振動インテンシティに関する考察*

渡 辺 誠^{*1}, 岡 野 道 治^{*1}

A Study of Vibration Intensity

Makoto WATANABE and Michiharu OKANO

Vibration intensity (VI) is defined as vibrating energy flow, and it is expected to be useful in the exploration of a vibrating source, and measurements of dissipated energy. There have been many studies on VI, but those which perform a quantitative analysis of VI is scarce. It remains to be clarified whether the cause of VI error is the measurement method or the basic theory of VI. In this paper, VI of a lumped mass system is defined and VI for four lumped mass systems (two proportional and two non proportional damping systems) is calculated. From calculation results of instantaneous VI, active VI, and dissipated energy, it is shown that the definition has provided the characteristics of VI sufficiently. Next, VI in the case of damping force is not treated as internal force is calculated for each of the vibration systems. As a result, when damping force is not considered, calculation results of VI are erroneous. In particular, in the case of a non proportional damping system, an error is found not only in the quantity of energy flow but also in the direction of VI. Therefore, it is difficult to estimate dissipated energy by VI.

Key Words: Vibration Intensity, Quantitative Analysis, Lumped Mass System, Dissipated Energy, Damping Force

1. 緒 言

著者らは構造物の振動減衰特性について検討を加えてきた。近年、計測器、計測技術、計算機の発達により、振動インテンシティ計測の実用化が進んでいる。振動インテンシティは構造物の中を流れる振動エネルギーをベクトル量として計測するため、振動の発生源、吸収源の同定に役立つことが期待されている。

振動インテンシティに関する論文は、理論的に検討されたもの⁽¹⁾⁽²⁾、計測精度に関する検討^{(3)~(5)}、適用例^{(6)~(8)}、等があり近年その件数も増えているが、測定された振動インテンシティに対する定量的評価は、加振機によって入力されたエネルギーとエネルギーの流れを比較する程度で、精密な議論はあまりされていないのが現状である。

振動インテンシティの計測誤差の原因は、はりについて計測する場合に限っても、加速度計の計測誤差に起因するもの、差分近似による誤差、また、現在広く使われているクロススペクトル法による計測では、完全自由場を仮定することによる誤差などがある。それ

ぞれの誤差についての検討も報告されているが、誤差の原因が計測によるものだけなのか、振動インテンシティの基礎理論にも問題が含まれているのかは、実験によっても、数値シミュレーションによっても完全に特定されてはいない。

一方、構造物の減衰特性の把握という観点から、振動インテンシティより平板の任意の閉領域内で散逸するエネルギーを計算する方法も提案されている⁽⁹⁾。振動インテンシティは、どの点において振動エネルギーが失われているかを直接測定することができるため、モード解析に比べ、振動減衰や剛性が著しく偏っている系に対して特に有効であると考えられる。

本研究ではまず、計算上の近似誤差を極力抑えるために計算の容易な集中質量モデルに対して振動インテンシティを定義する。次に、そのモデルに対して検討を加えここで行った定義が十分に振動インテンシティの特性を表していることを確認する。最後に、この定義を使って現在の振動インテンシティ測定における問題点を明らかにする。

2. 集中質量系における
振動インテンシティ

2.1 振動インテンシティの定義 図1に示すよ

* 原稿受付 1996年4月8日。

*¹ 正員、日本大学理工学部(〒101 東京都千代田区神田駿河台1-8-14)。

うな摩擦のない床上の N 自由度, 集中質量系における瞬間振動インテンシティを式(1)のように定義する. ここで, W_i は集中質量 M_{i-1} と M_i の間の中点における振動インテンシティを表すものとする.

$$W_i(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i) \cdot F_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし,

$W_i(t)$: i 点における瞬間振動インテンシティ W

F_i : $M_{i-1} \sim M_i$ 間の内力 N

瞬間振動インテンシティの時間平均を計算すると

$$\begin{aligned} \langle W_i(t) \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_T W_i(t) dt = \frac{1}{2T} \int_T (\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1}) F_i dt \\ &= \frac{1}{2T} \int (\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1}) \cdot \bar{F}_i^* df = \frac{1}{T} \int W(f) df \\ &\quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ただし, $W(f)$ は振動インテンシティスペクトル密度, $\bar{}$ はフーリエ変換, $*$ は共役複素数を表す.

2・2 振動インテンシティの検証 本節では2・1節で定義した集中質量系における振動インテンシティが妥当なものであるかどうかを検証する. ここでは, 図2に示す五自由度集中質量系についてインテンシティの計算例を示す. 質量 $M_1 \sim M_5$, 減衰係数 $C_1 \sim C_5$, ばね定数 $K_1 \sim K_5$ を表1に示す.

