柔軟性を考慮した構造の最適化*

(第1報, 定式化とコンプライアントメカニズムへの応用)

西 脇 眞 二^{*1}, Mary I. FRECKER^{*2}
関 勝 載^{*2}, 菊 池 昇^{*3}

Structural Optimization Considering Flexibility

(1st Report, Formulation of Equation and Application to Compliant Mechanisms)

Shinji NISHIWAKI, Mary I. FRECKER,
Seungjae MIN and Noboru KIKUCHI

In structural design, the stiffest structure is considered optimal. However, a structure having flexible parts offers certain advantages over a rigid structure in terms of structural performance criteria. Moreover, flexible parts can offer mechanical function to the structure. A relatively new breed of mechanisms, compliant mechanisms, uses the design concept of structural flexibility to achieve a specified motion. In this paper, an optimization design procedure taking structural flexibility into consideration is proposed and applied to compliant mechanism design. First, structural flexibility is formulated using variational calculus, and a new multi-objective function is constructed. This objective function incorporates both maximum flexibility and minimum compliance using the homogenization method. Next, the optimization problem is solved using the Finite Element Method (FEM) and Sequential Linear Programming (SLP). Finally, some design examples of compliant mechanisms are presented, which confirm that the concept of flexible structure design can be used to design compliant mechanisms.

Key Words: Optimum Design, Structural Analysis, Sensitivity Analysis, Flexible Structure, Finite Element Method

1. 緒 言

従来の構造の最適設計では, 多くの場合構造物の剛性の最大化を目標としてきた。例えば Yang ら⁽¹⁾ は, 自動車のボデー構造の設計にトポロジー最適化を適用しているが, 目標関数にはコンプライアンスの最小化, すなわち剛性の最大化を置いている。また, 福島ら⁽²⁾ も同様に, 剛性最大化を目標関数として, 均質化法によるトポロジー最適化を自動車のアングボデーの設計に適用している。しかし実際のボデー構造の設計では, 必ずしも剛性の最大化を目指した設計が最適であるとはいえない。例えば, ボデー構造に柔軟性があれば, ボデーが車両のアライメントを自動調整することにより, 高剛性のボデー以上の操縦安定性能をもつ可能性がある。また, 柔軟性はボデーの危険部である応力集中部の応力をうまく緩和できる可能性もある。さらに, 近年の重要課題である衝突の問題に対しても, 柔軟性のあるボデーは衝撃力の緩和という観点から, 高剛性のボデーより高い性能をもつ可能性がある。

他方, 構造の柔軟性を積極的に利用した機構であるコンプライアントメカニズムが近年注目を浴び, その設計法および有効性について議論され始めている。例えば, Howell ら⁽³⁾⁽⁴⁾ は従来の剛体とジョイントで構成される機構の解析法を擬似的に利用した設計法を提案している。しかしこの方法では, 限られた場所にピボットと呼ばれる柔構造の部位を付加することはできても, 構造全体の柔軟性を利用した機構の形状を創成することは難しい。一方, Sigmund⁽⁵⁾ はマイクロストラクチャの創成法を改良して, 目標関数を体積最小化として, 構造全体の柔軟性を利用した機構の創成法を提案している。また Larsen⁽⁶⁾ は, 入力側と出力側に対する荷重と変化量の相対的な比を目標関数とした方法を提示している。しかし, いずれの方法にせよ, 柔軟性の最大化を目標とはしていないので, 真に柔軟性を追求した形状を創成することは難しいと考えられる。

そこで, 本研究では, 構造物の柔軟性を考慮可能な構造設計法を提案し, 一例としてその方法を, コンプライアントメカニズムの形状創成に適用する。すなわち第2章では, 二次元問題について構造物の柔軟性と剛性を表現するための定式化を行う。つづいて, コンプライアントメカニズムの設計を対象に, 柔軟性

* 原稿受付 1996年10月8日。

*¹ 正員, 大学院生 The University of Michigan (Ann Arbor, MI, 48109, USA)。*² 大学院生 The University of Michigan。*³ The University of Michigan。

と剛性の最大化を目指した多目的最適化問題の定式化を行う。そして、その定式化により均質化法を用いた最適化アルゴリズムを構築する。次に3章では、コンプライアントメカニズムの形状創成を行うとともに、最適形状のメッシュの非依存性と体積制約の最適形状に与える影響について検討する。そして最後に、本法より得たトポロジーから具体的な形状を作成し、その具体的な設計案の妥当性について、通常のFEMを用いて検証する。

