非線形微分方程式の数値解法を利用した最大固有値 最小化問題の簡単な解法*

(双線形行列不等式に基づく H_∞ 制御系設計のための基礎的検討)

井 前 讓^{*1}, 古 館 貴^{*2}, 菅 原 静 華^{*3}

A Simple Numerical Method for Minimizing the Maximum Eigenvalues of Symmetric Matrices via Nonlinear Differential Equation Solvers (Towards H_∞ control design based on bilinear matrix inequalities)

Joe IMAE, Takashi FURUDATE and Shizuka SUGAWARA

We present a simple numerical method for minimizing the maximum eigenvalues of real-valued symmetric matrices, based on nonlinear differential equation solvers. First, we convert the minimization problem for the maximum eigenvalues, which is nondifferentiable, into a differentiable optimization problem by means of interior point methods. Second, making use of differential equation solvers, we present a simple method for solving the optimization problem. Our method does not require optimization techniques such as the Newton method. Lastly, we demonstrate the effectiveness of the algorithm through some simulation experiments.

Key Words: Maximum Eigenvalues, Minimization Problems, Bilinear Matrix Inequality, Computational Methods, Ordinary Differential Equation Solvers

1. は じ め に

H_∞ 制御系設計において、線形行列方程式(LMI)に基づく手法が最近注目を集めている⁽¹⁾⁽²⁾。その理由として次のことが考えられる。 H_∞ 制御においては、Riccati 方程式を利用する Doyle ら⁽³⁾の手法が一般的であるが、いわゆる非標準問題に関してはその適用に際し困難が伴うこと、得られる制御器は次数が高くなることなどが問題点として指摘されている。それに対し、LMI に基づく手法は導出方法が比較的容易である上に、非標準問題にも適用できること、低次元の制御器が取扱い可能であること、さらに、LMI に関して効率的な数値解法が十分整備されている⁽⁴⁾ ことなどが利点として挙げられる。

ところで、 H_∞ 制御問題を LMI 表現へと変換する際、その変形の途中で双線形行列不等式(BMI)を利用するのが一般的である。したがって、BMI に関する効率的な数値解法が整備されるならば、LMI 表現にこだわることなく、BMI 表現から直接に H_∞ 制御系

設計が可能となる。しかし残念ながら BMI に関する研究は現時点では少ない。最近になって、その重要性が指摘され、ようやく BMI の研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾が始まったばかりである。我々は、BMI に基づく新たな H_∞ 制御系設計法の確立を目指し、その基礎的検討を行う。すなわち、LMI/BMI を特別な場合として含む、より一般的な非線形行列不等式をとりあげ、 H_∞ 制御系設計問題と関連の深いといわれる実対称行列の最大固有値最小化問題に関し、数値計算アルゴリズムの開発を試みる。 H_∞ 制御と最大固有値最小化問題との関連については第 2 章で詳述する。

ところで最大固有値最小化問題は最小化すべき関数が必ずしも微分可能ではないため(以後、非可微分と呼ぶ)、可微分の最小化問題よりも取扱いが困難となることが知られている。非可微分最小化問題への一般的な接近法としては大きく分けて 2 種類ある。微分に代わる概念(subgradient など)を利用する立場と非可微分関数を可微分関数で近似する立場である。中でも、制御系設計の立場から注目を集めているのは、前者に関してはだ円体法および切除平面法であり⁽⁷⁾、後者に関しては内点法を基礎とする解析的中心法⁽⁸⁾である。しかし、だ円体法および切除平面法は微分に変わる概念を必要とすること、また、解析的中心法は実

* 原稿受付 1996 年 2 月 19 日。

*1 正員、岩手大学工学部(〒020 盛岡市上田 4-3-5)。

*2 岩手大学大学院。

*3 岩手大学学部生。

行可能領域を常に注意する必要があるなど問題は残る。たとえば、文献(9)では、解析的中心が境界に近づきすぎた場合のための対処法としてリフティング操作を併用することが提案されている。Gahinet ら⁽¹⁰⁾の射影法は実行可能領域の問題を解決しているといわれているが、アルゴリズムは複雑である。