表1の四つの振動系は, 波動の現れ方では Case 1 は減衰の小さな片持ばりの振動, Case 2 は大きな減衰が一様に分布する片持ばりの振動, Case 3 は大きな減衰がはりの固定端にある片持ばりの振動, Case 4 ははりの途中に大きな減衰部がある片持ばりの振動に類似しているものと考えられる.

Fig. 1 VI of Lumped Mass System

Fig. 2 5 Degree of freedom lumped mass system

2・2・1 瞬間振動インテンシティ まず, Case 1 の振動系の M_4 にインパルス力を加えたときの瞬間振動インテンシティの時系列波形を図3に示す.

Table 1 Constants of lumped mass system

	$M[\text{kg}]$	$C[\text{Ns/m}]$	$K[\text{N/m}]$
Case1	$M_1 \sim M_5 = 1$	$C_1 \sim C_5 = 0.1$	$K_1 \sim K_5 = 3$
Case2	$M_1 \sim M_5 = 1$	$C_1 \sim C_5 = 0.5$	$K_1 \sim K_5 = 3$
Case3	$M_1 \sim M_5 = 1$	$C_1 = 0.5, C_2 \sim C_5 = 0.01$	$K_1 \sim K_5 = 3$
Case4	$M_1 \sim M_5 = 1$	$C_3 = 0.5, \text{Others} = 0.1$	$K_1 \sim K_5 = 3$

Fig. 3 Instantaneous VI with impact excitation (Case 1)

Fig. 4 Instantaneous VI with sinusoidal excitation (Case 1)

Fig. 5 Instantaneous VI with sinusoidal excitation (Case 2)

図3中の実線 $X_1 \sim X_5$ は各質量の変位, 破線 $W_1 \sim W_5$ は各質量の間を流れる瞬間振動インテンシティを表している。瞬間振動インテンシティ波形の時間積分はアクティブインテンシティの大きさを表し, 積分値の符号は方向を表す。図3を見ると, $W_1 \sim W_4$ は積分値がマイナス(図2の右から左へのエネルギーの流れを示す), W_5 は積分値がプラス(左から右の流れ)になっていることがわかる。すなわち, M_4 に入力されたエネルギーが時間とともに M_1 の方向と M_5 の方向へ伝わっていくようすを表している。次に, Case 1, 2 の M_4 に第3モードのモード周波数である 0.36 Hz の正弦波入力を加え十分な時間が経過した後の瞬間振動インテンシティをそれぞれ図4, 5に示す。瞬間振動インテンシティ波形は正弦波状になっており, 正弦波の上下のずれが, 瞬間振動インテンシティの時間積分値になる。図4, 5を見ると M_4 より左側の $W_1 \sim W_4$ では時間積分値がマイナス, W_5 はプラスになっていることがわかる。また, 図4, 5を比べると, 図4は瞬間振動インテンシティ波形の振幅に対して正弦波形の上下のずれが小さいのに対し, 図5は振幅に対してずれが大きい。これは, 減衰の小さい Case 1 は定在波が強く現れるためアクティブ成分に比べ, リアクティブ成分が大きく, 減衰の大きい Case 2 では定在波ははっきり現れず, アクティブ成分の割合が大きくなる

ためである。

2・2・2 振動インテンシティスペクトル密度 周波数領域における振動インテンシティを考える。Case 1~4 の振動インテンシティスペクトル密度のアクティブ成分(実部)を入力パワーのスペクトル密度で除した値 σ を図6~9に示す。なお, 入力 M_5 にランダム力を加えている。図6~9を見ると, $W_5 \sim W_1$ の順に振幅が小さくなっていることがわかる, これは M_5 から入力されたエネルギーが次第に減衰しながら固定端に向かって流れていることを表している。

このように, 本論文で定義した直列に集中質量が連なった振動系に対する振動インテンシティは, 加振点の左側でマイナス, 右側でプラスになり, その絶対値は加振点において最大で, 固定端または自由端に向かってその値が単調減少する。

また, ある点におけるインテンシティ $\text{Re}[W_i]$ の符号が負であったとすると, インテンシティ W_i とその左側にあるダンパ $C_1 \sim C_i$ で散逸したエネルギーの間には次のような関係が成り立つ。

$$|\text{Re}[W_i(f)]| = \sum_{j=1}^{i-1} D_j(f) + \frac{1}{2} D_i(f) \quad \cdots \cdots (3)$$

