積分方程式および写像による曲面の創成法*

落合 芳博^{*1}, 石田 良平^{*2}, 広永 美喜也^{*3}

Generation of Free-Form Surface by Integral Equation and Mapping

Yoshihiro OCHIAI, Ryohei ISHIDA and Mikiya HIRONAGA

This paper describes a method for generating a free-form surface by a boundary integral equation and mapping. This method requires knowing the boundary geometry of the free-form surface and setting arbitrary points on the free-form surface. First, a standard surface is developed onto a plain surface by mapping. The height of the points on the free-form surface is calculated, after solving the discretized boundary integral equation. These points are inverse-mapped onto the original space. In order to investigate the efficiency of this method, several examples are performed.

Key Words: Modelling, Drawing, Surface Generation, CAD, Boundary Element Method, Design, Mapping

1. 緒 言

対話形CADにおいて自由曲面を定義する場合, BézierやNURBSにより作成する場合が多い⁽¹⁾. しかし, BézierやNURBSを用いる場合, 点を基盤目状に指定しなければならず, 任意の自由曲面を定義したい場合, 多大な入力の手間を必要とする場合がある. また, 小曲面(パッチ)を用いる手法では小曲面と小曲面の接合線上で滑らかさが損なわれる場合がある. そこで著者は, 境界積分方程式を用いて輪郭のデータおよび曲面上の線(例えば, 等高線)または点のデータの入力のみで定義された自由曲面作成法を提案している⁽²⁾⁽³⁾. 本手法は, 二・五次元図面を作成する場合に適しており, 金型のCADへの応用が考えられる⁽⁴⁾.

提案している自由曲面作成法を壺のような三次元形状に適用するには, いくつかの自由曲面を定義して接合しなければならない. そこで, 本論文では写像の考えを導入することにより, 壺のような三次元形状の自由曲面を容易に作成できることを示す. 本手法では,

曲面座標系を写像により直交座標系に変換し, その座標系で境界積分方程式を用いて自由曲面を作成し, その自由曲面を逆写像により曲面座標系に戻す. なお, 複雑な写像を用いると種々の曲面が得られるが, 本論文では実用性を考慮して簡単な写像のみを考える. また, 図形によってはいくつかの自由曲面を接合することにより容易に作成できる場合もある. そこで, 積分方程式により定義された自由曲面を接合するための基礎式も示す.

2. 理 論

2.1 写像 座標 (X, Y, Z) を写像関数 W により二・五次元の直交座標 (x, y, z) に変換し, 座標 (x, y, z) で滑らかな自由曲面を積分方程式により作成する. この滑らかな自由曲面を座標 (X, Y, Z) に戻すことにより, 目的の自由曲面を得る. 円筒座標系から直交座標系のような写像では, 基準面を展開し, 平面を作り, その展開面上に自由曲面を作成し, 元の空間に戻すことにより滑らかな曲面を得る. 写像関数 W は種々のものが考えられるが, その例として図1(a)~(d)に示すような可展開面や図1(e)の球面を基準面とすることが考えられる.

例として図1(a)の場合, 図2(a), (b)のような座

* 原稿受付 1996年9月11日.

*¹ 正員, 近畿大学理工学部 (〒577 東大阪市小若江 3-4-1).*² 正員, 大阪府立大学工学部 (〒590 堺市学園町 1-1-1).*³ 近畿大学理工学部.

Fig. 1 Examples of mapping

標系を考え、半径 a の円筒を基準面とする円筒座標を平面に展開する次式を満足する写像関数を用いる。

$$X = (a+z) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$Y = (a+z) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$Z = y \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $0 \leq x \leq 2a$ である。逆に、座標 (X, Y, Z) から座標 (x, y, z) への変換は次式で得られる。

$$x = \frac{a}{\pi} \cos^{-1} \left[\frac{X}{(X^2 + Y^2)^{1/2}} \right] \quad Y \geq 0$$

$$= -\frac{a}{\pi} \cos^{-1} \left[\frac{X}{(X^2 + Y^2)^{1/2}} \right] + 2a \quad Y < 0$$

$$\dots\dots\dots (4)$$

$$y = Z \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$z = (X^2 + Y^2)^{1/2} - a \quad \dots\dots\dots (6)$$

図1(e)の場合、図3(a), (b)のような座標系を考える。図3(a)において ϕ は X 軸からの角度、 θ は Z 軸からの角度であり、図3(b)において ϕ は x 軸からの角度とする。半径 a の球を基準面とする球面座標を半径 a の円平面上の二・五次元空間に置き換える。写像関数は次式で与えられる。

$$X = (a+z) \sin \left[\frac{\pi(x^2 + y^2)^{1/2}}{2a} \right] \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\dots\dots\dots (7)$$