本論文では、最大固有値最小化問題に関し、内点法を用いた簡単な計算手法を提案する。はじめに、内点法を利用して元の問題を微分可能な最小化問題へと変換する。その際、種々の変換が考えられるが、できる限り一般的な形への変換を試みる。次に、変換された最小化問題の解法として、微分方程式法⁽¹¹⁾⁽¹²⁾を採用する。これは、微分方程式の解軌道をたどることにより最適解を求めようとする方法である。この方法の利点は、非線形最適化手法(ニュートン法など)を特に準備する必要もなく、常微分方程式の一般的な数値解法(ルンゲクッタ法など)を用いるだけで最適解が得られる点、および、もし解軌道が存在するならばそれは実行可能領域内に存在することが期待され、実行可能領域に対し特別に注意する必要がない点などである。

2. 問題の定式化

本章では最大固有値最小化問題が H_∞ 制御系設計問題から自然な形で導かれることを示す。

2.1 H_∞ 制御 H_∞ 制御に関しては次のことが一般に知られている⁽¹⁾。一般化プラント P が

- (1) (A, B_2) が可安定
- (2) (A, C_2) が可検出

の仮定のもと

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \cdots \cdots \cdots (1) \\ y &= C_2 x + D_{21} w\end{aligned}$$

で与えられたとする。ただし、状態量 $x \in \mathcal{R}^{n_1}$ 、外乱 $w \in \mathcal{R}^{m_1}$ 、制御入力 $u \in \mathcal{R}^{m_2}$ 、制御量 $z \in \mathcal{R}^{p_1}$ 、出力 $y \in \mathcal{R}^{p_2}$ である。ここで、制御器 K を

Fig. 1 Feedback system

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K x_K + B_K y, \quad x_K \in \mathcal{R}^k \cdots \cdots \cdots (2) \\ u &= C_K x_K + D_K y\end{aligned}$$

とし、制御則 $u = Ky$ によりフィードバック系を構成する(図1)。このとき

- (1) 閉ループシステムが内部安定となる
- (2) 外乱 w から制御量 z への伝達関数の H_∞ ノルムが γ より小さくなる

ための必要十分条件、すなわち準最適 H_∞ 制御器が存在するための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \cdots \cdots (3)$$

を満足する正定行列 $X_{cl} \in \mathcal{R}^{(n_1+k) \times (n_1+k)}$ が存在することである。ここに、

$$\begin{aligned}A_{cl} &= A_0 + \bar{B} \bar{\Theta} \bar{C}, \quad B_{cl} = B_0 + \bar{B} \bar{\Theta} \bar{D}_{21} \\ C_{cl} &= C_0 + \bar{D}_{12} \bar{\Theta} \bar{C}, \quad D_{cl} = D_{11} + \bar{D}_{12} \bar{\Theta} \bar{D}_{21} \\ A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = [C_1 \quad 0] \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{D}_{12} &= [0 \quad D_{12}], \quad \bar{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$$

である。LMI に基づくアプローチでは、特殊な行列を用いて式(3)から LMI 条件が導かれる。詳しくは文献(1)を参照されたい。式(3)は X_{cl} または Θ に対し線形となる双線形行列不等式(BMI)となっている。したがって、BMI に関する効率的な数値解法が存在すれば、

$$M(X_{cl}, \Theta) < 0 \cdots \cdots \cdots (4)$$

ただし

$$\begin{aligned}M(X_{cl}, \Theta) &= \begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T D_{cl}^T & 0 \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T & 0 \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I & -X_{cl} \\ 0 & 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (5)\end{aligned}$$

を満足する X_{cl} 、 Θ を求めることにより、制御器 K の次元が指定された H_∞ 制御系設計問題を直接的に解くことができる。この方法は、大域解への収束性、Doyle らの結果との比較検討、および準最適 H_∞ 制御器のパラメータ化などにおいて問題点は残るものの、LMI 手法と比較して設計手順は簡略化され、より実用的な手法といえる。ところで、式(4)は可解問題と

呼ばれ、次の表現と等価である。

$$\lambda_{\max}(M(X_{cl}, \Theta)) < 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)'$$

ただし、 $\lambda_{\max}(\cdot)$ は最大固有値を表す。

2・2 最大固有値最小化問題 本論文では問題 (4)' を一般化した次のような最大固有値最小化問題

$$\min_{\lambda} \lambda_{\max}(A(x)) \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

を取扱う。ここに、 $x \in \mathcal{R}^n$ は変数ベクトルであり、 $A(x) = A(x)^T \in \mathcal{R}^{m \times m}$ は x を変数とする実対称行列である。ところで、未知変数行列 X_{cl}, Θ をそれぞれ適当にベクトル化してそれらをひとまとめにして新たに x とおき、さらに $M(\cdot)$ を $A(\cdot)$ とおきかえることにより、問題 (4)' は

$$\lambda_{\max}(A(x)) < 0 \quad \cdots \cdots \cdots (6)'$$

と表現することができる。また、式 (6) と (6)' との関係については、式 (6) の解が存在して、それが負であれば、その解は式 (6)' を満足することから明らかである。

