リアプノフの方法に基づく柔軟構造物のスルーマヌーバ制御における ゲインの一決定法*

大塚 敏之^{*1}, 藤井 裕矩^{*2}

A Method of Gain Determination in Lyapunov-Based Slew Maneuver Control of Flexible Structures

Toshiyuki OHTSUKA and Hironori A. FUJII

This paper proposes a method to determine free design parameters in a feedback control law for slew maneuver of flexible beams. The feedback law is designed by applying Lyapunov's stability theory. The characteristics of the closed-loop systems are analyzed based on dimensionless equations and their relationship to free parameters are studied systematically. Results of the analysis and simulation suggest some guidelines on the gain determination. A numerical example shows that appropriate values of the free parameters can be found based on the proposed guidelines without trial and error.

Key Words: Flexible Structure, Positioning, Vibration Control, Lyapunov Method, Gain Determination

1. 緒 言

リアプノフの方法は力学系の安定解析の強力な手段である。この方法の利点は、系を支配する微分方程式を解く必要がないことであり、非線形系や分布定数系の安定解析にも用いることができる。機械系の安定解析においては、系のハミルトニアンがリアプノフ関数の自然な候補となり、リアプノフの方法が特に適している。

リアプノフの方法を機械系の制御系設計に応用した例としては、Takegakiら⁽¹⁾、Balas⁽²⁾、Leeら⁽³⁾の研究がある。これらの研究は集中定数系またはモード展開された分布定数系モデルを扱っており、制御対象を常微分方程式で記述して制御系設計を行なっている。これに対してVadali⁽⁴⁾は、柔軟はりのスルーマヌーバ制御において、偏微分方程式と常微分方程式の混在した運動方程式をモード展開せずに直接使い、リアプノフの方法によって姿勢角のPD制御則が導けることを示している。

またFujiiら^{(5),(6)}もVadali⁽⁴⁾と同様の問題に対してモード展開せずに安定化制御則を導いている。Vadali⁽⁴⁾が系全体のハミルトニアンからリアプノフ関数を構成しているのに対して、Fujiiら^{(5),(6)}は中心剛体のハミルトニアンと柔軟はりのハミルトニアンとの重み付き和を用いている。この結果、得られた制御則は単なるPD制御則ではなく、はりの根元の曲げモーメントやせん断力をもフィードバックするものとなっている。

リアプノフの方法に基づく制御則の問題点は、安定性は保証されるものの制御性能を予め規定するのが困難であるということである。この問題点を解決するために、自由な設計パラメータを最適化することによって望ましい制御性能を達成しようとする研究^{(7),(8)}や、オフラインで最適軌道を求めておき、それをリアプノフの方法に基づくトラッキング制御則で追従させるという研究^{(9),(10)}がなされている。しかし、最適化は多大な計算量を要し、しかも、最適化問題中の自由パラメータをいかに選ぶかという問題が残る。そこで、本研究では、リアプノフの方法に基づく柔軟宇宙構造物のスルーマヌーバ制御に対して、より簡便かつ直接的な自由パラメータの決定方法を提案する。本方法は、運動方程式を無次元化するなどして、できるかぎり少ない数の無次元パラメータのみを含む閉ループ系の方程式を導く。そして、いくつかの無次元自由パラメータの

* 原稿受付 1996年9月6日。

^{*1} 正員、筑波大学構造工学系(〒305 つくば市天王台1-1-1)。

^{*2} 正員、東京都立科学技術大学工学部(〒191 日野市旭が丘6-6)。

組み合わせにたいして閉ループ時間応答を計算し、自由な設計パラメータ決定の指針を得る。ここでは柔軟モードも考慮した解析をしているので、著者らが以前提案した剛体近似による設計指針⁽¹⁾よりも詳細な仕様を与えられる。数値例として具体的なモデルでのシミュレーション結果を示す。

