工作機械の熱変形量推定に関する研究*

堀 三 計^{*1}, 西 脇 信 彦^{*1}, 石 富 克 也^{*2}

Study on Estimating Thermal Deformation of Machining System

Sankei HORI, Nobuhiko NISHIWAKI and Katsuya ISHITOMI

One of the machining errors is caused by thermal deformation of a machine tool. Thermal deformation is caused not only by inner heat sources such as bearings, motors and so on, but also by outer heat sources such as the room temperature variation in a machine shop. In general, when a unit power at the inner heat source is generated pulsewise or stepwise, the basic thermal deformation can be obtained analytically and experimentally. When the heating power in the source could be measured, it seems that the thermal deformation can be estimated using the basic deformation and the measured power. Therefore, the equivalent position of the inner heat source, the power generated at the source, the thermal deformation caused by the power, and so on are investigated in this study. As the results of this study, it is clarified that the thermal deformation can be estimated by measuring the temperature of the machine tool structure and that around it.

Key Words: Thermal Deformation, Phase Lag, Unit Power, Heat Flux, Surrounding Temperature Variation, Inverse Method

1. 緒論

機械部品の高精度化に伴い、機械加工に於いても μm オーダの加工精度が求められるようになってきた。しかし、現在のところ、常時 μm オーダの加工精度を維持することは難しい。その主な原因として工作機械の熱変形が挙げられる。熱変形の原因としては、モータや軸受などの内部熱源、室温の変化などの外部熱源及び切削熱などが考えられ、それらの原因による熱変形に関しては古くから研究が行われている^{(1)~(5)}。

最近の研究⁽⁶⁾⁽⁷⁾では、工作機械構造の熱変形量とその代表温度との関係をニューラルネットワークを用いて予め実験的に求めておき、加工中に測定された代表温度の値から工作機械の熱変形量を補正する方法が提案されている。しかし、この方法では代表温度の測定位置が経験と勘により決められ、温度測定位置によりその補正精度が影響を受ける。従って、工作機械内部の熱の流れを十分考慮した温度測定を行う必要があると思われる。

そこで本研究では、工作機械内部の各熱源における

発熱量と工作機械の熱変形量の関係を明らかにし、工作機械の熱変形量を補正する方法について数値解析により検討した。具体的には、各熱源でステップ状又はパルス状の発熱が生じたとき、その発熱量と工作機械構造内の温度変化及び工作機械の熱変形量の関係を明らかにし、それらの関係を用いて逆に工作機械内部の温度変化より内部熱源における発熱量を求め、その発熱量をもとに熱変形量を予測する方法について検討を行った。その際に、周囲の温度変化に伴う熱変形や工作機械内部の複数熱源の影響についても検討を行った。

2. 熱源位置の探索

工作機械では一般にモータや軸受などで熱が発生して、その熱変形が生じることが知られている。しかし、実際には配電盤など思わぬところで発熱があり、工作機械の熱変形がその発熱の影響を受けることがある。そこで、工作機械内部の熱源位置を求める方法について検討した。すなわち、駆動モータの回転数を正弦波状または矩形波状に変化させて工作機械内部の発熱量を変動させ、それにより熱源周辺の温度を変動させて、熱源の位置を求める方法について検討した。ここで、半無限固体の表面から式(1)に示すような正弦波状に変化した熱が流入すると、表面から距離 X の位置の温度

* 原稿受付 1996 年 3 月 11 日。

^{*1} 正員、東京農工大学工学部(〒184 小金井市中町 2-24-16)。^{*2} 東京農工大学大学院 [現: (株)日立製作所システム事業部 (〒101 東京都千代田区神田駿河台 4-6)]。

変動は式(2)で示されるようになる。そこで、工作機械内部の熱源での発熱を変動させ、工作機械内部の温度変動を測定すれば、地震の震源地探査のように熱源の位置や発熱量を逆に求めることができると考えられる。

$$q = q_0 + q' \sin(\omega t) \quad \dots(1)$$

$$T = [q' \cdot \exp(-k \cdot X) / \sqrt{2} \lambda k] \sin(\omega t - k \cdot X - \pi/4) \quad \dots(2)$$

$$k = (\omega / 2a)^{0.5} \quad \dots(2')$$

なお、 q は熱流束 (W/m^2) で q_0 はその定常成分、 q' はその変動成分の振幅であり、 λ は熱伝導率 ($\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$)、