問題 (6) は $\lambda_{\max}(\cdot)$ を含むため非可微分最小化問題となる。この節では $\lambda \in \mathcal{R}^1$ を新たに未知変数として導入することにより、問題 (6) を可微分な最小化問題へと変換する。その際、次の 3 点に注意することは有益である。ただし、最適解は存在するものとし、 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ とおく。

(1) 任意の $x \in \mathcal{R}^n$ に対し、 $A(x)$ の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とするとき、 $\det(\lambda_{\max}I - A(x)) = 0$ が成立する。したがって、最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ に対して $\det(\bar{\lambda}I - A(\bar{x})) = 0$ が成立する。このことは、最適解を求めるとき $\det(\lambda I - A(x)) = 0$ に注意する必要があることを示している。

(2) 最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ に関しては、 $\bar{\lambda} = \lambda_{\max}(A(\bar{x}))$ の関係がある。したがって、 $\lambda > \lambda_{\max}(A(x))$ を満足する (λ, x) を用いて任意の精度 (ユークリッドノルムの意味) で最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ を近似することができる。このことは、最適解探索のための (λ, x) の実行可能領域を $\lambda > \lambda_{\max}(A(x))$ 、すなわち $\lambda I - A(x) > 0$ とするとき、十分に最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ の探索が実行可能であることを示している。なお、 $\lambda I - A(x) > 0$ ならば $\det(\lambda I - A(x)) > 0$ がいえることに注意することは重要である。

(3) 任意の $x \in \mathcal{R}^n$ に対し、 $\lambda_{\max}(A(x)) \geq \bar{\lambda}$ である。このことは、 $\lambda > \lambda_{\max}(A(x))$ なる (λ, x) において、最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ を求めるためには λ を最小にすることが重要であることを示している。

以上の注意点 3 点に留意するならば、次のような可微分最小化問題が得られる。

$$\min_{(\lambda, x) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n} \{r_0 J_0(\lambda, x) + r_1 J_1(\lambda, x) + r_2 \lambda\} \quad \cdots (7)$$

ここに、 r_0, r_1, r_2 は重み付けパラメータであり、

$$J_0(\lambda, x) = \begin{cases} \det(\lambda I - A(x)); & \lambda I - A(x) > 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad \cdots \cdots (8)$$

$$J_1(\lambda, x) = \begin{cases} [\det(\lambda I - A(x))]^{-1}; & \lambda I - A(x) > 0 \\ \infty & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad \cdots \cdots (9)$$

である。なお、 J_0, J_1 は上述の注意点 (1), (2) をそれぞれ評価関数表現に適した形に表現し直したものである。 J_1 に関しては、逆関数表現による内点法を採用した。

以下では議論を簡略化するため $r_0 = 1$ とする。したがって、式 (7) は次のようになる。

$$\min_{(\lambda, x) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n} \{J_0(\lambda, x) + r_1 J_1(\lambda, x) + r_2 \lambda\} \quad \cdots \cdots (7)'$$

(注意 1) 文献 (13) では $r_0 = 0, r_1 > 0, r_2 = 1$ の場合の報告がある。ただし、関数 (9) として対数関数表現が用いられており、本論文とは異なる。

3. アルゴリズム

アルゴリズムの提案に際し、重要となるいくつかの性質について述べる。

まず、はじめに

$$J(\lambda, x) = J_0(\lambda, x) + r_1 J_1(\lambda, x) + r_2 \lambda \quad \cdots \cdots (10)$$

とおくとき、その微係数 $\partial J / \partial \lambda, \partial J / \partial x$ を求める。 $\lambda I - A(x) > 0$ とするとき、簡単な計算により以下のよう

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial \lambda} &= K_1(\lambda, x) \frac{\partial(\det(\lambda I - A(x)))}{\partial \lambda} + r_2 \\ &= K_2(\lambda, x) \text{tr}[(\lambda I - A(x))^{-1}] + r_2 \quad \cdots \cdots (11 \cdot a) \\ \frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial x_i} &= K_1(\lambda, x) \frac{\partial(\det(\lambda I - A(x)))}{\partial x_i} \\ &= -K_2(\lambda, x) \text{tr}\left[(\lambda I - A(x))^{-1} \frac{\partial A(x)}{\partial x_i}\right] \quad \cdots \cdots (11 \cdot b) \end{aligned}$$