ただし, $D_i(f)$ はダンパ C_i で消費されたパワーのスペクトル密度を表す。すなわち, 質量 M_{i-1} と M_i の中点におけるインテンシティ W_i は W_i より左側(エ

Fig. 6 VI of Case 1

Fig. 8 VI of Case 3

Fig. 7 VI of Case 2

Fig. 9 VI of Case 4

エネルギーの流れの下流側)のダンパ $C_1 \sim C_{i-1}$ で消費された全パワーと C_i で消費されたパワーの 1/2 の和になる。一方, $\text{Re}[W_i]$ が正の場合は, W_i からその右側の自由端(または固定端)までのダンパにおいて消費されたエネルギーに対して式(3)と同様の関係が成り立つ。さらに, 質量 M_i においてエネルギーの出入りがない場合, i と $i+1$ について式(3)を求め辺々差し引くことにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} & |\text{Re}[W_{i+1}(f)]| - |\text{Re}[W_i(f)]| \\ &= \frac{1}{2} D_{i+1}(f) + \frac{1}{2} D_i(f) \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

この関係から, 隣合うインテンシティスペクトル密度の差は, その間のダンパで散逸した振動エネルギーになることがわかる。すなわち, W_5 と W_4 の間の差は, ダンパ C_5 と C_4 で散逸したエネルギーの和の 1/2 になる。また, 固定端においては, 式(4)で $i=0$, $W_0(f)=0$, $D_0(f)=0$ とおくことにより

$$|\text{Re}[W_i(f)]| = \frac{1}{2} D_i(f) \cdots \cdots (5)$$

という関係が成り立つ。式(4), (5)の関係を用いて各ダンパにおいて散逸したパワーを求め, そのパワーを入力パワーで除した値 ρ を図 10~13 に示す。定常状態においては, 単位時間に入力されたエネルギーは単位時間に各ダンパで散逸したエネルギーの総和に等

しくなるため, 図 10~13 では $D_1 \sim D_5$ の総和は常に 1 になる。また, 振動インテンシティを使わず, 各自由度の相対変位速度から直接, 散逸エネルギーを計算した結果も図 10~13 に完全に一致した。

2.3 まとめ 本章で定義した集中質量系における振動インテンシティは 2.2 節までに示されたように, 従来, 定義されていた振動インテンシティの物理的性質をよく表しており, ここで導入した定義を使用して振動インテンシティに関する考察を行うことも十分妥当であると考えられる。

3. 議 論

3.1 内力の評価について 2 章で導入した振動インテンシティの定義は, 振動インテンシティの物理的性質をよく表し, エネルギーの入力, 流れ, 散逸の関係を定量的にも完全に満たしているということが示された。

ただし, 2 章に示した振動インテンシティの計算結果は, 式(1)の内力 F_i を

$$F_i = K_i(x_{i-1} - x_i) + C_i(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \cdots \cdots (6)$$

として計算したものである。一方, 一般に使用されている振動インテンシティの定義式は, 例えばはりの曲げ振動に対して例示すると⁽³⁾

Fig. 10 Dissipated power of Case 1

Fig. 12 Dissipated power of Case 3

Fig. 11 Dissipated power of Case 2

Fig. 13 Dissipated power of Case 4

$$W(x, f) = \frac{2\pi f}{j} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \left[\left(\frac{\partial^3 \bar{\xi}}{\partial x^3} \right) \bar{\xi}^* - \left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \bar{\xi}^*}{\partial x} \right] \dots\dots\dots (7)$$

であり、内力として減衰力を考慮していない。すなわち、集中質量系においては内力を

$$F_i = K_i(x_{i-1} - x_i) \dots\dots\dots (8)$$

と計算していることに相当する。内力を式(8)のようにとって計算した振動インテンシティを本論文では疑似インテンシティと呼ぶことにする。3・2節では疑似インテンシティと2章の計算結果を比較する。

3・2 両インテンシティの比較 Case 1～4の振動系に対する疑似インテンシティを図14～17に示す。図14～17と先に示した図6～9を比較すると、図14～17はすべて、 W_1 が零になっているということがわかる。これは内力を式(8)のようにとると、固定端と M_1 の間の内力と変位速度の位相差が常に 90° になり、瞬時インテンシティの時間平均が零になるためである。ダンパ C_1 においてもエネルギーの散逸はあり、 W_1 が常に零になるのは物理的に矛盾があるといえる。また、波形全体の形を比較すると、形はある程度類似しているが、図14～17では値が1を超える部分があり、これは入力された以上のエネルギーが流れていることを示し、物理的にはあり得ないことである。