Fig.1 Hollow column model of a machining center

Fig.2 Relationship between phase lag and distance from heat source

Fig.3 Researching method of heat source location

ω は周期 (rad/s)、 a は熱拡散率 (m^2/s)、 X は表面からの距離 (m)、 t は時間 (s)、 $k \cdot X$ は表面から距離 X の位置の温度変動と半無限固体表面に流入する熱量変動の間の位相である。

実際の工作機械構造のコラムをモデル化して図1に示すような中空コラムを考えた。その表面の一部に、正弦波状に $\pm 131.4\text{W}$ の熱量 ($0.5\text{W}/\text{cm}^2$ の熱流束) が流入し、その外表面の熱伝達率を $10\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ とし、内表面を断熱とした場合について、その温度変動を数値計算により検討した。具体的には、熱源の中心から温度測定位置までの最短距離 X とその点における温度と流入熱量の間の位相 $(\omega / 2a)^{0.5} X$ の関係を調べた。その結果を図2に示す。同図より位相 $(\omega / 2a)^{0.5} X$ の値がわかれば熱源までの最短距離 X が求められることがわかる。従って、図3に示すように、任意の4点(A, B, C, D)におけるそれぞれの位相を a, b, c, d とし、点Bと点C間で位相が熱源からの距離に比例して変化すると仮定して、点A及び点Dと同位相の点A'及び点D'をそれぞれ求めれば、同図のようにして熱源の位置を求めることができる。また、この方法は、複数の熱源がある時でもおのおの異なる周期で発熱している場合には、周波数解析を行うことにより、熱源を分離して探査できる。さらに、同じ周期で同位相で発熱している場合でも、それぞれの熱源極近傍で再度その位置を探査すれば分離して測定することができる。

3. 変動温度と流入熱量の関係

3.1 熱源近傍の温度 工作機械のような複雑形状の場合、温度変動より逆に流入熱流束を求める方法⁽⁸⁾は確立されていない。そこで本研究では、その逆算方法について検討した。具体的には、図4に示すような中実角柱 ($60\text{mm} \times 60\text{mm} \times 100\text{mm}$) の一方の端面から熱が流入し、その他の面で放熱 (熱伝達率 $= 10\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$) している場合を考えた。なお、角柱の材質はねずみ鋳鉄とし、差分法で計算を行った。

図5(a)に示すように、パルス状熱流束 $q_p(t)$ ($0 <$

Fig.4 Model of solid column

$t \leq \Delta t$ で $q_p(t) = q_{p0}$, $t \leq 0$ 及び $\Delta t < t$ では $q_p(t) = 0$. 但し, q_{p0} は一定, t は時間, Δt はパルス幅) が中実角柱の端面 A から流入したとき, 流入面近傍の温度 $T_p(t)$ は同図(b)に示すように変化する ($t \leq 0$ で $T_p(t) = 0$). なお, 本研究では $T_p(t)$ のことを温度特性データと呼ぶことにする.

次に, 同じ角柱端面へある任意の熱流束 $q(t)$ が流入し, その流入面近傍の温度 $T(t)$ が同図(c)の点線のように変化したとき, その温度 $T(t)$ は温度特性データ $T_p(t)$ を用いた同図(c)の実線及び式(3)に示すように近似的に表すことができる. 熱流束 $q(t)$ は, 式(3)で求めた係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ を式(4)へ代入して求めることができる. すなわち, 熱源近傍の温度を測定することにより流入熱流束を求めることができる. なお, 本研究では係数 α を補正係数と呼ぶことにする.

$$T(t) = \alpha_1 T_p(t) + \alpha_2 T_p(t - \Delta t) + \dots + \alpha_n T_p(t - (n-1)\Delta t) + \dots \quad \dots(3)$$

$$q(t) = \alpha_1 q_p(t) + \alpha_2 q_p(t - \Delta t) + \dots + \alpha_n q_p(t - (n-1)\Delta t) + \dots \quad \dots(4)$$

