ホール素子による玉軸受の玉の運動計測法に関する一考察*

今 戸 啓 二^{*1}, 宮 川 浩 臣^{*1}
佐々木 正 明^{*2}, 平 野 富 士 夫^{*3}

A Study of Hall Element Method for Ball Motion in a Ball Bearing

Keiji IMADO, Hiroomi MIYAGAWA,
Masaaki SASAKI and Fujio HIRANO

Determining the actual ball motion in a ball bearing is important for tribological analysis, such as estimating oil film thickness, heat generation, etc. Generally, the method used for this purpose is to measure the magnetic field change induced by the rotation of a magnetized ball. In earlier studies, a search coil was used to detect the ball motion, by means of which three-dimensional ball motion was not available. Recently, Kawakita developed the Hall element method, in which Hall elements were arranged so as to detect three-dimensional ball motion. In his method, in spite of the fact that the radial direction components of the magnetic flux were measured through contact points, a fixed cartesian coordinate system was used regardless of the contact condition. In this study, the direction of the contact points was taken into consideration to calculate the Hall voltage and to estimate the angular velocity error due to a fixed cartesian coordinate system. The results show that the direction of the contact points considerably affects the angular velocity calculation.

Key Words: Rolling Bearing, Measurement, Accuracy, Sensor, Tribology, Hall Element, Oblique Coordinate, Tensor Analysis

1. 緒 言

玉軸受やころ軸受などの転がり軸受の転動体の運動は、幾何学的な計算より求める理論角速度が基本としてであるが、実際には回転数や潤滑状態、弾性変形などの複雑なトライボ環境の影響を受け、一般には必ずしもそれとは一致しないことが知られている⁽¹⁾。そのため転動体と軌道面との間の油膜厚さや滑りに伴う温度上昇などをEHL理論を使って計算するにも転動体の真の運動状態を知る必要がある。実験的に転動体の運動を測定した歴史は、二次元的運動であるころ軸受に対して用いられた、ころ端部に付けたマーキングを追跡する光学的方法に始まるが、玉の場合は三次元運動を行うためその計測は困難を伴う。著者の一人でもある平野は磁化させた玉の運動をサーチコイルにより検出する方法を考案し、各種玉軸受の玉の運動状態について数多くの研究⁽²⁾⁻⁽⁴⁾を行っており、山本による総説⁽⁵⁾もある。平野による方法は構造が簡単で装置に容易に組込むことのできる有利な方法であるが、出力

電圧に速度依存性があること、また玉の三次元的運動に対して二次元的情報しか得られないため、データより詳細な角速度成分の計算ができないなどの不十分な点もある。これらの点を解決するため川北はサーチコイルの代わりにホール素子を保持器と軸受ハウジングに装着して、磁化玉の運動を三次元的に検出する方法を考案し、ラジアル玉軸受の玉の運動を三次元的に解析している⁽⁶⁾。スラスト玉軸受に対しても同様な手法を用いた浦らによる報告⁽⁷⁾がある。著者らはホール素子による計測法をアンギュラ玉軸受の玉の運動を調べるのに適用しようとしたが、ハウジングを介してラジアル方向の磁束成分を検出するには、接触角がある場合、座標軸は玉と軌道面との接触点を基準にした方が透磁率から判断して合理的であると考えた。一般にラジアル玉軸受でもスラスト荷重やモーメント荷重で容易に接触点は移動し、スラスト玉軸受では遠心力の作用で接触角が必然的に生じる。そのような玉の運動を従来のような固定直交座標系で解析すればコントロール面の変化に伴う出力電圧の変化を、角速度の変化として解釈することになる。そのため、実際の接触状態を考慮した座標系による解析が必要となるが、あらかじめ接触状態を知ることは難しい。

本研究は玉の中心と内外輪の接触点が同一線上にあ

* 原稿受付 1996 年 9 月 27 日。

^{*1} 正員, 大分大学工学部(☎ 870-11 大分市旦野原 700)。^{*2} 学生員, 大分大学大学院。^{*3} 正員, 九州大学工学部(☎ 815 福岡市南区高宮 4-10-12)。

る基本的接触状態を考え、接触角の変化に伴うホール電圧の変化を斜交座標系を用いて計算し、そのホール電圧を従来のように固定した直交座標で解析した場合に生じる誤差について検討した。