振動インテンシティと疑似インテンシティで最もグラフが似ているのはCase 3の図8と16で、 W_1 と W_5 の高周波数領域以外は波形の形も大きさもほぼ同じになっているということがわかる。Case 3は2・2節でも述べたとおり波動の現れ方としては固定端に減衰部を持つ片持ばりに類似するもので、これは振動インテンシティに関する実験で頻繁に設定されている条件である。従来の研究において物理的に大きな矛盾が生じなかったのはこのような、実験条件によるものであると考えられる。また、最も波形の違いが大きいのはCase 4の図9, 17で、波形の大きさが異なるばかりでなく W_3 においてはその符号、すなわちエネルギーの流れる方向も逆に計算されている周波数帯域があるということがわかる。このようなケースでは振動源を探索する目的にも振動インテンシティを活用することが難しくなる。

3・3 散逸エネルギーの比較 3・2節で求めた疑似インテンシティから各ダンパにおける散逸エネルギーを計算したものを図18～21に示す。図18～21を見ると、各ダンパにおける散逸エネルギーの総和が入力エネルギーと一致していない。さらに、散逸エネルギーが負になる周波数帯域も存在し、物理的要求を満たしていないということがわかる。ここで、疑似インテンシティの符号が正になる部分のある図17について

Fig. 14 Quasi VI of Case 1

Fig. 16 Quasi VI of Case 3

Fig. 15 Quasi VI of Case 2

Fig. 17 Quasi VI of Case 4

Fig. 18 Dissipated power derived from quasi VI (Case 1)

Fig. 20 Dissipated power derived from quasi VI (Case 3)

Fig. 19 Dissipated power derived from quasi VI (Case 2)

Fig. 21 Dissipated power derived from quasi VI (Case 4)

は本来、式(3)～(5)は適用できないことになるが、ここでは図10～13と同じ計算手順で散逸エネルギーを計算した。すなわち、正に計算されているインテンシティを負とみなした数値計算を行っている。これは、疑似インテンシティの計算結果がすでに物理的要求を満たしておらず正しい式の適用ができないために便宜的にそのような計算によりグラフを作成したものである。

3・4 まとめ 本章の議論によって、従来のような減衰力を考慮していない振動インテンシティは、物理的に矛盾した計算値を与えるということが示された。

真の振動インテンシティと疑似インテンシティの間の相違は、比例減衰系(Case 1, 2)においては減衰の大小にかかわらず比較的小さく、各点におけるインテンシティの大小関係や符号(方向)が誤って計算されることはない。また、非比例減衰系においては固定端に大きな減衰が集中して存在する場合(Case 3)は減衰部以外でのインテンシティは真の値と比較的よく一致する。しかし、端部以外に大きな減衰が集中している場合(Case 4)には各点のインテンシティの大小関係に誤りが生じるばかりでなく、符号(方向)にも誤りが生じ

る周波数帯域がある。

次に、疑似インテンシティから求めた散逸エネルギーの計算結果はCase 1～4のいずれの条件においても散逸エネルギーが負になる等、実用に耐えないものになった。これは、疑似インテンシティが定量的に正しく求められていないことに起因している。

このように、現在使用されている減衰力を考慮しない振動インテンシティには数多くの問題があるが、実際の計測を考えると減衰力まで含めた内力を測ることは非常に困難である。

4. 結 論

(1) 本論文で定義した集中質量系に対する振動インテンシティはインテンシティの物理的性質を完全に満たしている。

(2) 集中質量系に対する振動インテンシティの検討から、内力として減衰力を考慮せずに計算された振動インテンシティは、大きさ、方向などの点で物理的に矛盾のある結果を出す。

(3) 従来の測定法による振動インテンシティから構造物内部における散逸エネルギーを計算しても、正しい結果は得られない。

文 献

(1) Noiseux, D.C., <i>J. Acoust. Soc. Am.</i> , 47 -1(1970), 238-247.	(4) 柴田勝久・ほか3名, 機論, 58 -555, C(1992), 3279-3284.
(2) Pavic, G., <i>J. Sound Vib.</i> , 49 -2(1976), 221-230.	(5) 柴田勝久・ほか3名, 機論, 59 -558, C(1993), 440-444.
(3) 小泉登男・ほか1名, 機論, 58 -547, C(1992), 774-799.	(6) 小嶋直哉・ほか1名, 機論, 57 -533, C(1991), 130-134.
	(7) 本多聡志・ほか2名, 機論, 60 -574, C(1994), 1933-1940.
	(8) 小嶋直哉・ほか3名, 機論, 60 -578, C(1994), 3281-3287.
	(9) 中川稔章・ほか2名, 機論, 61 -589, C(1995), 3482-3488.
-