上記方法を確認するため, 図4の角柱端面 A から $q(t) = 10 + 5 \cdot \sin(2\pi t/60)$ kW/m² の熱流束が流入したと

き, 端面 A の温度を数値解析で求めると同時に, 時間幅 2.0 秒のパルス状熱流束が流入したときの温度特性データも同時に求め, その温度特性データより逆に流入熱流束を求めた. その結果を図6に示す. 同図に示すように熱源近傍の温度変化より流入熱量を求めることができたが, より精度を向上させるには, 近似するパルス波の時間幅を小さくするか, 又は図7に示すようにパルス状流入熱量と三角波状流入熱量を組み合わせた台形波状の流入熱流束で近似する方法が考えられる. 後者の方法を用いる場合は, 図7に示すようにパルス時間幅 Δt における端面 A の温度 T_l を測定する他に, その半分の時間 $\Delta t/2$ における端面 A の温度 $T_{0.5}$ を測定し, 式(5)と式(6)により補正係数 α, β を求める. その補正係数の値と式(7)により, 台形波状の流入熱流束を近似することができる.

$$T_l = \alpha T_{pl} + \beta T_{tl} \quad \dots(5)$$

$$T_{0.5} = \alpha T_{p0.5} + \beta T_{t0.5} \quad \dots(6)$$

$$q(t) = \alpha q_{p0} + \beta (q_{t0}/\Delta t) t \quad \dots(7)$$

従って, 端面 A の温度を上記の手法で近似すると, 式(8)の様な近似式が得られる. その結果, 図7に示す熱流束 $q_p(t)$, $q_t(t)$ と式(9)より流入熱流束を求めることができる.

Fig.5 Inverse conduction method

Fig.7 Accurate estimation method

Fig.6 Estimated heat flux using pulselike heat flux

Fig.8 Estimated heat flux using trapezoid heat flux

$$T(t) = \alpha_1 T_p(t) + \beta_1 T_i(t) + \alpha_2 T_p(t - \Delta t) + \beta_2 T_i(t - \Delta t) + \dots + \alpha_n T_p(t - (n-1)\Delta t) + \beta_n T_i(t - (n-1)\Delta t) + \dots \quad (8)$$

$$q(t) = \alpha_1 q_p(t) + \beta_1 q_i(t) + \alpha_2 q_p(t - \Delta t) + \beta_2 q_i(t - \Delta t) + \dots + \alpha_n q_p(t - (n-1)\Delta t) + \beta_n q_i(t - (n-1)\Delta t) + \dots \quad (9)$$

図4の角柱の端面から図6の場合と同じ熱流束が流入し、パルス時間幅 Δt を同じく2.0秒として、台形波状の流入熱流束で近似すると、図8に示すような近似解が得られた。その結果、図6のパルス状近似より近似精度を向上することができた。

3. 2 熱源から遠い位置の温度 熱流束 q_{p0} がステップ状に熱源から流入したとき、熱源から離れた点で測定した温度と前述のパルス波近似を用いて流入熱流束を求めた。具体的には、図4のモデルを用いて熱流入面からの距離 X と近似のパルス時間幅 Δt を変化させて流入熱流束 $q(t)$ を求めた。その結果、 X の値が大きくなると又は Δt の値が小さくなると、得られた熱流束の値がハンチングを起こした。そこでその得られた熱流束の最大値を q_{max} とし、流入熱流束 q_{p0} で無次元化して、次式のフーリエ数 Fr との関係調べた。

$$Fr = a \cdot \Delta t / X^2 \quad \dots (10)$$

ここで、 a は熱拡散率 (m^2/s)、 X は熱流入面からの距離 (m) である。図9に示されるようにフーリエ数が0.3以上であれば、本方法で逆算した熱流束値が実際に流入した値と一致することが分かった。

そこで、近似するパルス時間幅が小さいためフーリエ数が0.3以下になる場合は、予めフーリエ数が0.3以上となるパルス時間幅で求めてから、そのパルス時間幅を小さくする方法が考えられる。具体的には、熱流束 q_{p0} でパルス幅 $2\Delta t$ のパルス状熱流束 $q_{2p}(t)$ が流入したときの温度特性データ $T_{2p}(t)$ を予め求めておき、次式のようにして補正係数 $\alpha_2', \alpha_4', \dots, \alpha_{2n}'$ を求め、さらに求めた補正係数と2倍のパルス時間幅の熱流束