2. 定式化

2.1 柔軟性の定式化 図1に示す二次元の弾性変形問題について考える。弾性体は等方性材料で構成され、境界 Γ_d を完全固定しているものとする。ケース(a)では、弾性体の境界 Γ_{t^1} に表面力 $\mathbf{t}^1$ が作用し、このときの Ω 全体での弾性体の変形場は $\mathbf{u}^1 = \{u_1^1, u_2^1\}$ であるとする。ケース(b)では、弾性体の境界 Γ_{t^2} に表面力 $\mathbf{t}^2$ が作用して、このときの Ω 全体での弾性体の変形場は $\mathbf{u}^2 = \{u_1^2, u_2^2\}$ であるとする。また、簡略化のため弾性体に作用する物体力はないものと仮定する。

ここでケース(b)に示す境界 Γ_{t^2} 上の $\mathbf{t}^2$ が単位あたりの表面力であると仮定すれば、次式に示す平均コンプライアンス (Mean Compliance) が、表面力 $\mathbf{t}^1$ による境界 Γ_{t^2} 上での柔軟性を表す尺度であるといえる。

$$L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma = \int_{\Gamma_{t^2}} t_i^2 u_i^1 d\Gamma \quad \mathbf{u}^1 \in V \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(\Omega) \\ &\text{with } \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_d, i=1, 2\}, \\ H^1(\Omega) &\text{はソボレフ空間。} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

したがって、この $L^2(\mathbf{u}^1)$ を最大化することにより、表面力 $\mathbf{t}^1$ を作用したときの境界 Γ_{t^2} 上の弾性体の柔軟性を最大化することが可能である。

Fig. 1 An elastic body subjected to two tractions

次に、図1に示す二つのケースについて、相互ポテンシャルエネルギー (Mutual Potential Energy) の概念⁽⁷⁾⁽⁸⁾を用いてエネルギーの関係式を導く。このとき、仮想仕事の原理は次式となる。

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2) = L^1(\mathbf{v}^2) \text{ for } \mathbf{u}^1 \in V \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V \quad \dots (3)$$

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^1) = L^2(\mathbf{v}^1) \text{ for } \mathbf{u}^2 \in V \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V \quad \dots (4)$$

ここで、 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ は双一次形式で、次式で表される。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$E_{ijkl} \text{ は弾性係数 } E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$$

さらに、相互全ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$F(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) - \frac{1}{2} L^1(\mathbf{v}^2) - \frac{1}{2} L^2(\mathbf{v}^1) \quad \dots\dots\dots (6)$$

さて、図1に示す平衡状態では、以下の関係が成立するので、

$$L^2(\mathbf{u}^1) = a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1) = a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = L^1(\mathbf{u}^2) \quad \dots\dots (7)$$

平均コンプライアンスと相互全ポテンシャルエネルギーの関係は次式で表されることになる。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) - \frac{1}{2} L^1(\mathbf{u}^2) - \frac{1}{2} L^2(\mathbf{u}^1) \\ &= -\frac{1}{2} L^2(\mathbf{u}^1) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

次に平衡状態にあるときの相互全ポテンシャルエネルギーのある設計変数 A に対する変分を導く。弾性係数 E_{ijkl} が設計変数 A の関数であると仮定して、鈴木⁽⁹⁾が示した手続きと同様にして、相互全ポテンシャルエネルギーの変分をとる。

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, A) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\delta u_k^1 + \frac{\partial u_k^1}{\partial A} \delta A \right) \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{t^2}} t_i^2 \left(\delta u_i^1 + \frac{\partial u_i^1}{\partial A} \delta A \right) d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta u_i^2 + \frac{\partial u_i^2}{\partial A} \delta A \right) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{t^1}} t_i^1 \left(\delta u_i^2 + \frac{\partial u_i^2}{\partial A} \delta A \right) d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} d\Omega \delta A \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

上式の最初の2項は

$$v_k^1 = \delta u_k^1 + \frac{\partial u_k^1}{\partial A} \delta A, \quad v_k^2 = \delta u_k^2 + \frac{\partial u_k^2}{\partial A} \delta A$$

と仮定すれば、式(3)、(4)により相殺される。したがって、設計変数 A に対する F の感度は、第3項

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} d\Omega$$

になる。さらに、式(8)の関係式を用いれば、設計変

数 A に対する $L^2(\mathbf{u}^1)$ の感度は、次式で表されることがわかる。

$$\frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial A} = - \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^1}{\partial x_i} \frac{\partial u_l^1}{\partial x_j} d\Omega \quad \dots\dots\dots (10)$$