2. 閉ループ系の無次元化

制御対象は柔軟宇宙構造物を単純化したモデルで、図1のような根元固定で先端自由の柔軟はりを有する剛体の平面内運動である。制御入力に剛体に固定された回転軸回りのトルク T_r である。制御目的は、制御トルクによって柔軟はりの振動を抑制しつつ姿勢角変更に達成することである。この系の運動方程式は、

$$I_r \frac{d^2\theta}{dt^2} + l_0 S_0 - M_0 = T_r \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + u \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial u^4} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。減衰は省略している。ここで、 $v=v(u,t)$ が柔軟はりの弾性変位、 $\theta=\theta(t)$ が中心剛体の姿勢角を表す。また、 I_r と l_0 はそれぞれ中心剛体の慣性モーメントと半径、 ρ と EI ははりの線密度と曲げ剛性、 M_0 と S_0 ははりの根元における曲げモーメントとせん断力をそれぞれ表す。線密度 ρ と曲げ剛性 EI は共に一定とする。式(2)と柔軟はりの境界条件から、

$$l_0 S_0 - M_0 = \int_{l_0}^l \rho u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + u \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) du \quad \dots\dots\dots (3)$$

が成り立つ。

この系に対する、リアプノフの方法に基づく制御則(MF制御則^{(5),(6)})は、

$$T_r = -a_2 \theta - k \frac{d\theta}{dt} - (b-1)(l_0 S_0 - M_0) \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。ここで、 a_2 、 b 、 k は正の係数である。

Fig.1 Slew maneuver model

一般性を失うことなく目標角を零としている。閉ループ系においてリアプノフ関数の候補を

$$M = \frac{1}{2} I_r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{a_2}{2} \theta^2 + \frac{b}{2} \left[\int_{l_0}^l \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{d\theta}{dt} \right)^2 du + \int_{l_0}^l EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \right)^2 du \right] \quad \dots\dots\dots (5)$$

と定義すると、その時間微分は式(1)～(5)より

$$\frac{dM}{dt} = -k \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。したがって、リアプノフの定理により閉ループ系は安定である。さらに、リアプノフの定理の拡張形⁽²⁾により、漸近安定であることも示すことができる。式(6)は制御対象のパラメータに依存せず成り立ち、したがって、常に漸近安定性が保証される。Fujii⁽⁶⁾とJunkins⁽⁹⁾は、せん断力を曲げモーメントの差分として測定し良好なハードウェア実験結果を得ている。

MF制御においては安定性が常に保証されるものの、係数 a_2 、 b 、 k が自由な設計パラメータであり、それらの値によって制御性能は大きく異なる。式(1)は閉ループ系では、

$$\frac{I_r}{b} \frac{d^2\theta}{dt^2} + l_0 S_0 - M_0 + \frac{k}{b} \frac{d\theta}{dt} + \frac{a_2}{b} \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。つまり、MF制御則は、中心剛体の慣性モーメントを I_r/b に変えて角度PD制御を施したのと等価である。逆に、望ましい制御性能を達成する自由な設計パラメータの組合せが得られたならば、 I_r の値を I_r/b に変更することで角度PD制御のみでも等価な制御性能が達成できることになる。また、 $b=0$ として式(4)を式(1)に適用するとせん断力と曲げモーメントの項が消去され、姿勢角の閉ループ応答は単純な2次系となる。ただし、後述するように、柔軟はりの振動抑制の面からは b は大きいほうが望ましい。

さて、閉ループ系の応答を支配している本質的なパラメータを抽出するために、閉ループ系の方程式を無次元化してみる。弾性変位 v を片持ちはりの固有関数でモード展開し、時刻を片持ちはりの1次モード固有角振動数 ω_1 で無次元化すると、次式を得る。

$$\theta'' + \eta_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_i}{I_b} q_i'' + 2\zeta \frac{\omega_0}{\omega_1} \theta' + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$q_i'' + \frac{I_i}{\rho L^3} \theta'' + \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2} q_i = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $(\cdot)' = d(\cdot)/d(\omega_1 t)$ 、 $L=l-l_0$ であり、 ϕ_i 、 q_i と ω_i でそれぞれ片持ちはりの i 次モードの固有関数、モード変位と固有角振動数を表す。内積を

$$\langle x, y \rangle = \int_{l_0}^l \rho x y du \quad \dots\dots\dots (10)$$

で定義し、固有関数は

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \rho L^3 \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と正規化されているものとする。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 $i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$ 、 $i \neq j$ のとき $\delta_{ij}=0$