Fig.9 Relationship between Fourier's number and q_{max}/q_{p0}

$q_{2p}(t)$ を式(12)に代入することにより流入熱流束 $q(t)$ が求められる。

$$\begin{aligned} T(2\Delta t) &= \alpha_2' T_{2p}(2\Delta t) \\ T(4\Delta t) &= \alpha_2' T_{2p}(4\Delta t) + \alpha_4' T_{2p}(2\Delta t) \\ T(6\Delta t) &= \alpha_2' T_{2p}(6\Delta t) + \alpha_4' T_{2p}(4\Delta t) + \alpha_6' T_{2p}(2\Delta t) \\ &\dots \dots \dots \\ T(2n\Delta t) &= \alpha_2' T_{2p}(2n\Delta t) + \alpha_4' T_{2p}((2n-2)\Delta t) + \dots \\ &\quad + \alpha_{2n}' T_{2p}(2\Delta t) \quad \dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha_2' q_{2p}(t) + \alpha_4' q_{2p}(t-2\Delta t) + \alpha_6' q_{2p}(t-4\Delta t) + \dots \\ &\quad + \alpha_{2n}' q_{2p}(t-(2n-2)\Delta t) \quad \dots (12) \end{aligned}$$

次に熱流束 q_{p0} でパルス時間幅 Δt のパルス状熱流束 $q_p(t)$ が流入したときの温度特性データ $T_p(t)$ を予め求めておき、式(11)で求められた補正係数 α_{2n}' を式(13)のようにパルス幅 Δt のときの補正係数 α_n へ代入する。求めた補正係数 α_n を式(14)の左辺へ代入して、新たに補正係数 α_1 から α_{2n-1} 迄を求め、さらに式(15)より α_{2n} の値を求める。しかし、新たに求めた補正係数と代入した補正係数の値とが異なる場合は、新たに求められた補正係数を用いて同様な計算を行い、両者の値がほぼ等しくなるまでこの計算を繰り返す。最終的に求められた補正係数を真の補正係数として式(16)より流入する熱流束 $q(t)$ が求められる。

$$\alpha_2 = \alpha_2', \alpha_3 = \alpha_4', \alpha_4 = \alpha_4', \dots, \alpha_{2n-1} = \alpha_{2n}', \alpha_{2n} = \alpha_{2n}' \quad \dots (13)$$

Fig.10 Estimated heat flux from long distance

$$\begin{aligned}
 T(2\Delta t) - \alpha_2 T_p(\Delta t) &= \alpha_1 T_p(2\Delta t) \\
 T(3\Delta t) - \alpha_3 T_p(\Delta t) &= \alpha_1 T_p(3\Delta t) + \alpha_2 T_p(2\Delta t) \\
 T(4\Delta t) - \alpha_4 T_p(\Delta t) &= \alpha_1 T_p(4\Delta t) + \alpha_2 T_p(3\Delta t) + \alpha_3 T_p(2\Delta t) \\
 &\dots\dots\dots \\
 T(2n\Delta t) - \alpha_{2n} T_p(\Delta t) &= \alpha_1 T_p(2n\Delta t) + \alpha_2 T_p((2n-1)\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_3 T_p((2n-2)\Delta t) + \dots\dots\dots + \alpha_{2n-1} T_p(\Delta t) \quad \dots\dots(14) \\
 \alpha_{2n} &= \alpha_{2n-1} + (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n-2}) \quad \dots\dots(15) \\
 q(t) &= \alpha_1 q_p(t) + \alpha_2 q_p(t-\Delta t) + \alpha_3 q_p(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_4 q_p(t-3\Delta t) + \dots\dots + \alpha_{2n-1} q_p(t-(2n-2)\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{2n} q_p(t-(2n-1)\Delta t) \quad \dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

実際に、図4の角柱の端面Aから図6の場合と同じ熱流束が流入したときについて、熱流入面から12mmの位置の温度を用いて、流入熱流束を上記の方法で逆算した。その結果を図10に示すように、パルス時間幅 Δt が2秒のときよりも1秒としたときの方が近似精度が良くなっていることがわかる。なお、パルス幅を小さくすれば近似精度をさらに向上できる。