2・2 剛性の定式化 図1のケース(a)の弾性変形問題を考える。この場合の表面力 $\mathbf{t}^1$ を作用させた箇所平均コンプライアンスは次式で表される。

$$L^1(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma = \int_{\Gamma_1} t_i^1 u_i^1 d\Gamma \quad \mathbf{u}^1 \in V \quad \dots\dots\dots (11)$$

この $L^1(\mathbf{u}^1)$ を最小化することにより、 Γ_1 上の剛性は最大化される。さて、図1の平衡状態では以下の関係式が成立するので、

$$L^1(\mathbf{u}^1) = a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$F(\mathbf{u}^1) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) - L^1(\mathbf{u}^1) = -\frac{1}{2} L^1(\mathbf{u}^1) \quad \dots\dots\dots (13)$$

また、鈴木⁽⁸⁾が示しているように、平衡状態での設計変数 A に対する全ポテンシャルエネルギーの変分は次式となる。

$$\delta F(\mathbf{u}^1, A) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^1}{\partial x_i} \frac{\partial u_l^1}{\partial x_j} d\Omega \delta A \quad \dots\dots\dots (14)$$

したがって、最終的に設計変数 A に対する $L^1(\mathbf{u}^1)$ の感度は、次式で表されことになる。

$$\frac{\partial L^1(\mathbf{u}^1)}{\partial A} = - \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^1}{\partial x_i} \frac{\partial u_l^1}{\partial x_j} d\Omega \quad \dots\dots\dots (15)$$

2・3 均質化法 文献(9)～(11)に示してあるように、構造のトポロジー最適化問題では、設計空間において無限の不連続点をもつことが許容されている。しかし、このような設計空間を数値計算上取扱うことは不可能である。この問題を克服するためには設計空間を連続関数に置き換える“設計空間の緩和”が必要となる。本研究においても、その緩和方法として文献(9)～(11)と同様に均質化法を用いる。均質化法に用

いる二次元のマイクロストラクチャには、図2に示すユニットセルを用いる。ここで、設計変数は、各ユニットセルでの長さ α, β と回転角度 θ である。そして、均質化された弾性係数を求めるために、次の関係式を満たす特性関数 χ を求める。

$$\int_Y \sum_{i,j,m,n=1}^2 E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y \sum_{i,j=1}^2 E_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \quad \forall \mathbf{v} \in V_Y \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 Y はユニットセルの領域、

$$V_Y = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \text{ はユニットセル} \}$$

$$\text{の領域 } Y \text{ について周期的, } k, l = 1, 2 \} \dots\dots\dots (17)$$

式(16)から得られた特性関数 χ を次式に代入して均質化された弾性係数 E_{ijkl}^H を求める。

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl} - \sum_{m,n=1}^2 E_{ijkm} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式により、 α, β と E_{ijkl}^H の関係を導く。なお回転角度 θ との関係は E_{ijkl}^H を回転変換することにより導く。

すなわち、

$$E_{ijkl}^G = \sum_{I,J,K,L=1}^2 E_{IJKL}^H R_{iI} R_{jJ} R_{kK} R_{lL} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 R_{iI} は回転変換マトリックス。

以上の手続きにより、マイクロストラクチャ上の設計変数と均質化された弾性係数との関係を導く。

2・4 最適化問題の定式化 コンプライアントメカニズムの形状設計を例として、Frecker⁽¹²⁾と同様な手続きにより最適化問題を定式化する。図3に示すように、機構の設計には柔軟性をもつ箇所と剛性をもつ箇所が必要になる。すなわち、ケース(a)のように弾性体の Γ_{t1} の部分に荷重を与えたときに、機構として変形するための Γ_{t2} の部分の柔軟性と、ケース(b)のように対象物からの反力に対して、 Γ_{t2} の部分が十分抗することができる剛性である。なおケース(b)においては、荷重を Γ_{t1} の部分に負荷していることを前提にしているので Γ_{t2} の部分の剛性は Γ_{t1} の部分を完全

Fig. 2 A unit cell of microstructure

Fig. 3 Compliant mechanism design

拘束した状態で評価する必要がある。

まず最初に、2・3節の結果を使用して柔軟性に関して最適化問題を定式化すると、以下のようになる。

ケース (a)

$$\max L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma^2} t_i^2 u_i^1 d\Gamma \quad \dots\dots\dots (20)$$

