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2\tau^2}{4}\right)^2 + \omega_0^2\tau^2(1 - \zeta_0^2)}}{1 + \zeta_0\omega_0\tau + \frac{\omega_0^2\tau^2}{4}} \right| \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\beta\tau = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0\tau\sqrt{1 - \zeta_0^2}}{1 - \frac{\omega_0^2\tau^2}{4}} \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

上式は系の固有値と時間刻みの積 $\lambda_0\tau = \alpha_0\tau \pm i\beta_0\tau$ か³⁾、

 Fig. 12 Eigenvalue distortion $\lambda_0\tau$ vs. $\lambda\tau$

 Fig. 13 Distortion of damping ratio ζ_0 vs. ζ

Newmark- β 法によって $\lambda\tau = \alpha\tau \pm i\beta\tau$ にひずまされることを示す。 $\lambda_0\tau$ と $\lambda\tau$ の関係を図12に示す。厳密積分計算の特性は、 $\omega_0\tau = \text{一定}$ の点が原点Oを中心とした円周上に乗り、 $\zeta_0 = \text{一定}$ の点が原点Oを通る直線上に乗る。数値積分の特性根はこのような円周や直線上に乗らない部分がひずみとして生じる。図9に示す油圧系では、 $\omega_0\tau$ はコントロール弁のばね定数 k_2, k_1 によって 10^{-1} から 10^2 のオーダーまで変化していることがわかる。 $\omega_0\tau = 10^{-1}$ では、 $\alpha\tau/\alpha_0\tau \approx 1$ 、 $\beta\tau/\beta_0\tau \approx 1$ となるが、 $\omega_0\tau = 10^2$ では $\alpha\tau/\alpha_0\tau \approx 0$ 、 $\beta\tau \approx \pi$ となり、固有値が大きくひずまされていることがわかる。

4.3 付加質量法による特性の改善 4.2節の検討によって高剛性断片線形要素に対しては、時間刻みを小さくすることなく、付加質量 Δm を与えることによって $\omega_0\tau$ を小さくし、数値積分の特性を改善することができそうである。しかし、あまり大きな Δm を与えると、応答性が悪化し解析結果に悪影響を与える可能性がある。そこで、1自由度のばね-減衰-質点系モデルを用いて、 $\omega_0\tau$ を変化させたときのステップ応答特性を検討する。なお、減衰比は $\zeta_0 = 1$ とした。

まず、 m を変化させることによって $\omega_0\tau$ を変化させたときの解析結果を、図14に示す。この図から、 m

Fig. 14 Step response characteristics by adding mass

Fig. 15 Step response characteristics by changing time step

を大きくして $\omega_0\tau$ を小さくすると、変位 x が滑らかに変化しているが、 m を小さくして $\omega_0\tau$ を大きくすると、 x の変化が激しくなり、 $\omega_0\tau = 10^2$ では時間刻みごとに振動していることがわかる。

一方、 τ を変化させることによって $\omega_0\tau$ を変化させたときの解析結果を図15に示す。この図から、時間遅れは $\omega_0\tau = 1$ までは大きくないことがわかる。しかも、このときの固有周期は $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\tau$ となっていることがわかる。通常、時間刻み τ の選定に際しては、解析したい挙動を十分表現できる程度に小さくしており、 $\omega_0\tau = 1$ となるように m を決めても応答性には影響を与えないことがわかる。

さらに、 $\omega_0\tau = 1$ のときの ζ_0 と ζ の関係は図13に示すように、ほぼ直線的に変化しており、減衰率のひずみはほとんど発生しないことがわかる。

以上の検討結果から、高剛性断片線形要素に対しては、 $\omega_0\tau = 1$ すなわち $\Delta m = k\tau^2$ となるように付加質量

(a) Spool displacement

(b) Acceleration

Fig. 16 Simulation results by adding mass

を与えることによって、応答性に影響を与えず、しかも変位 x および加速度 $\ddot{x}$ の精度が向上することによって、折れ曲がり点の予測を容易にすることができる。

4・4 解析例 ここでは、付加質量法の妥当性を検証するために、図9に示した油圧系の解析を行う。4・3節において示したように、スプールストップ部のばね定数 k_1 に比例した付加質量 $\Delta m = k_1 \tau^2$ を計算し、ストップに当たっているときのみスプール部節点に組み込み、図11と同様の解析を行った。その結果を図16に示す。この図から、時間 $0.3 \sim 0.7$ s においても加速度 $\ddot{x}$ の変動は小さく抑えられており、しかも変位の応答性に関しては、付加質量を与えていないときの結

果と同等であることがわかる。また、折れ曲がり点通過に関する繰返し計算回数は、75回から7回に減少している。

5. 結 言

スティフな断片線形要素を含む系の時刻歴応答解析において、時間刻みに対応する付加質量を与える手法(付加質量法)について検討した。その結果、以下の結論を得た。

(1) 高減衰 c を有する断片線形要素に対しては、付加質量 Δm として、 $\Delta m = c\tau$ を付加することによって数値積分の特性を改善することができる。しかも、応答性に関しては、時定数が時間刻みとなり、実用上問題ない。

(2) 高剛性 k を有する断片線形要素に対しては、付加質量 Δm として、 $\Delta m = k\tau^2$ を付加することによって数値積分の特性を改善することができる。しかも、応答性に関しては、固有周期が時間刻みの 2π 倍となり、実用上問題ない。

(3) 本手法を用いることによって、チェック弁やコントロール弁を含む油圧パワーラインの動的シミュレーションを効率よく、しかもタフに解析できる。

最後に、本研究を進める上で貴重なご助言をいただいた芦屋大学藤川猛教授に深く感謝の意を表す。

文 献

- (1) 藤川猛・ほか2名, R&D神戸製鋼技報, 34-3(1984), 109-110.
- (2) 今西悦二郎・ほか3名, 機論, 53-492, C(1987), 1711-1719.
- (3) 清水信行・ほか4名, 機論, 46-401, C(1980), 26-41.
- (4) 廣岡栄子・井上喜雄, D&D講演論文集, No. 940-26(1994), 113-116.