ここに、 $\text{tr}[\cdot]$ は trace を表し

$$K_1(\lambda, x) = 1 - \frac{r_1}{[\det(\lambda I - A(x))]^2} \quad \cdots \cdots (12 \cdot a)$$

$$K_2(\lambda, x) = K_1(\lambda, x) \det(\lambda I - A(x)) \quad \cdots \cdots (12 \cdot b)$$

である。証明は付録を参照されたい。

次に、非線形微分方程式

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial \lambda}, \quad \lambda(0) = \lambda_0 \quad \cdots \cdots (13 \cdot a)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial x}, \quad x(0) = x_0 \quad \cdots \cdots (13 \cdot b)$$

の解と問題 (7)' との関連について検討する。ここに、

変数 (λ, x) が時間関数 $(\lambda(t), x(t))$, $t \in [0, \infty)$ として与えられたと考える。文献(11), (12)の議論を参考にすれば、初期値に関しては $\lambda_0 I - A(x) > 0$ を満足するものとするとき、微分方程式(13)の解 $(\lambda(t), x(t))$ は、存在するならば実行可能領域 $\lambda I - A(x) > 0$ に存在し、 $t \rightarrow \infty$ の値 $(\lambda(\infty), x(\infty))$ は問題(7)'の最適解の必要条件

$$\left. \frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda(\infty), x=x(\infty)} = 0 \quad \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$\left. \frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial x} \right|_{\lambda=\lambda(\infty), x=x(\infty)} = 0 \quad \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

を満足すると期待される。ここに、 $(\lambda(\infty), x(\infty))$ は非線形微分方程式(13)の一つの平衡点である。

最後に最大固有値最小化問題(6)と可微分最小化問題(7)'との関連性について検討する。それに関しては(7)'の重み付けパラメータ r_1, r_2 の選定の仕方が重要な役割を果たす。本報では、非線形計画法で用いられる混合ペナルティ法のパラメータ決定法を参考にし、 $r_1 \rightarrow 0, r_2 \rightarrow 0 (r_1 \ll r_2)$ となるように選ぶものとする。なぜなら、これにより、パラメータの極限値の状態においては問題(6)と(7)'が等価になることが期待できるからである⁽¹¹⁾。実際、後述する数値計算では問題(6)と(7)'の等価性に関し、極めて良好な結果が得られている。しかし、この点に関しては、さらなる理論的な検討が必要である。本論文では、数値計算上の収束証明にとどめる。

以上の議論を参考にし、最大固有値最小化問題(6)の最適解を求めるためのアルゴリズムを以下に示す。

[アルゴリズム]

<ステップ1>

重み付けパラメータに関する無限数列 $\{r_1^i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{r_2^i\}_{i=0}^{\infty}$ および初期値 (λ_0^0, x_0^0) を選ぶ。ただし、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_1^i = 0 \quad (r_1^0 \geq r_1^1 \geq \dots > 0) \quad \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_2^i = 0 \quad (r_2^0 \geq r_2^1 \geq \dots > 0) \quad \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

であり、 $r_1^i \ll r_2^i (i=0, \dots)$ とする。

<ステップ2>

$$i=0$$

<ステップ3>

初期値 (λ_0^i, x_0^i) のもと微分方程式(13)の解 $(\lambda^i(t), x^i(t))$, $t \in [0, \infty)$ を求める。ここに、重み付けパラメータとしては r_1^i, r_2^i を採用する。

<ステップ4>

$i=i+1$ とする。さらに、 $\lambda_0^i = \lambda^{i-1}(\infty)$, $x_0^i = x^{i-1}(\infty)$ としてステップ3へもどる。

(注意2) 初期値の (λ_0^0, x_0^0) の決定法の一つは、 $\lambda_{\max}(A(x_0^0))$ を計算したのち $\lambda_0^0 > \lambda_{\max}$ なる λ_0^0 を求めれ

ばよい。

(注意3) 問題(7)'の解法には可微分最小化問題に対し開発された種々の計算手法が適用可能であるが、本手法は微分方程式を解くだけで最適解が得られることから、最適化手法に関する特別な知識を必要とせず、実用的である。