4. 多重熱源の場合の流入熱量の算出

一般に工作機械構造内部には複数の熱源がある。そこで、複数の熱源がある場合についての流入熱流束の算出方法について検討した。例えば、二カ所に熱源AとBがあり、単位面積当たり熱量 $q_A(t)$ と $q_B(t)$ がそれぞれで発生している場合、それぞれの熱源近傍の温度 $T_A(t)$ と $T_B(t)$ は両熱源の影響を受ける。そこで、熱源Aでパルス状の発熱 $q_{Ap}(t)$ があるとき、その発熱により生じる熱源A及びBの近傍の温度特性データをそれぞれ $T_{Ap}(t)$ と $T_{Ap}'(t)$ とし、同様に熱源Bでパルス状の発熱 $q_{Bp}(t)$ が生じたとき熱源B及びAの近傍の温度特性データをそれぞれ $T_{Bp}(t)$ と $T_{Bp}'(t)$ とすると、各熱源近傍の温度 $T_A(t)$ と $T_B(t)$ は式(17)のようになる。

同式より補正係数 α_{A1} 、 α_{A2} 、 $\dots$ 、 α_{An} 、 α_{B1} 、 α_{B2} 、 $\dots$ 、 α_{Bn} を求め、式(18)に代入すると各熱源の発熱量 $q_A(t)$ と $q_B(t)$ を求めることができる。

$$\begin{aligned}
 T_A(t) &= \alpha_{A1} T_{Ap}(t) + \alpha_{A2} T_{Ap}(t-\Delta t) + \alpha_{A3} T_{Ap}(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{A4} T_{Ap}(t-3\Delta t) + \dots\dots \\
 &\quad + \alpha_{B1} T'_{Bp}(t) + \alpha_{B2} T'_{Bp}(t-\Delta t) + \alpha_{B3} T'_{Bp}(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{B4} T'_{Bp}(t-3\Delta t) + \dots\dots \\
 T_B(t) &= \alpha_{B1} T_{Bp}(t) + \alpha_{B2} T_{Bp}(t-\Delta t) + \alpha_{B3} T_{Bp}(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{B4} T_{Bp}(t-3\Delta t) + \dots\dots \\
 &\quad + \alpha_{A1} T'_{Ap}(t) + \alpha_{A2} T'_{Ap}(t-\Delta t) + \alpha_{A3} T'_{Ap}(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{A4} T'_{Ap}(t-3\Delta t) + \dots\dots \quad \dots\dots(17) \\
 q_A(t) &= \alpha_{A1} q_p(t) + \alpha_{A2} q_p(t-\Delta t) + \alpha_{A3} q_p(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{A4} q_p(t-3\Delta t) + \dots\dots \\
 q_B(t) &= \alpha_{B1} q_p(t) + \alpha_{B2} q_p(t-\Delta t) + \alpha_{B3} q_p(t-2\Delta t) \\
 &\quad + \alpha_{B4} q_p(t-3\Delta t) + \dots\dots \quad \dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

なお、多数の熱源がある場合も上記と同様な方法を用いることにより求めることができる。

5. 熱変形量の推定

工作機械の熱変形を推定するため、図11に示すような立フライス盤のモデルを用いた。その構造内部には、主軸モータ、主軸軸受け部、切削点、ボールネジ部などの熱源(図中参照)があり、加工時のみ発熱することとした。具体的には、工作機械構造内で図12(c)に示すように、表1で示される発熱 Q_m が3分間あり、その半分の発熱が次の3分間あり、その後の3分間は無発熱とし、この発熱周期が繰り返されるとした。なおその際に主軸の回転数が変化するとした、主軸端面、工具外周面、工作物上面の熱伝達率 h_a が発熱の変化と共に同図(d)のように変化するとした。さらに、同図(a)のように、加工スケジュールにそって加工サイクルが停止し、工作機械内部の発熱も停止するとした。さらに、周囲の温度も同図(b)に示すように変化するとした。