とする。また、

$$I_i = \langle u, \phi_i \rangle \quad I_b = \langle u, u \rangle \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\eta_0 = \frac{bI_b}{I_r + bI_b}, \quad 2\zeta\omega_0 = \frac{k}{I_r + bI_b}, \quad \omega_0^2 = \frac{a_2}{I_r + bI_b} \quad \dots\dots\dots (13)$$

と定義している。問題によって与えられる無次元パラメータは I_i/I_b , $I_i/\rho L^3$, ω_i/ω_1 ($i=1,2,3,\dots$) の三種類であり、このうち前二者は系の幾何学的条件を表す無次元パラメータ l_0/l のみに依存する。すなわち、曲げ剛性などの物性値に依存しないという意味で式(8)と式(9)は一般的な表現である。 I_i/I_b ははりの振動が姿勢角の運動に及ぼす影響の度合いを表し、逆に $I_i/\rho L^3$ は姿勢角の運動がはりの振動に及ぼす影響の度合いを表している。これらの l_0/l との関係グラフにしたのが、それぞれ図2と図3である。固有角振動数の比 ω_i/ω_1 ($i=1,2,3,\dots$) はモデルのパラメータに依存せず、片持ちはりに固有な数列となる。固有関数や無次元パラメータ

Fig.2 Dimensionless parameter I_i/I_b

Fig.3 Dimensionless parameter $I_i/\rho L^3$

の具体的な形については付録を参照されたい。設計者が選べる無次元自由パラメータは、 η_0 , ζ , ω_0/ω_1 の三つである。これらの取りうる値の範囲は、それぞれ

$$0 < \eta_0 \leq 1, \quad \zeta > 0, \quad \omega_0/\omega_1 > 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。MF制御則中の自由な設計パラメータ a_2 , b , k は、無次元自由パラメータ η_0 , ζ , ω_0/ω_1 とモデルの無次元パラメータ I_r , I_b から式(13)によって決定される。

結局、0以上1以下の l_0/l について、三つの無次元自由パラメータの様々な組み合わせに対する閉ループ応答を調べれば十分であることになる。さらに、将来的な柔軟宇宙構造物を考えると、柔軟付属物が中心剛体の半径に比べて十分長いので、 $l_0/l=0$ として三つの自由パラメータだけを変化させて閉ループ応答を調べてもおおよその傾向は把握できる。

閉ループ応答解析のアプローチには周波数領域によるものと時間領域によるものとがある。ここで扱っている系の閉ループ極は、式(7)から分かるように、PD制御を施した系のヴィークル・モード⁽¹³⁾の固有値にほかならない。したがって、既に多くの研究がなされているヴィークル・モードの固有値評価法が適用できる可能性がある。しかし、スルーマヌーバ制御の評価に用いられるのは整定時間やオーバーシュートなどの時間領域における量であるから、過渡応答の周波数領域での解析は間接的なものとならざるを得ず、それらを時間領域で直接調べたほうが性能評価が容易である。そこで本研究では、いくつかの無次元自由パラメータの組み合わせに対して閉ループ系の時間応答を数値計算で求め、姿勢角の整定時間とオーバーシュート、ならびに柔軟はり根元の曲げモーメントの最大振幅などを評価する。そして、その結果から自由パラメータ決定の指針を導くこととする。

3. 無次元化モデルの過渡応答

無次元自由パラメータ ω_0/ω_1 が 0.5, 1, 2 のそれぞれの場合について、 η_0 と ζ を変えて閉ループ応答を比較したのが図4～6である。一般性を失うことなく初期角度を $-1[\text{rad}]$ に正規化してある。一般には全体の応答を $-\theta(0)$ 倍すればよい。初期時刻 $t=0$ において系は平衡状態にあるとする。また、はりの根元における曲げモーメントは $M_0/\omega_1^2 I_b$ と無次元化してある。無次元化された曲げモーメントの時間履歴は l_0/l が一定なら不変である。ただし、制御トルク T_r を無次元化した $T_r/\omega_1^2 I_b$ の時間履歴は、 l_0/l だけでなく I_r/I_b という無次元パラメータによっても変化する(付録の式(A.10)参照)。制御トルクは $t=0$ で最大値をとることが多く、その初期値は、

$$T_r(0) = -\frac{\omega_0^2 I_r}{1 - \eta_0} \theta(0) \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。初期トルクが実現可能な値であるか否かも自

