弾性ロータ・磁気軸受のモード別 H_∞ 制御*林 浩之^{*1}, 斉 藤 隆^{*1}
篠 田 佳彦^{*2}, 岡 田 養二^{*3}Modal H_∞ Control of Flexible Rotor Supported by Magnetic BearingsHiroyuki HAYASHI, Takashi SAITO,
Yoshihiko SHINODA and Yohji OKADA

Robust H_∞ control of a flexible rotor supported by magnetic bearings is described. It is aimed at stabilization of a flexible rotor which runs over the bending critical speed. Both ends of the rotor are supported by magnetic bearings which are controlled by a local PD controller. The stiffness of the bearings needs to be high so that the vibration in the bending modes becomes less damped with increasing feedback gains. Additional sensors are installed for measurement of the bending modes and the modal PD controller is used to reduce the higher peaks. However, since spillover instability occurs in the system by using the modal controller, a modal H_∞ controller is used to avoid spillover instability. The results show a high probability of reduction of the lower bending vibration and robustness to the higher peaks.

Key Words: Magnetic Bearing, Flexible Rotor, Rotary Machinery, Robust Control, Digital Control, Modal Control, Supercritical Rotor

1 はじめに

磁気軸受の非接触支持による摩擦の低減は、ロータの高速回転に適している。しかも磁気軸受は能動制御が可能なので、弾性ロータには最適な軸受と考えられる⁽¹⁾。しかし弾性モードを越えた高速回転の報告例は、以外と少ない。その主な理由は、単位面積当たりの支持力が小さいので、軸受を大きくする必要があり、必然的に剛性ロータとなりやすい。弾性ロータの制御が困難で、スピルオーバー不安定が起きやすい、などのためである。最近になって、これらを考慮して弾性ロータの超高速回転を、ロバスト制御を使って実現しようと言う研究が増えてきた。しかしそのほとんどが、剛性モードは完全に制御するが、弾性モードは本来安定であるとし、これに関してはロバスト安定性を得ようとする研究が主である⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾。

ここで取り上げる問題は、弾性ロータの低次の共振モードのいくつかは積極的に振動制御を行い、高次のモードについてはロバスト安定性を得ようとするものである。磁気軸受は両端にのみ設置され、しかも高い支持剛性が要求されるので、両端支持に近い状態となる。当然ながら弾性モードの減衰は悪化し、高速回転時には問題が生じる。軸の中間には軸受は設置できないが、センサは設置でき弾性モードを検出できる

とする⁽⁵⁾。

提案する方法は、まず両端の磁気軸受でローカルなPD(PID)制御で十分な支持剛性と安定性を得る。この状態で軸をモード解析し、モード変換マトリクスを得る。各センサの検出信号をモード変換マトリクスを使ってモード変位に変換する。これにモード減衰を与える伝達関数を適用し、さらに逆変換し磁気軸受を制御する。このモード減衰を与える伝達関数にPD制御を適用し、弾性1次モードの制御に良好な結果を得た。しかしロータの回転によるジャイロ効果で軸の特性が変化すると、高次モードが不安定化する。今回はこのモード減衰を与える伝達関数に H_∞ 制御を適用したところ、高次弾性モードに対してロバスト安定性が得られた。4軸制御ラジアル磁気軸受のように、多入力多出力系の H_∞ 制御器を設計することは、重みの決定等が複雑化し設計が困難である。提案するモード領域での H_∞ 制御系設計は、特定のモード領域では1入力1出力で、1自由度の制御対象に対する設計で良く、物理的意味が明確で設計が容易である長所がある。実験では弾性1次モードを制振し、2次以上にはロバスト安定性が得られ、シミュレーションと同じ様な結果が得られたので、報告する。

2 ローカルPD制御とモード別PD制御

今回取り上げる磁気軸受系を、図1に示す。軸受の基本的

* 原稿受付 1996年11月19日。

^{*1} 学生員, 茨城大学大学院(〒316 日立市中成沢町4-12-1)。

^{*2} 正員, 動力炉・核燃料開発事業団(〒319-11 茨城県那珂郡東海村村松)。

^{*3} 正員, 茨城大学工学部。

Figure 1: Schematic of rotor and magnetic bearing system

Figure 2: The bending vibration modes of the rotor supported by local PD controlled magnetic bearings