Fig. 2 Cylindrical co-ordinates

Fig. 3 Hemispherical co-ordinates

$$Y = (a+z) \sin \left[\frac{\pi(x^2 + y^2)^{1/2}}{2a} \right] \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\dots\dots\dots (8)$$

$$Z = (a+z) \cos \left[\frac{\pi(x^2 + y^2)^{1/2}}{2a} \right] \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、座標 (X, Y, Z) から座標 (x, y, z) への変換は次式で得られる。

$$x = \frac{2Xa}{\pi(X^2 + Y^2)^{1/2}} \cos^{-1} \left[\frac{Z}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}} \right]$$

$$\dots\dots\dots (10)$$

$$y = \frac{2Ya}{\pi(X^2 + Y^2)^{1/2}} \cos^{-1} \left[\frac{Z}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}} \right]$$

$$\dots\dots\dots (11)$$

$$z = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} - a \quad \dots\dots\dots (12)$$

2.2 積分方程式 積分方程式を用いて二・五次元の自由曲面を求める方法はすでに示しているので^{(2)~(4)},

ここでは本論文に必要な式のみを示す。写像後の曲面上の任意点 P の高さ z_1 が二次元問題のポアソン方程式を満足していると仮定する。また、平面 $x-y$ 上に投影した二点 (P, Q) 間の距離を r とすると、一般に二次元の f 重調和関数およびその法線方向微分係数は次式で与えられる⁽²⁾。

$$T_f = \frac{r^{2(f-1)}}{2\pi[(2f-2)!!]^2} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) + \text{sgn}(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial n} = \frac{r^{2f-3}}{2\pi[(2f-2)!!]^2} \left[2(f-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 + 2(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $(2f)!! = (2f)(2f-2)\cdots 4 \cdot 2$ である⁽⁷⁾。 z_{f+1} は z_f の曲率和であり、点状のもの z^p_f 、線状のもの z^L_f 、面状のもの z^S_f に分ける。なお、線状のものの中で二重層である $\partial T_f / \partial n$ に関するものを z^D_f とする。ある程度大きな F に対して $z^S_{F+1} = 0$ とすると、二・五次元の自由曲面は次式のように表現することができる⁽²⁾。

$$\nabla^2 z_1 = (-1)^F (z^L_{F+1} + z^p_{F+1} + z^D_{F+1}) + \text{sgn}(F-1) \sum_{f=1}^{F-1} (-1)^{F+f} \nabla^{2f} [z^L_{F-f+1} + z^p_{F-f+1} + z^D_{F-f+1}] \dots\dots\dots (15)$$

曲面の端を $x-y$ 平面に投影した曲線を境界 Γ と考えると式(15)より任意点の高さ z_1 および f 番めの曲率和 z^S_f は、グリーンの定理より、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} cz^S_f(P) = & \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} \int_{\Gamma} \left\{ T_{e-f+1}(P, Q) \frac{\partial z^S_e(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_{e-f+1}(P, Q)}{\partial n} z^S_e(Q) \right\} d\Gamma(Q) + \sum_{e=f}^F (-1)^{e-f} T_{e-f+1} z^p_e \\ & + \sum_{e=f}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^{e-f} T_{e-f+1} z^L_e d\Gamma_L + \sum_{e=f}^F \int_{\Gamma_D} (-1)^{e-f} \frac{\partial T_{e-f+1}}{\partial n} z^D_e d\Gamma_D \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ただし、 z_1 は式(16)において $f=1$ とするものとし、 Γ_L および Γ_D は線状の z^L_i および z^D_i の形状を示す。滑らかな境界 Γ 上では $c=0.5$ であり、境界の内部では $c=1.0$ であり、境界の外では $c=0$ である。以上で計算に必要な境界積分方程式(16)が得られた。これらの境界積分方程式を解析的に活用することは困難であるので、離散化し数値的に使用する。

また、曲面のこう配は式(16)を微分することにより次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(P)}{\partial x_i} = & - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial z^S_f(Q)}{\partial n} - \frac{\partial^2 T_f(P, Q)}{\partial x_i \partial n} z^S_f(Q) \right\} d\Gamma(Q) - \sum_{f=1}^F (-1)^f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} z^p_{f+1} \\ & - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} z^L_{f+1} d\Gamma_L - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_D} (-1)^f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i \partial n} z^D_{f+1} d\Gamma_D \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = \frac{r^{2f-3} r_{,i}}{2\pi[(2f-2)!!]^2} \left[2(f-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 + 2(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right] \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i \partial n} = & \frac{r^{2f-4}}{2\pi[(2f-2)!!]^2} \left\{ \left[n_i + 2(f-2)r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \left[2(f-1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 + 2(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right] - 2(f-1)r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