2. 解析法

2.1 磁軸の任意方向の軸の回りの回転 ホール素子による測定では出力電圧はホール素子に対する磁軸ベクトルの方向余弦に比例する⁽⁶⁾ので、大きさを1に正規化したホール電圧は単位球面上の点についての方向余弦になる。磁軸ベクトルすなわち位置ベクトルは座標系には依存しないので、はじめに簡単な直交座標系を用いて任意方向の軸を中心に回転する位置ベクトル X の一般式⁽⁸⁾を求める。その成分はテンソル理論を用いれば容易に斜交座標系での共変成分や反変成分に変換できる。

図1のように座標をとり、角速度ベクトルを $\omega = n\omega$ 、同じ方向を向いた単位ベクトルを n 、位置ベクトル X の先端のベクトル軌跡を含む面と回転軸との交点を P 、 P から X までのベクトルを r とし、 t 時間で位置ベクトルが X_1 から X_2 に回転したとする。 ω が一定であれば位置ベクトル X の回転軸方向の成分 c は等しいので

$$c = n \cdot X_1 = n \cdot X_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。また、図1より X は cn と r との和となる。

$$X_1 = cn + r_1, X_2 = cn + r_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

r_1 と r_2 の大きさが等しいことに注意すると、回転ベクトル r_2 は次の式で与えられる。

$$r_2 = r_1 \cos \omega t + n \times r_1 \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(1)~(3)より r と c を消去すると t 時間後の位置ベクトル X_2 は、初期値 X_1 、回転軸の方向 n 、大きさ ω 、および時間 t の関数として

$$X_2 = X_1 \cos \omega t + (n \times X_1) \sin \omega t + (n \cdot X_1)(1 - \cos \omega t)n \quad \dots\dots\dots (4)$$

で求められる。

Fig. 1 Rotation of position vector

2.2 ホール電圧からの角速度の計算 ホール電圧から玉の自転角速度を計算する方法はこれまでにいくつか報告⁽⁶⁾⁽⁹⁾されているが、いずれもホール電圧を時間で微分することが必要である。ノイズが信号に重畳されている場合、微分でノイズが強調されるので精度を下げないためにも微分操作はないほうが望ましい。そのため本研究ではベクトル軌跡を含む平面 ϕ を最小二乗法で決定し、 $\text{grad } \phi$ と角速度ベクトル ω の方向が一致することを利用して、回転ベクトル r が描く面積速度の大きさより ω を求めた。

原点からの垂直距離が d 、面に対する法線方向の方向余弦が l, m, n である平面の方程式 ϕ は、位置ベクトル X の成分を x, y, z とすると

$$\phi: lx + my + nz - d = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

で表される。式(5)の形では未知数は一度に決定できないので、 d で両辺を除いた式について x, y, z の係数を求め、それらを正規化して l, m, n を決定する。それらを再び式(5)に代入すると d が求まる。 d と方向余弦の積による座標 (dl, dm, dn) は図1の点 P の座標となるので、位置ベクトル r が決定できる。サンプリングされた短い時間 t の間に r が r_i から r_{i+1} に次々と移動して n 個の点を経たとする。 n 個の r が描く扇形の面積 S は隣接した三角形の面積の和で近似すると、

$$S \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} |r_i \times r_{i+1}| \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。一方、平面 ϕ を決定するために使用した n 個の回転ベクトル r の平均的長さをもつ回転ベクトル $\bar{r}$ が、角速度 ω で回転しているとすれば、 t 時間内に描く面積 S' は

$$S' = \frac{\omega |\bar{r}|^2 t}{2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6)と(7)を等置すると ω は

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |r_i \times r_{i+1}|}{|\bar{r}|^2 t} \quad \dots\dots\dots (8)$$

で与えられ、その方向はすでに式(5)における係数 l, m, n として決定されている。

2.3 斜交座標系上でのホール電圧の計算 直交座標系 $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\} = \Sigma\{i, j, k\}$ と斜交座標系 $\Sigma\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ を図2に示すようにとる。 Σ での座標軸を $x^i (i=1, 2, 3)$ 、その基底ベクトルを e_i 、同様に Σ でのそれらを $\bar{x}^i$ と $\bar{e}_i$ とする。 e_i を単位ベクトルとし、 $\bar{e}_i$ の直交座標系 Σ での成分を $\bar{e}_i$ の x^i に対する方向余弦とすれば、 $\bar{e}_i$ も単位ベクトルになる。また、それぞれの座標系の基底ベクトルからなるベクトル V_e と $\bar{V}_e$ を、