由パラメータ決定の指針となる。

$\eta_0=1$ のときは、 $b \rightarrow \infty$ に相当しており、それに応じて式(13)より、 $k \rightarrow \infty$ 、 $a_2 \rightarrow \infty$ となる。この時制御トルクは無限大になるが、閉ループ系の微分方程式は意味を持ち、係数 a_2 、 b 、 k が式(13)を満たしつつ無限大になったときの性能限界を表している。実際図4～6で η_0 以外のパラメータが等しい場合を比較すると、 $\eta_0=1$ のとき最も柔軟はりの振動が抑制されていることがわかる。ただし、 $\eta_0=1$ のとき式(8)の加速度項が $(I_0 S_0 - M_0) / \omega_1^2 I_b$ に一致し、初期時刻において零となることから、姿勢角速度の初期条件は

$$\theta'(0) = -\frac{\omega_0}{2\zeta\omega_1} \theta(0) \quad (16)$$

と変更されなければならない(付録の式(A.8)参照)。これは初期制御トルクが無限大となるに伴い、姿勢角速度が $t=0$ でステップ状に変化することを意味す

る。すなわち、初期姿勢角加速度はインパルス状となる。それに対応して、式(9)より各モードの初期条件も

$$q_i'(0) = -\frac{I_i}{\rho L^3} \theta'(0) \quad (17)$$

となる。

姿勢角の応答については、 ω_0/ω_1 が1より小さいときには柔軟はりの振動の影響を余り受けないので、単純な2次系における整定時間の近似的評価式

$$t_s = m / \zeta \omega_0 \quad (18)$$

を用いることができる。ここで m は、単純な2次系では、2%への整定の場合 $m=4$ 、5%への整定の場合 $m=3$ などと置く⁽¹⁴⁾。柔軟はりのスルーマヌーバでは若干保守的な評価をして m を大きめにすることも考えられる。

ω_0/ω_1 が大きい場合は、たとえば $b \rightarrow \infty$ ($\eta_0=1$)としても柔

Fig.4 Closed-loop response of the dimensionless system ($\omega_0/\omega_1 = 0.5$, — $\zeta = 1, \eta_0 = 1$; - - $\zeta = 1, \eta_0 = 0.5$; ··· $\zeta = 0.7, \eta_0 = 1$; - · $\zeta = 0.7, \eta_0 = 0.5$)

Fig.6 Closed-loop response of the dimensionless system ($\omega_0/\omega_1 = 2$, — $\zeta = 1, \eta_0 = 1$; - - $\zeta = 1, \eta_0 = 0.5$; ··· $\zeta = 0.7, \eta_0 = 1$; - · $\zeta = 0.7, \eta_0 = 0.5$)

Fig.5 Closed-loop response of the dimensionless system ($\omega_0/\omega_1 = 1$, — $\zeta = 1, \eta_0 = 1$; - - $\zeta = 1, \eta_0 = 0.5$; ··· $\zeta = 0.7, \eta_0 = 1$; - · $\zeta = 0.7, \eta_0 = 0.5$)

Fig.7 Damping ratio ζ versus maximum amplitude of dimensionless root moment $M_0/\omega_1^2 I_b$ ($\eta_0 = 0.5$)

軟はりの振動が抑制されず, そのため姿勢角の整定も遅い. $b=0$ ($\eta_0=0$) とすれば, 式 (8) から明らかなように姿勢角の応答は単なる 2 次系と一致するが, この場合柔軟はりの振動は能動的には全く抑制されない. 姿勢角と柔軟はりの振動の双方を望ましく制御するには, ω_0/ω_1 を 1 より小さく選ぶ必要があると言える. ω_0/ω_1 を小さくすれば初期トルクの大きさも小さくなる.

無次元自由パラメータ ζ は, 2 次系の場合と同様に姿勢角のオーバーシュートを規定していることが図 4 ~ 6 から分かる. また, ζ 以外のパラメータが等しい場合で M_0 の最大振幅を比較すると, 図 7 のようになり, ζ が小さいほど M_0 の最大振幅は大きくなる.