Fig.11 Machine tool model

Fig.12 Machining schedule and thermal condition of the machine tool

Table 1 Heat generation at the inner heat sources Q_m

Heat source	Heat generation [W]	Heat source	Heat generation [W]
Motor	250	Bearing-A	50
Tool	120	Bearing-B	100
Work Piece	120	Bearing-C	10
Ball Screw-A	10	Bearing-D	10
Ball Screw-B	20	Bearing-E	10

上述のような境界条件のもとで有限要素法により工作機械構造内部の温度分布、特に各熱源近傍の温度 $T_i(t)$ を求めた。また同時に工具・工作物間の熱変形量 $\delta(t)$ も求めた。一方、3分間のパルス状発熱が各熱源で個別に生じたときの各熱源近傍の温度特性データ $T_{ip}(t)$ と工具・工作物間の熱変形特性データ $\delta_{ip}(t)$ を予め求め、さらには構造周辺の温度 T_s が 20°C から 21°C に変化したときの工具・工作物間の熱変形特性データ $\delta_{TS}(t)$ についても予め求めた。

そこで、各熱源の $T_i(t)$ の値を各熱源の温度特性データ $T_{ip}(t)$ を用いて近似し、各熱源毎の補正係数を求めた。その補正係数と熱変形特性データ $\delta_{ip}(t)$ とを用いて、構造内部での発熱による熱変形量 $\delta_Q(t)$ を求めた。さらに、周囲温度変化に伴う熱変形量 $\delta_S(t)$ を次式により求めた。

$$\delta_S(t) = 2\delta_{TS}(t) + 8\delta_{TS}(t-1(h)) - 5\delta_{TS}(t-6(h)) \quad \cdots(19)$$

従って、両者の和 ($\delta_Q(t) + \delta_S(t)$) より求めた熱変形量 $\delta_{QS}(t)$ と直接境界条件を用いて求めた熱変形量 $\delta(t)$ と比較検討した。

その結果、工作物上面の中心から離れる方向を負とすると、工作物工具間の相対熱変形量は図13に示すようになり、各特性データから求めた結果は、同図点線で示される数値解析結果とよく一致することが明らかとなった。従って、本方法により熱変形量を推定でき

ることが明らかとなった。

なお、本方法の応用として、実験的に特性データを求める方法がある。具体的には、一定条件のもとで工作機械を運転したときの熱変形挙動とそのときに熱源近傍の温度変化を測定して、それらを特性データとする。さらに、実際の加工時の熱源近傍の温度変化を測定して温度特性データで近似したときの補正係数から熱変形量を予測することができる。その際に工作機械を運転しない状態で周辺温度変化に伴う熱変形の特性ベースも求めて、周囲の温度変化による熱変形量を実験的に予測することができると考えられる。

6. 結論

本研究では、工作機械の熱変形挙動を推定する方法について研究を行った。その結果、以下のことが明らかとなった。

- (1) 工作機械内部の発熱を変動させることにより、その熱源の位置を求めることができた。
- (2) 単位熱量がパルス状に流入したときに、熱源近傍の温度特性データを予め求めておけば、任意の熱量が流入したときその流入熱量を補正係数を用いて求めることができた。すなわち、熱伝導の逆問題を求めることが出来た。
- (3) 工作機械内部の熱源近傍の温度挙動と周囲の温度変化を測定すれば、熱変形特性データを用いて工作機械の熱変形挙動を推定できた。

なお、特性データは数値解析からだけではなく、実験的に求めることができるので、その実験による特性データを用いて熱変形量が推定できると思われる。

文献

(1) T.SATA, et. al., MACHINE TOOL DESIGN AND RESERCH Vol.16, 1975, 203-208
(2) M.A.Mannan and S.Broms, CIRP, 1992, 451-454
(3) 是田, 他 4 名, 精密工学会誌, 60-5(1994), 652-656.
(4) 是田, 他 3 名, 精密工学会誌, 60-6(1994), 853-857.
(5) 中村, 他 3 名, 精密工学会誌, 60-7(1994), 979-983.
(6) 森脇・趙, 機論, 58-550, C (1991), 1932-1937.
(7) 森脇, 他 2 名, 機論, 61-584, C (1995), 1691-1696.
(8) 庄司, 機論, 44-381, (1978), 1633-1643.

Fig.13 The composite relative thermal deformation