制約条件

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1) \text{ for } \mathbf{u}^1 \in V^{(a)} \quad \forall \mathbf{v}^1 \in V^{(a)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2) \text{ for } \mathbf{u}^2 \in V^{(a)} \quad \forall \mathbf{v}^2 \in V^{(a)} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$V^{(a)} = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e} : v_i \in H^1(\Omega) \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_d\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\int_{\Omega_d} (1 - \alpha\beta) d\Omega \leq \Omega_s \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 Ω_s は体積の制約

次に剛性に関する定式化を行う。

ケース (b)

$$\min L^3(\mathbf{u}^3) = \int_{\Gamma^2} t_i^3 u_i^3 d\Gamma \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$t_i^3 = -t_i^2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

制約条件

$$a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3) \text{ for } \mathbf{u}^3 \in V^{(b)} \quad \forall \mathbf{v}^3 \in V^{(b)} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$V^{(b)} = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e} : v_i \in H^1(\Omega) \text{ with } v = 0 \text{ on } \Gamma_d \text{ and } \Gamma_{t1}\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\int_{\Omega_d} (1 - \alpha\beta) d\Omega \leq \Omega_s \quad \dots\dots\dots (24)$$

上述のような多目的問題を解く方法には、種々のものの^{(13)~(17)}が提案されている。その中でも次式の加重和による定式化はもっとも一般的な方法の一つである。

$$\max f_1 = w_1 L^2(\mathbf{u}^1) + w_2 (-L^3(\mathbf{u}^3)) \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 w_1 と w_2 は重み係数 ($w_1 + w_2 = 1$)。

しかし本最適化問題では、ある重み係数において式(20)が無大になる可能性があるため、パレート解のすべてが物理的に意味のある最適解にならない。よって、パレート解の中から物理的に意味のある解を求める必要があるが、式(29)を用いた場合には妥当な解に対応する重み係数を決定することは容易ではない。そこで本研究では、次式の目標関数を用いて最適化問題を解く。

$$\max f_2 = \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

この目標関数のある設計変数 A に対する微分値を求めると次式となる。

Fig. 4 Optimization algorithm

$$\frac{\partial f_2}{\partial A} = \frac{1}{L^3(\mathbf{u}^3)} \frac{\partial L^2(\mathbf{u}^1)}{\partial A} + \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)^2} \left(-\frac{\partial L^3(\mathbf{u}^3)}{\partial A} \right) \quad \dots\dots\dots (31)$$

上式と式(29)を比較することにより、式(30)の等価な重み係数を求めると次式になる。

$$w_1 = \frac{L^3(\mathbf{u}^3)}{L^2(\mathbf{u}^1) + L^3(\mathbf{u}^3)}, \quad w_2 = \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^2(\mathbf{u}^1) + L^3(\mathbf{u}^3)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

これより、式(20)の値が大きくなると重み係数 w_1 は小さな値になることがわかる。すなわち、目標関数自体が無大にならないように重み係数を自動的に調整するため、パレート解の中から常に物理的に意味のある最適解を得ることができる。以上のことから、本研究における最適化問題を以下のように定式化する。

$$\max \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)} \quad \dots\dots\dots (33)$$

制約条件式(21), (22), (24), (26), (27)

2・5 最適化アルゴリズム 図4に式(33)の問題の最適化アルゴリズムを示す。

従来よりトポロジー最適化では、最適化問題を解く有効な手段として最適基準法が用いられてきた。しかし、Ma⁽¹⁸⁾が指摘しているように、目標関数が非凸性をもつ場合にはこの方法の適用は困難になる。そこで本研究では、高い収束性は期待できないが、どのような目標関数においても、設計変数が10 000以上の大規模な最適化問題を解くことができる逐次線形計画法(SLP)を用いることにした。

最初に均質化法とFEMにより、必要な状態量を算出し、設計変数 α, β に関してSLPにより最適化問題を解く。次に、回転角度 θ を目標関数が最大になるように更新するが、この角度 θ はケース(b)の目標関数が最小化される方向にほぼ等しいと考えられるので、近似的にその方向に角度を更新する。なお、SLPに必要な目標関数の設計変数 α, β に対する感度は、式

(7), (10), (12), (15)から次式となる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)} \right) \\ &= \frac{-\sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega_d} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} d\Omega a(\mathbf{u}^3, \mathbf{u}^3)}{a(\mathbf{u}^3, \mathbf{u}^3)^2} \\ &+ \frac{a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega_d} \left(\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial A} \right) \frac{\partial u_k^3}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^3}{\partial x_j} d\Omega}{a(\mathbf{u}^3, \mathbf{u}^3)^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし, A は α あるいは β .