以上から, 無次元自由パラメータ決定の指針は次のようになる.

1) 2 次系の場合を参考にして, 望ましい姿勢角のオーバーシュートを与える ζ を決める.

2) 式 (18) を用いて, 望ましい整定時間を達成する ω_0/ω_1 を決める. ただし, ω_0/ω_1 は 1 以下でなるべく小さいほうが振動制御の面からは望ましい.

3) 式 (15) から, 実現可能な初期トルクの範囲内で, 出来るかぎり 1 に近い η_0 を選ぶ. 選べる η_0 があまりに小さく, 柔軟はりの振動抑制が不十分な場合は, 姿勢角の整定時間を犠牲にして ω_0/ω_1 を小さくする.

以上の各過程において, 閉ループ系の時間応答は図 4 ~ 7 から概ね把握できる.

4. 数 値 例

数値例として, 具体的なモデルに上記の設計指針を適用してみる. モデルのパラメータは, $l-l_0=1.155$ [m], $l_0=3.38 \times 10^{-2}$ [m], $EI=1.48 \times 10^{-2}$ [N・m²], $\rho=6.39 \times 10^{-2}$ [kg/m], $I_b=3.58 \times 10^{-2}$ [kg・m²], $I_r=3.43 \times 10^{-2}$ [kg・m²] である. 数値計算では減衰項も考慮している. モデルの詳細については文献 (10) を参照されたい. この例では $I_r/I_b=0.958$ だから, 柔軟はりの運動は姿勢角の運動に対して無視できない影響を与える. 初期姿勢角は -1[rad] とする.

まず, 目標角への到達を速くするため姿勢角に若干のオーバーシュートを許し, $\zeta=0.7$ とする. また, 図 4 に近い応答を達成するよう $\omega_0/\omega_1=0.5$ と置く. このモデルでは $\omega_1=1.27$ [rad/s] なので, 式 (18) で $m=5$ とすれば, おおよその整定時間は 10[sec] となる. 後は初期トルクが実現可能な値となるよう η_0 を調整すればよい. 図 7 を用いると, η_0 が 0.5 以上ならば, M_0 の最大振幅は 1.1×10^{-2} [N・m] 以下になることが分かる. 許容できる初期トルクを 0.2[N・m] とすれば, 式 (15) より η_0 は 0.931 に選べる. 以上より式 (13) を使って a_2 , k , b を求めると, $a_2=0.2$ [N・m], $k=0.44$ [N・m・s], $b=12.9$ となる. このパラメータによる閉ループ応答が図 8 である. 所定の制御性能が得られている.

5. 結 言

本稿では, リアプノフの方法に基づく柔軟宇宙構造物のスルーマヌーバ制御則を解析し, 制御則中の自由な設計パラメータを決定する方法について論じた. まず, リアプノフの方法に基づく制御則 (MF 制御則) が, 中心剛体の慣性モーメントを変えて姿勢角に関する PD 制御を施すことと等価であることを示した. 次に, 閉ループ系の方程式をモード展開すると共に無次元化し, 閉ループ応答を規定する本質的な無次元パラメータを抽出した. そして, 自由な無次元パラメータの閉ループ過渡応答に対する関係を調べ, パラメータ決定の指針を導いた. また, パラメータを無限大にしたときの性能限界が存在することも明らかにした. 得られた指針を数値例に適用し, 有効性を確認した. 本研究では過渡応答のみを考えたが, 定常外乱に対する応答も考慮した設計法への発展が今後の課題である.