な制御には、ローカル PD 制御を適用し、弾性モードの制御にはモード領域の制御を採用する。

2.1 ローカル PD 制御 ローカル PD 制御は、磁気軸受制御の基本であり、最も広く使われている。両端のラジアル磁気軸受の水平と垂直方向の制御に、次の PD 制御を適用する。

$$f_i = K_{pi}x_i + K_{di}\frac{dx_i}{dt} \quad (1)$$

ここで比例 (P) は軸剛性を、微分 (D) は減衰特性を改善する。軸受に十分な剛性を持たせるため、比例ゲイン K_{pi} を増加すると軸受は単純支持に近づき、弾性モードの減衰は悪化する。

2.2 モード別 PD 制御 両端を PD 制御された軸受の等価剛性を求め、軸系を有限要素モデル化する。簡単のためジャイロ効果と減衰を省略すると、軸の各曲げ方向に対して式 (2) のマトリクス運動方程式を得る。

$$m\ddot{x} + kx = f \quad (2)$$

この同次方程式を固有値解析し、モードマトリクス Φ を求める。実験に使った軸の固有振動数と振動モードは、図 2 のよ

うに求められる。回転軸は、直径 $\phi 8\text{mm}$ 、長さ 500mm のステンレス鋼で、中央に質量 $m_c = 1.35\text{ Kg}$ 、慣性モーメント $J_c = 3.2 \times 10^{-3}\text{ Kg m}^2$ 、極モーメント $J_{pc} = 6.3 \times 10^{-3}\text{ Kg m}^2$ の回転円盤を取り付けた。中央円盤より 200 mm 離れた位置に磁気軸受ロータの質量 $m_g = 0.39\text{ Kg}$ 、慣性モーメント $J_g = 1.9 \times 10^{-4}\text{ Kg m}^2$ 、極モーメント $J_{pg} = 3.2 \times 10^{-4}\text{ Kg m}^2$ の円盤を左右に配置する。支持剛性は後述するように、支持点に $k = 1.0 \times 10^5\text{ N/m}$ を代入して計算した。

前述のモードマトリクス Φ を使って、物理座標系をモード座標系に変換する。

$$x = \Phi q, \quad q = \Phi^T x \quad (3)$$

座標変換を使うと、運動方程式 (1) は次のように対角化される。

$$\Phi^T m \Phi \ddot{q} + \Phi^T k \Phi q = \Phi^T f = Q \quad (4)$$

ここで係数マトリクスは

$$\begin{aligned} \Phi^T m \Phi &= \text{diag}[1 \ 1 \ \dots \ 1] \\ \Phi^T k \Phi &= \text{diag}[\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_n^2] \end{aligned} \quad (5)$$

となり、モードごとの 1 自由度の方程式

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i \quad (6)$$

となる。いま、任意の i 次モードに対し、モード PD 制御

$$Q_i = -K_{pi}q_i - K_{di}\dot{q}_i \quad (7)$$

を代入すると、次の方程式を得る。

$$\ddot{q}_i + K_{di}\dot{q}_i + (K_{pi} + \omega_i^2)q_i = 0 \quad (8)$$

モードごとに適切なコントローラを選択することで、各モードの振動を個別に制御し、任意の閉ループ特性とすることが出来る。

2.3 シミュレーション 上述の手法を確かめるため、MATLAB を使って系をシミュレートした。図 1 の 3 質点ロータ系

Figure 3: Frequency responses with the local PD control ($\Omega = 0$)

Figure 4: Frequency responses with the local and modal PD control ($\Omega = 0$)

をジャイロ効果を含めた有限要素モデル化し、それに提案したローカルPD制御とモード別PD制御

$$f_i[\text{または } Q_i] = -(K_{pi} + \frac{K_{dis}}{T_{di}s + 1})x_i[\text{または } q_i] \quad (9)$$

を適用する。ここでは微分時定数 T_d を持った、近似微分を使う。ローカル制御には十分な剛性と安定性を得られるように、 $K_p = 10^5[\text{N/m}]$, $K_d = 231[\text{Ns/m}]$, $T_d = 0.65[\text{ms}]$ と選んだ。ローカルPD制御の周波数応答を、図3に示す。これは左端(x_1)のディスクを加振した場合の、各ディスクの応答を求めたものである。十分な軸受剛性が得られているが、中央質点(x_2)に弾性1次モードの共振 $\omega_1 \approx 150[\text{rad/s}]$ が現れている。