2・3 積分方程式の活用例 等高線を活用する方法はすでに示している⁽²⁾⁽³⁾。本論文では内点を活用する方法を示す。 $F=2$ を示す。曲面上の内点の高さを $z(P^p)$ とする。この内点上に z^p_2 を作用させる。わかりやすくするために、境界 Γ に対して一定要素を用いることにする。式(16)を離散化すると次式が得られる。

$$H_1 Z_1 = G_1 V_1 + H_2 Z_2 - G_2 V_2 - G^p_2 Z^p_3 \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 G_1, H_1, G_2, H_2 および G^p_2 は、次式の成分をもつマトリックスである。

$$G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(P, Q) d\Gamma_j \dots\dots\dots (21)$$

$$H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \dots\dots\dots (22)$$

$$G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(P, Q) d\Gamma_j \dots\dots\dots (23)$$

$$H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \dots\dots\dots (24)$$

$$G^p_{2ih} = T_2(P, Q^p) \dots\dots\dots (25)$$

$F=2$ の場合を考えているので、式(16)より次式が得られる。

$$H_1 Z_2 = G_1 V_2 + G^p_1 Z^p_3 \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 G^p_1 は、次式の成分をもつマトリックスである。

$$G^p_{1ih} = T_1(P, Q^p) \dots\dots\dots (27)$$

また、高さ $Z(P^p)$ の点を活用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} Z(P^p) = & -H_3 Z_1 + G_3 V_1 + H_4 Z_2 - G_4 V_2 \\ & - G^p_3 Z^p_3 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ただし、 G_3, H_3, G_4, H_4 および G^p_3 は、次式の成分をもつマトリックスである。

$$G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(P^p, Q) d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(P^p, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(P^p, Q) d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(P^p, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$G^p_{3ik} = T_2(P^p, Q^p) \quad \dots\dots\dots (33)$$

式(20), (26), (28)より次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}^p_2 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}^p_1 \\ \mathbf{H}_4 & -\mathbf{G}_4 & -\mathbf{G}^p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{Z}^p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{Z}_1 - \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_3 \mathbf{Z}_1 - \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{Z}(P^p) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

上式より $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{V}_2$ および $\mathbf{Z}^p_3$ を求めることができる. そして, 任意の内点の高さは式(16)により得られる.

2・4 曲面の接合 積分方程式により作成された二・五次元の二つの自由曲面を接合する方法を示す. わかりやすくするために, 直交座標 (X, Y, Z) に自由曲面が一つあり, その直交座標 (X, Y, Z) を原点を一致させて回転させて作った新しい直交座標 (x, y, z) にもう一つの自由曲面を作成する場合を考える. 座標 X 軸に対する x 軸の方向余弦を L_{xx} と定義し, 他の方向余弦も同様に定義すると, 直交座標 (X, Y, Z) と直交座標 (x, y, z) は次の関係がある.

$$X = L_{xx}x + L_{xy}y + L_{xz}z \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$Y = L_{yx}x + L_{yy}y + L_{yz}z \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$Z = L_{zx}x + L_{zy}y + L_{zz}z \quad \dots\dots\dots (37)$$

同様に次式の関係が成立する.

$$x = L_{xX}X + L_{xY}Y + L_{xZ}Z \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$y = L_{yX}X + L_{yY}Y + L_{yZ}Z \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$z = L_{zX}X + L_{zY}Y + L_{zZ}Z \quad \dots\dots\dots (40)$$

上式により, 高さを合せることが可能である. また, 式(35)~(37)を微分し, 連立微分方程式より dz/dx および dz/dy を求めると次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = & \left[\left(L_{xy} \frac{dZ}{dX} - L_{zy} \right) \left(L_{zx} - L_{yx} \frac{dZ}{dY} \right) \right. \\ & + \left(L_{yy} \frac{dZ}{dY} - L_{zy} \right) \left(L_{zx} - L_{xx} \frac{dZ}{dX} \right) \Big] \\ & \times \left[\left(L_{xy} \frac{dZ}{dX} - L_{zy} \right) \left(L_{zz} + L_{yz} \frac{dZ}{dY} \right) \right. \\ & \left. - \left(L_{yy} \frac{dZ}{dY} - L_{zy} \right) \left(L_{zz} + L_{xz} \frac{dZ}{dX} \right) \right]^{-1} \\ & \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dy} = \left[- \left(L_{xx} \frac{dZ}{dX} - L_{zx} \right) \left(L_{zy} - L_{yy} \frac{dZ}{dY} \right) \right.$$

$$\begin{aligned} & + \left(L_{yx} \frac{dZ}{dY} - L_{zx} \right) \left(L_{zy} - L_{xy} \frac{dZ}{dX} \right) \Big] \\ & \times \left[\left(L_{xx} \frac{dZ}{dX} - L_{zx} \right) \left(L_{zz} - L_{yz} \frac{dZ}{dY} \right) \right. \\ & \left. - \left(L_{yx} \frac{dZ}{dY} - L_{zx} \right) \left(L_{zz} + L_{xz} \frac{dZ}{dX} \right) \right]^{-1} \\ & \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