また, 体積制約条件の設計変数 α, β に関する感度は, それぞれ,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{\Omega_d} (1-\alpha\beta) d\Omega \right) = \int_{\Omega_d} (-\beta) d\Omega \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{\Omega_d} (1-\alpha\beta) d\Omega \right) = \int_{\Omega_d} (-\alpha) d\Omega \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる.

3. 数 値 例

コンプライアントメカニズムの形状創成を対象に, 二次元のトポロジー最適化を行った. 解析に必要なモデルの材料特性は, いずれの解析例についてもヤング率は100, ポアソン比は0.3とし, 単位荷重を入力して解析した. なお, 設計領域に示したA点は図3の Γ_{t1} に相応し, B点は Γ_{t2} に相応する.

Fig. 5 Design domain for simple model

Fig. 6 Convergence history of simple problem

3.1 最適解のメッシュ非依存性

2章で定式化した目標関数により得られた最適解が, メッシュの粗粗に影響されず同一であることを, 単純モデルを用いて検証する. なおこの単純モデルは対称な形状を想定しているため, 中心線に対称条件を入れて実際の半分を設計領域とした. 図5に設計領域を示す. 図5の上部左側を完全固定して, Aの部分に矢印の方向に荷重を負荷した場合のBの部分の矢印の方向の変位を最大化するとともに, Bの部分の剛性の最大化をねらった. また初期解は, すべての要素について $\alpha=\beta=0.95, \theta=0.0$ とし, 体積制約を $\Omega_s=320$ とし最適化を行った.

図6に要素数が 60×30 の場合の式(30)の目標関数と式(20)と(25)の二つのコンプライアンスの収束状況を示す. これより, 目標関数が最適点に達した段階で, 式(20)のコンプライアンスは増加し, 式(25)のコンプライアンスは減少していることがわかる.

次に, 図7に要素数が 40×20 の場合の最適解を, 図

Fig. 7 Optimal configuration (40x20)

Fig. 8 Optimal configuration (60x30)

Fig. 9 Optimal configuration (80x40)

Fig. 10 Design domain for gripper

Fig. 11 Convergence history of gripper problem

8には 60×30 の場合の最適解を, 図9に 80×40 の場合の最適解を示す. 図7~9を比較すると, 細部において多少の差はあるものの, 全体の最適解のトポロジーはほぼ同じであることがわかる. したがって, メッシュの細粗は最適解にほとんど影響を与えないと考えられる.

3.2 体積制約の最適解に与える影響 次に, 体積制約 Ω_s が最適解に与える影響をグリップの形状創成の問題を用いて検討する. なおグリップは対称な形状を想定しているので, 中心線上に対称条件を入れて半分のみを設計領域とした. 図10に設計領域を示す. 設計領域の左側はグリップの取付部とするため完全拘束した. そして, 図10のAの部分に, 矢印の方向に荷重を负荷したときにBの部分の矢印の方向に変形し, 対象物をつかむことができるように, AB間の柔軟性を最大化するとともに, Bの部分の対象物を保持できるように, Bの部分の剛性を最大化した. また, 設計領域は要素数1600で分割し, 初期条件はすべてのケースについて, すべての要素で $\alpha=\beta=0.9$, $\theta=0.0$ とし, 最適解と体積制約 Ω_s の関連性を調べた.

図11に体積制約を240とした場合の式(30)の目標関数と式(20)と(25)の二つのコンプライアンスの収束状況を示す. これより, グリップのような複雑な形状の創成についても, 式(30)の目標関数が最大化される

Fig. 12 Optimal configuration ($\Omega_s=160$) Fig. 13 Optimal configuration ($\Omega_s=240$) Fig. 14 Optimal configuration ($\Omega_s=400$)

につれて, 式(20)のコンプライアンスは増加し, 式(25)のコンプライアンスは減少していることがわかる.

次に, 図12に体積制約 Ω_s が160の場合の最適解を, 図13に体積制約 Ω_s が240の場合の最適解を, 図14に体積制約 Ω_s が400の場合の最適解を示す.