この軸系を有限要素法で固有値解析したところ、図2に示すように1次弾性振動数が $\omega_1 = 146.4[\text{rad/s}]$ で振動モード $\Phi_1 = [0.154 \ 1.088 \ 0.154]^T$ と求められた。3個のセンサから得られた変位よりモード変位 q_1 を求め、モード領域のPD制

Figure 5: Frequency responses with the local and modal PD control ($\Omega = 3000$)

御を $K_{p1} = 0$, $K_{d1} = 2500[\text{Ns/m}]$, $T_{d1} = 0.2[\text{ms}]$ として、操作信号 Q_1 を求める。さらに $f = \Phi Q$ を使って物理領域の操作信号を作る。中央のロータには磁気軸受はついていないので、この操作量の左右の力だけを左右のローカルコントローラの制御力に加えて制御する。この場合の回転数 $\Omega = 0[\text{rad/s}]$ の周波数応答を、図4に示す。弾性1次モードの共振が良く制御されていることがわかる。

この手法で問題となるのは、軸が回転しジャイロ効果が加わった場合である。図5に軸回転数 $\Omega = 3000[\text{rad/s}]$ の周波数応答を示す。ジャイロ効果によって、前進と後進の歳差運動により共振が別れている。特に3次モードの前進歳差が、 $\omega = 5700[\text{rad/s}]$ 付近で不安定化している。この共振は、コローケーションが成立するローカルPD制御だけでは当然ながら不安定化しない。

3 モード別 H_∞ 制御

モードコントローラにPD制御を適用すると、弾性モードの制振には有効であるが、軸が回転しジャイロ効果が大きくなると、高次モードでスピルオーバー不安定が発生する恐れがある。そこで弾性1次モードコントローラに H_∞ ロバスト制御を適用することを考える。

3.1 制御系設計 モードコントローラを H_∞ 混合感度問題を使って設計する。選択されたモードの制御対象は1自由度の共振系で表されるので、スピルオーバーが発生する高次のモードを乗法的変動として扱う。この一般化プラントを、図6に示す。 w_1 と w_2 を外乱と観測ノイズ、 z_1 と z_2 を制御変数、 y をコントローラへの観測量とすると、次のプラントの方程式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p(w_1 + u) \\ y &= C_p x_p + D_w w_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Figure 6: Generalized plant for H_∞ mixed sensitivity problem

Figure 7: Inverse characteristics of the weighting functions W_s, W_T

ここで、各マトリクスは

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \\ B_p &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_p &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D_w &= 1 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (11)$$

感度関数と相補感度関数に対する重みは、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} W_s &= \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{bmatrix} \\ W_T &= \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Figure 8: The H_∞ controller $K(s)$ and the 3rd order approximation

従って拡大状態方程式は次式となる。

$$G(s) = \begin{bmatrix} A_s & 0 & B_s C_p & 0 & B_s D_w & 0 \\ 0 & A_T & 0 & 0 & 0 & B_T \\ 0 & 0 & A_p & B_p & 0 & B_p \\ C_s & 0 & D_s C_p & 0 & D_s D_w & 0 \\ 0 & C_T & 0 & 0 & 0 & D_T \\ 0 & 0 & C_p & 0 & D_w & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

これを、MATLAB のロバストコントロールツールボックスを使って解く。プラントの 1 自由度振動系は、 $\omega_n = 150$ [rad/s]、 $\zeta = 0.01$ と選んだ。試行錯誤で、次の重みを選定した。

$$W_s = \frac{(50s + 1)s}{\left(\frac{1}{120}s + 1\right)^4} \times 0.02, \quad (14)$$

$$W_T = \frac{\left(\frac{1}{200}s + 1\right)^4}{\left(\frac{1}{2000}s + 1\right)^4} \times 0.1 \quad (15)$$

この重みの逆を、図 7 に示す。感度関数の重みは弾性 1 次の共振を低下させるように、相補感度関数の重みは高周波でのロバスト安定性を得るように選定した。MATLAB のロバストコントロールツールボックスで計算されたコントローラを、図 8 に示す。8 次のコントローラが得られたが、これを MATLAB の modred を使って縮小すると、3 次で近似できる。