(注意4) 微分方程式法は、一般的には計算効率の点で疑問視されてはいるものの、本問題に関しては次の点で有効な手法といえる。すなわち、解軌道が存在するならば、その連続性から実行可能領域内に存在することが期待される。したがって、実行可能領域に対し特別に注意する必要もなく、正確な解軌道の算出に専念するだけで十分である。

4. 計算例

簡単な例題により提案手法の正当性を検証する。本手法のプログラミングにはQuickBASICを用い、微分計算には4次のルンゲ・クッタ法を用いた。計算はすべて倍精度で行った。

[例題1]

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}, x \in \mathcal{R} \quad \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる問題(6)を取上げる。 $A(x)$ は x に関して線形である。この場合の最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ は $(0, 0)$ である。

初期値 (λ_0^0, x_0^0) を $(10, 3)$ として最終的に $t=8.5$ で $\lambda = 3.044 \times 10^{-2}$, $x = 2.291 \times 10^{-18}$ が得られた。その際、 r_1 は10から 10^{-6} へ、 r_2 は100から0.01へと徐々に変化させた。また、アルゴリズムのステップ3においては、 $\lambda(t), x(t)$ の解軌道が十分に定常になったところで計算を打ち切った。 λ と x の関係を図2に示す。

Fig. 2 Behavior of λ versus x (example 1)

Fig. 3 Behavior of λ versus x (example 2)

Fig. 4 Behavior of λ versus x (example 3)

[例題 2]

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 - 1 \end{bmatrix}, x \in \mathcal{R} \quad (17)$$

とする。 $A(x)$ は x に関して線形では与えられていない点に注意されたい。 LMI 条件に限らず、それ以外の拘束条件に対しても本手法は適用可能であることを、本例題により示す。最適解 $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ は例題 1 と同じく $(0, 0)$ である。計算の結果 $t=5.8$ で $\lambda=9.941 \times 10^{-4}$, $x=6.049 \times 10^{-7}$ が得られた。初期値および r_1, r_2 に関しては例題 1 と同じとした。 λ と x の関係を図 3 に示す。

[例題 3]

$$A(x) = \begin{bmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x-1 \end{bmatrix}, x \in \mathcal{R} \quad (18)$$

とすると、 $A(x) < 0$ なる x を求める問題を扱う。この種の問題は可解問題と呼ばれ、制御系設計では重要な問題の一つである。本手法が最小化問題だけではなく、可解問題にも適用可能であることを本例題により示す。

初期値を例題 1 と同じとすると、 $r_1=10, r_2=100$

Fig. 5 Computed trajectories of λ, K and P (example 4)

のもと $t=1.0$ で $\lambda=-46.29, x=46.71$ が得られた。この場合明らかに $A(x)$ は負定行列である。 λ と x の関係を図 4 に示す。

[例題 4]

線形システム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (19)$$

をコントローラ $u=Kx$, $K=[k_1 \ k_2]$ により安定化することを考える。ただし、閉ループ固有値の実部は $-\alpha$ より小さくしなければならないとする。このとき、リアプノフの定理より

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + 2\alpha P < 0 \quad (20)$$

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \quad (21)$$

なる正定対称行列 P

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

が存在することと等価である。

この種の制御系設計問題にも適用が可能であることを示す。すなわち、 $x=[k_1, k_2, P_{11}, P_{12}, P_{22}]^T$ とおくと、

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} + 2\alpha P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} < 0$$

を満足する x を求める問題となる。 $\alpha=0.5$ および初期値 $\lambda=1.5, k_1=-1, k_2=-1, P_{11}=1, P_{12}=1, P_{22}=1$ に対し最終的に $r_1=10, r_2=100$ のもと、 $t=0.1$ で $\lambda=-3.557, k_1=-1.923, k_2=-0.8093, P_{11}=4.122, P_{12}=0.2020, P_{22}=3.948$ が得られた。閉ループ固有値は $-1.4614 \pm 0.7723i$ であり、設計仕様を十分に満たしている。 λ, K, P の関係を図 5 に示す。

5. お わ り に

制御系設計 (LMI/BMI 設計手法など) との関連が指摘されている実対称行列の最大固有値最小化問題を上げた。まずはじめに、本来非可微分な最大固有値最小化問題を、内点法を利用して従来とは異なる、より一般的な可微分な等価問題を導いた。次に、非線形微分方程式の数値解法を利用した簡単なアルゴリズムを提案した。最後に例題 4 題の数値計算により本アルゴリズムの数値計算上の収束性を検証した。本手法は行列の性質を線形に限定していないところ、またニュートン法などのような非線形最適化手法の知識をまったく必要としないところが特徴である。理論的収束証明および具体的設計手法への適用は今後の課題である。さらに、BMI に基づく手法の開発のためには、BMI の構造を積極的に利用した解法が望ましい。この点に関しても今後の課題である。