図12と図13を比較すると, Aの部分, すなわち荷重を负荷する部分のトポロジーが体積制約の増加とともに変化していることがわかる. しかし, 図13と図14を比較すると形状の相違はあってもトポロジーに大きな変化がない. したがって, ある体積制約を境界にトポロジーが変化する可能性があることがわかった. 一方Bの部分, すなわち対象物をつかむ部分については, 体積制約が大きくなるにつれて, 材料が密になる傾向にあることがわかる. これはBの部分の剛性を最大化するように目標関数を設定しているためであると考えられる. また, 設計領域の左側の完全拘束部との連結構造は体積制約によらずほぼ同じ構造であ

拘束して、左上部の A の部分に単位荷重を矢印の方向に負荷することにより解析した。なお、要素数は 1841、節点数は 2147 で材料特性は前述のトポロジー最適化の場合と同様の値を用いた。

図 19 に変形図を、図 20 にミーゼスの応力の分布状況を示す。なお図 20 では、暗色部が高応力部を示す。

図 19 から、B の部分の変形は、トポロジー最適化の段階において目標関数の要求仕様としたように変形していることがわかる。また図 20 から、拘束部分を除いて、局所的な応力集中がみられないことがわかる。したがって、A の部分に荷重を負荷した場合には、局所的な破壊は発生しにくいと考えられる。

以上の結果をまとめると、本論文で提唱した設計法により、構造物の柔軟性を利用した機構であるコンプライアントメカニズムを設計可能であると考えられる。

4. 結 言

本論文では、柔軟性を考慮した構造物の最適設計法を提唱するとともに、一例としてその方法をコンプライアントメカニズムの形状設計に適用した。結果を以下に示す。

(1) 構造物の柔軟性を相互エネルギーの概念を用いて定式化した。さらに、最適設計に必要な設計変数に対する相互エネルギーの感度も導出した。

(2) 柔軟性の最大化と剛性の最大化の両方を考慮可能な目標関数の定式化を行うとともに、均質化法と逐次線形計画法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築した。

(3) コンプライアントメカニズムのトポロジー創成を例として、FEM のメッシュの細粗が最適解に与える影響と、体積制約が最適解に与える影響について

検討を行った。

(4) トポロジー最適化により得た設計解の妥当性を、通常の FEM 解析を用いて検証した。

文 献

- (1) Yang, R. J. and Chahande, A. I., *Struct. Optim.*, **9** (1995), 245-249.
- (2) Fukushima, J., Suzuki, K. and Kikuchi, N., *Optimization of Large Structural Systems*, **1** (1993), 177-191, Kluwer Academic Publishers.
- (3) Howell, L. L. and Midha, A., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, **116** (1994), 280-289.
- (4) Howell, L. L. and Midha, A., *Trans. ASME, Mach. Elem. Mach. Dyn.*, De-Vol 71 (1994), 491-500.
- (5) Sigmund, O., *Proc. IUTAM Symp. Optim. Mech. Syst.*, (1995), 26-41.
- (6) Larsen, U. D., Sigmund, O. and Bouwstra, S., *Proc. IEEE MEMS, Piscataway, NJ*, 96CH35856 (1996), 365-371.
- (7) Shield, R. T. and Prager, W., *ZAMP, J. Appl. Math. Phys.*, **21** (1970), 513-523.
- (8) Huang, N., *ZAMP, J. Appl. Math. Phys.*, **22** (1971), 609-620.
- (9) Suzuki, K. and Kikuchi, N., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **93** (1991), 291-318.
- (10) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **71** (1988), 197-224.
- (11) 菊池昇, 応用数理, **3-1** (1993), 2-26.
- (12) Frecker, M. I., Kikuchi, N. and Kota, S., *Proc. ASME 96 DETC/DAC-1417* (1996), 1-7.
- (13) 志水清孝, 多目的と競争の理論, (1982), 30-119, 共立出版.
- (14) Stadler, W. 編, *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*, (1988), 1-25, Plenum Press.
- (15) Eschenauer, E., Koski, J. and Osyczka, A. 編, *Multicriteria Design Optimization*, (1990), Springer-Verlag.
- (16) Koski, J. and Silvennoinen, R., *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, **24** (1987), 1101-1201.
- (17) Koski, J., *Proceedings of Advances in Design Automation, ASME, DE-Vol.*, **65-1** (1993), 621-629.
- (18) Ma, Z.-D., Kikuchi, N. and Cheng, H.-C., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **121** (1995), 259-280.