文 献

- (1) Takegaki, M. and Arimoto, S., *Trans. ASME, J.*

Fig.8 Simulation result of the numerical example

- Dyn. Syst. Meas. Control*, **102**, (1981), 119-125.
- (2) Balas, M. J., *J. of Guidance*, **2-3**, (1979), 252-253.
- (3) Lee, H. G., ほか 2 名, *Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control, Austin*, (1988), 75-80.
- (4) Vadali, S. R., *Proc. American Control Conf., Piscataway*, (1989), 1674-1678.
- (5) Fujii, H., and Ishijima, S., *J. of Guidance*, **12-6**, (1989), 858-865.
- (6) Fujii, H., ほか 2 名, *J. of Guidance*, **14-5**, (1991), 986-992.
- (7) Fujii, H., and Takeda, S., *Proc. IMACS/SICE Int. Symposium on Robotics, Mechanics and Manufacturing Systems '92, Kobe*, (1992), 1429-1434.
- (8) Bang, H., ほか 2 名, *J. of Astronautical Sci.*, **41-1**, (1993), 91-118.
- (9) Junkins, J. L., ほか 2 名, *J. of Guidance*, **14-2**, (1991), 406-415.
- (10) Ohtsuka, T., and Fujii, H., *J. of Guidance*, **16-1**, (1993), 40-46.
- (11) 大塚・藤井, 第37回宇宙科学技術連合講演会講演集, 北九州, (1993), 525-526.
- (12) Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill (1970), 237.
- (13) 狼・藤井, 日本航空宇宙学会誌, **32-364**, (1984), 263-274.
- (14) D'Azzo, J. J., and Houpis, C. H., *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern, 3rd ed.*, McGraw-Hill (1988), 89-90.

付 録

本論文で用いた固有関数は,

$$\phi_i(z) = L[\cos \beta_i z - \cosh \beta_i z - r_i(\sin \beta_i z - \sinh \beta_i z)] \quad \text{..... (A.1)}$$

ただし,

$$z = u - l_0, \quad r_i = \frac{\cos \beta_i L + \cosh \beta_i L}{\sin \beta_i L + \sinh \beta_i L} \quad \text{..... (A.2)}$$

で, $\beta_i (i=1,2,3,\dots)$ は

$$1 + \cos \beta_i L \cosh \beta_i L = 0 \quad \text{..... (A.3)}$$

の根を小さい順に並べたものである. 無次元量 $\beta_i L (i=1,2,3,\dots)$ は, はりの物性値に無関係な数列となる. 問題によって与えられる無次元パラメータは, それぞれ

$$\frac{\omega_i}{\omega_1} = \left(\frac{\beta_i L}{\beta_1 L} \right)^2 \quad \text{..... (A.4)}$$

$$\frac{I_i}{I_b} = -\frac{6}{\beta_i L} \frac{(1-l_0/l)^2}{1-(l_0/l)^3} \left[\frac{1-l_0/l}{\beta_i L} + (l_0/l)r_i \right] \quad \text{..... (A.5)}$$

$$\frac{I_i}{\rho L^3} = -\frac{2}{(\beta_i L)^2} \left(1 + \beta_i L r_i \frac{l_0/l}{1-l_0/l} \right) \quad \text{..... (A.6)}$$

となる. なお,

$$I_b = \frac{1}{\rho L^3} \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2 \quad \text{..... (A.7)}$$

が成り立つ.

その他の無次元化量は

$$\frac{l_0 S_0 - M_0}{\omega_1^2 I_b} = \theta'' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_i}{I_b} q_i'' \quad \text{..... (A.8)}$$

$$\frac{M_0}{\omega_1^2 I_b} = -\frac{6(1-l_0/l)^3}{1-(l_0/l)^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\beta_i L)^2}{(\beta_1 L)^4} q_i \quad \text{..... (A.9)}$$

$$\frac{T_r}{\omega_1^2 I_b} = \left(1 + \frac{I_r}{I_b} \right) \theta'' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_i}{I_b} q_i'' \quad \text{..... (A.10)}$$

と表わされる. 式 (A.8) の右辺は, 本文中式 (8) の加速度項で $\eta_0=1$ とした場合に等しい. また, 無次元化された制御トルクが I_r/I_b にも依存することが分かる. なお, 最大許容曲げモーメント $M_{\max}$ についても無次元化してみると,

$$\frac{M_{\max}}{\omega_1^2 I_b} = \frac{6(1-l_0/l)^4}{(\beta_1 L)^4 (h/l) [1-(l_0/l)^3]} \frac{\sigma_{\max}}{E} \quad \text{..... (A.11)}$$

を得る. ここで, h と $\sigma_{\max}$ はそれぞれ柔軟はりの厚さと, 材料の最大許容応力を表わす. 無次元量 $\sigma_{\max}/E$ は材料固有の最大許容ひずみを意味する.