付 録

 $\partial J(\lambda, x)/\partial \lambda, \partial J(\lambda, x)/\partial x$ の導出

$\lambda I - A(x) > 0$ とするとき、 $J(\lambda, x)$ は

$$J(\lambda, x) = \det(\lambda I - A(x)) + r_1[\det(\lambda I - A(x))]^{-1} + r_2\lambda$$

で与えられる。したがって、 λ に関しては、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\lambda, x)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial[\det(\lambda I - A(x))]}{\partial \lambda} \\ &+ r_1 \frac{\partial[\det(\lambda I - A(x))]^{-1}}{\partial \lambda} + r_2 \\ &= \{1 - r_1[\det(\lambda I - A(x))]^{-2}\} \\ &\times \frac{\partial[\det(\lambda I - A(x))]}{\partial \lambda} + r_2 \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} &\frac{\partial[\det(\lambda I - A(x))]}{\partial \lambda} \\ &= \sum_{ij} \left\{ [\Delta_{ij}(\lambda I - A(x))] \cdot \left[\frac{\partial(\lambda I - A(x))}{\partial \lambda} \right]_{ij} \right\} \\ &= \text{tr} \left[\text{adj}(\lambda I - A(x)) \cdot \frac{\partial(\lambda I - A(x))}{\partial \lambda} \right] \end{aligned}$$

$$= \det(\lambda I - A(x)) \text{tr}[(\lambda I - A(x))^{-1} \cdot I]$$

であることに注意すると式(11・a)が得られる。ただし、 $[\cdot]_{ij}$ は $[\cdot]$ の ij 要素、 $\Delta_{ij}(\cdot)$ は行列 $(\cdot)$ の ij 要素の余因子、 $\text{adj}(\cdot)$ は $(\cdot)$ の余因子行列を表す。 $\partial J(\lambda, x)/\partial x_i$ に関しても

$$\begin{aligned} &\frac{\partial[\det(\lambda I - A(x))]}{\partial x_i} \\ &= \sum_{lm} \left\{ [\Delta_{lm}(\lambda I - A(x))] \left[\frac{\partial(\lambda I - A(x))}{\partial x_i} \right]_{lm} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \text{adj}(\lambda I - A(x)) \cdot \left[\frac{\partial(\lambda I - A(x))}{\partial x_i} \right] \right\} \\ &= -\det(\lambda I - A(x)) \text{tr} \left[(\lambda I - A(x))^{-1} \frac{\partial A(x)}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

に注意するならば同様の議論により式(11・b)が導かれる。証明終わり。

文 献

- (1) Gahinet, P. and Apkarian, P., *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 4 (1994), 421.
- (2) Iwasaki, T. and Skelton, R. E., *Automatica*, 30-8 (1994), 1507.
- (3) Doyle, J. K., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B., *IEEE Trans.*, AC-34 (1989), 831.
- (4) Beck, C., *Proc. 30th Conf. Decision and Control*, (1991-12), 1259, Brighton, Engalnd.
- (5) Goh, K. C.,ほか 4 名, *Proc. Am. Control Conference*, (1994-6), Baltimore, 850, Maryland.
- (6) Goh, K. C., Safanov, M. G. and Papavassilopoulos, G. P., *Proc. 33rd Conf. Decision and Control*, (1994-12), 2009, Lake Buena. Vista, FL.
- (7) Boyd, S. P. and Barrat, C. H., *Linear controller design*, (1991), 311, Prentice-Hall.
- (8) Boyd, S. and Ghaoui, L. E., *Linear algebra and its applications*, (1993), 188-189, 63-111.
- (9) Fan, M. K. H. and Nekooie, B., *Proc. Am. Control Conference*, (1994-6), 831, Balimove, Maryland.
- (10) Nemirovskii, A. and Gahinet, P., *Proc. ACC94*, (1994), 840-844.
- (11) 今野浩・山下浩, 非線形計画法, (1978), 217-214, 325-330, 日科技連.
- (12) Brainin, Jr., F. H., *IBM J. Res. Develop.*, (1972), 504-522.
- (13) Jarre, F., *SIAM J. Control Optim.*, 31-5, (1993), 1360-1377.