3.2 シミュレーション H_∞ コントローラの効果を確認するため、シミュレーションを行った。左端のロータを加振した場合の周波数応答を、図 9 に示す。150 [rad/s] 近くの共振は十分に減衰されている。この状態で軸を回転させ $\Omega = 3000$ [rad/s] での周波数応答を、図 10 に示す。この図からだけでは分かりにくい、6000 [rad/s] 近くの共振が不安定化することはない。これは固有値解析（このときの対応する固有値は $-30.6 \pm j5983$ ）からも確認でき、図 5 と比較すると良好な結果を示している。

Figure 9: Frequency responses with the modal H_∞ controller ($\Omega = 0$)

Figure 10: Frequency responses with the modal H_∞ controller ($\Omega = 3000$)

4 実験

提案した手法の有効性を確かめるため、図1に示す実験装置で回転実験をおこなった。軸は水平に設置され、右端にカップリングを介してDCモータを取り付ける。これで、3000 [rev./min.] まで回転できる。

3個のロータの水平と垂直方向に計6個のギャップセンサを取り付け、検出した変位を16ビットA/DコンバータでDSP(TMS320C40)に取り込む。提案したコントローラを双一次変換したデジタルコントローラで操作信号を計算し、12ビットD/Aコンバータを介してパワーアンプに出力する。

実験結果のアンバランス応答を、図11から図14に示す。これは軸を回転した場合に、軸系に存在する微少な偏心で生

Figure 11: Unbalance response of midspan mass with local PD controller

Figure 12: Unbalance response of midspan mass with local and modal PD controller

Figure 13: Unbalance response of midspan mass with modal H_∞ controller

ずる遠心力によって励起される、回転に同期した振れ回り応答（アンバランス応答）を記録している。図11はローカルPD制御のみの場合で、1500 [rev./min.] 近くに共振をもっている。この共振は、モード別PD制御（図12）およびモード別 H_∞ 制御（図13）を併用することで、十分に減衰を与えることができる。特に8次の伝達関数を使ったモード別 H_∞ 制御の図13の応答は、きわめて良く減衰されている。これを3次に縮小した図14の応答も良好な結果を示し、高次のロバスト安定性と弾性1次モードへの減衰効果が、両立していることを示している。図13と図14の応答に違いが認められるのは、実験中にアンバランス量が増えるなど、ロータの

Figure 14: Unbalance response of midspan mass with reduced order modal H_∞ controller

特性に変化があったためと考えられる。

残念ながら使用モータの制限で、軸の回転が 3000 [rev./min.] に制限されているため、スピルオーバー不安定を発生させ、それを H_∞ ロバストコントローラで回避できることを示すまでには至っていない。しかしながら、シミュレーションの結果から、モード別 H_∞ 制御の高次モードへのロバスト安定性への改善が認められるものとする。

5 結論

弾性ロータを磁気軸受で制御し、モード別 H_∞ 制御を提案し、かつ実験を行って次の結論を得た。

- モード別制御は、弾性ロータの危険速度を越えた回転の制御に有効である。
- 完全なモード別制御（多数のセンサとアクチュエータが使える）では、高次モードが不安定化する危険性は少ないが、両端のみ磁気軸受で支持する通常のロータでは、高次モードのスピルオーバーが問題となる。

- このモード別制御に H_∞ ロバスト制御を適用すると、高次モードのスピルオーバー不安定の改善に有効である。
- この H_∞ 制御は、多自由度制御系設計が各モードごとの 1 自由度共振系に対する設計となるので、重みの選定等が明確であり、かつ次数が必要以上に高くない。

今回は弾性 1 次モードのみを制御対象として良好な結果を得たが、今後曲げモードの次数の高い系に適用し、ジャイロ効果の影響を受けやすいモードまでの、本提案の有効性を確かめる必要がある。

6 参考文献

- [1] 岡田、他: 磁気軸受の基礎と応用, 日本機械学会新技術融合シリーズ, No.1, 養賢堂, (1995), pp.1-190.
- [2] R. Herzog and H. Bleuler, Proc. of the 3rd Int. Symp. on Magnetic Bearings, July 29-31, Alexandria, (1992), 485-494.
- [3] M. Fujita, et. al., Proc. of the 3rd Int. Symp. on Magnetic Bearings, July 29-31, Alexandria, (1992), 495-504.
- [4] W.-M. Cui, and K. Nonami, Proc. of the 3rd Int. Symp. on Magnetic Bearings, July 29-31, Alexandria, (1992), 505-516.
- [5] 林、篠田、岡田: 第 7 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム講演論文集, No.7, (1995). 205-210