上式により直交座標 (X, Y, Z) 上の傾き dZ/dX , dZ/dY より直交座標 (x, y, z) 上の傾き dz/dx , dz/dy が得られる. また, 境界の外向き単位法線の成分を n_x, n_y とすると, 法線方向の傾きは次式となる.

$$\frac{dz}{dn} = \frac{dz}{dx} n_x + \frac{dz}{dy} n_y \quad \dots\dots\dots (43)$$

式(16)より曲面上の点の高さを求め, 式(38)~(40)を用いて直交座標 (x, y, z) 上の高さを求める. 式(17)より傾きを求め, 式(41)~(43)を用いて直交座標 (x, y, z) 上の傾きを求め, これらの値と式(34)により自由曲面を作成する.

3. 活 用 例

本手法の有効性を示すために, 式(4)~(6)を用いて円筒座標を平面に展開し, 自由曲面を作成した. 図4(a)に入力データの例を示す. 入力データとして, 通るべき点の位置および境界線の形状および形状線上での法線方向の傾きを入力し, 平面の接合位置での高さと傾きを合せている. 図4(b)に得られた形状を示す.

(a) Input data

(b) Obtained shape

Fig. 4 Cylindrical co-ordinates

(a) Input data

(b) Obtained shape

Fig. 5 Cylindrical co-ordinates

(a) Input data

(b) Obtained shape

Fig. 6 Hemispherical co-ordinates

しており、入力点の位置を変えることにより形状を容易に変化させることができる。当然のことであるが、図5(a)に示すように自由曲面の輪郭形状は任意であり、基準面を円筒形にした場合でも、図5(b)のような自由曲面も求めることができる。

次に、式(7)~(12)を用いて極座標を二・五次元の直交座標系に写像して自由曲面を作成する例を示す。図6(a)が入力データであり、図6(b)に作成された

(a) Input data

(b) Drag

(c) Obtained shape

Fig. 7 Deformation

(a) Pull and push

(b) Obtained shape

Fig. 8 Deformation

形状を示す。

次に、二・五次元の自由曲面を二つ接合して、三次元の自由曲面を作成する例を示す。これは、作成された自由曲面を部分的に変形させる場合にも使用できる。つまり、図 7(a) に示された円および点から図 7(b) のような形状が作成されたとする。ここで、図 7(b) のように変形させる部分を指定し、その表面上の一点を図のように引張る場合を考える。引張る方向を z 軸方向とし、原点を同じくする式(35)～(37)が成立する座標系 (x, y, z) を考える。変形する部分の境界線

上の高さや引張る方向の端点の高さを求め、式(38)～(40)により座標系 (x, y, z) に変換する。さらに、変形する部分の境界線上の傾きを求めて式(41)～(43)により座標系 (x, y, z) での法線方向の傾きに変換する。これらの値より、式(34)により形状を作成したものが図 7(c) である。同様に、図 8(a) のように変形させる部分を指定し、その表面上の一点を引張り、一点を押すと、図 8(b) の形状が作成できる。ただし、この例では接合線上での曲率は一致させていない。

4. 結 言

積分方程式を用いて自由曲面を作成する方法は、基盤目状に点を指定する必要がなく、入力が容易であるが、二・五次元の自由曲面しか作成できなかった。簡単な写像を導入することにより、三次元形状が容易に作成でき、入力データを非常に少なくすることができたことがわかった。また、積分方程式により作成された二・五次元の自由曲面も、容易に接合できることがわかった。

文 献

- (1) Foley, J. D. and Van Dam, A., 今宮淳美訳, コンピュータ・グラフィックス, (1984), 519, 日本コンピュータ協会.
- (2) 落合芳博, 境界積分方程式による曲面の創成法, 機論, **60**-570, C(1994), 709-714.
- (3) 落合芳博, 積分方程式による曲面の創成法の改良, 機論, **61**-591, C(1995), 4549-4554.
- (4) 落合芳博, 金型用 CAD のための自由曲面の作成法, 精密工学誌, **61**(1995), 1087-1091.
- (5) Dyn, N. (Chui, C. K., Schumaker, L. L. and Utreras, F. I. 編), Interpolation of Scattered Data by Radial Functions, in *Topics in Multivariate Approximation*, (1987), 47-61, Academic Press, London.
- (6) Micchelli, C. A., Interpolation of Scattered Data, *Constructive Approximation*, **2** (1986), 12-22.
- (7) 森口繁一・宇田川銑久・一松信, 数学公式III, (1989), 4, 岩波書店.