Fig. 2 Coordinate system and base vector

Fig. 3 Arrangement of Hall elements

$$V_e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_e = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表して、 $\bar{x}^i$ 軸と x^j 軸の間の角度 θ_{ij} の余弦，すなわち $\cos \theta_{ij}$ を成分 a_{ij} とするマトリックス A を考えると，両者の関係は次の式で表される。

$$\bar{V}_e = A V_e \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで基底ベクトルの一次結合からなる一般的なベクトル V を考える。 V の成分は直交座標系では反変成分と共変成分は同じになるので両者の区別は必要ない⁽¹⁰⁾ が，一般座標系では両者の区別が必要になる。ホール素子による玉の運動検出法では，図3に示すようにホール素子が磁化玉の周囲に配置されているものと考えられるので，磁軸ベクトルの各座標軸に対する傾き角の余弦に比例したホール電圧を発生する。このことはそれぞれの基底に対するベクトル V の共変成分 V_i の定義⁽¹¹⁾

$$V_i = V \cdot e_i, \quad \bar{V}_i = V \cdot \bar{e}_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

と一致しているので，ホール電圧は一般座標系では磁軸ベクトルの共変成分に比例した電圧となることがわかる。テンソル理論⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ によると共変成分の座標変換に伴う変換式は，その名の由来のように基底ベクトルの変換式(10)と一致するので，例えば直交座標系で求めた回転ベクトルの軌跡を表す式(4)の成分を式(10)で変換すると斜交座標系での共変成分が求まる。

Table 1 Comparison of analyzing methods

	True value, rad/s	This paper, rad/s	Method I ⁽⁶⁾ , rad/s	Method II ⁽⁹⁾ , rad/s
ω_x	100	99.95	99.85	99.85
ω_y	50	49.98	49.93	49.93
ω_z	25	24.99	24.95	24.95

Numerical differentiation : Savitzky-Golay method (5 points)

Fig. 4 Variation of theoretical Hall voltage

逆に斜交座標系で求めたホール電圧 $\bar{V}$ は

$$V = A^{-1} \bar{V} \quad \dots\dots\dots (12)$$

で直交座標系に逆変換でき，それらを式(5)～(8)で解析すれば ω を求めることができる。しかしながら接触点の傾きが玉の回転とともに変化する場合， V とともに A の成分も変化するので式(12)の計算は事実上不可能になり，ホール電圧の変化の V による寄与分と， A による寄与分をそれぞれ独立して評価することは極めて難しくなる。

3. 計 算 例

具体的計算例を示すに当たり，テンソル記法で慣用的な数値指標で座標軸を識別すると紛らわしいので，以降はできるだけ x^1 に対して x (軸方向)， x^2 に対して y (公転方向)， x^3 に対して z (ラジアル方向)で示することにする。したがって接触点方向を軸にした斜交座標系では z の代わりに $\bar{z}$ として表示する。表1に図4に示した理想的なホール電圧に対する本研究による計算結果をこれまでに発表された各種計算法による結果とともに示す。本報による計算法は数値微分が不要なため最も精度の高いことがわかる。図4は式(3)で $|r|=0.7$ ，角速度成分が $\omega_x=100$ ， $\omega_y=50$ ， $\omega_z=25$ rad/s である ω を与え， 3° ピッチで計算したものであり， V_x ， V_y ， V_z はそれぞれ x ， y ， z 方向のホール電圧であることを示す。図5はわかりやすいよう三次元的に表したそのベクトル軌跡である。ここでの ω は単に計算結果を，比較するためのものであり，実際に起

Fig. 5 Locus of position vector

Fig. 6 Contact angle of Ball bearing

こりうる場合を想定したものではない。

次に本研究の目的である接触点の変化を考慮して座標軸($\bar{z}$ 軸)をとった場合の計算を行う。したがって、 $\bar{z}$ 軸以外の x 軸と y 軸に関しては斜交座標と直交座標は共通である。しかしながらいかなる方向にホール素子を配列させても一般式(10)により、理論的ホール電圧を計算するのは容易なことである。ここで、図6に示す接触角を α として共変成分を計算するのに用いたマトリックス A 、および逆マトリックス A^{-1} 、および基底ベクトル $\bar{e}_i$ 、基本テンソル $(\bar{g}_{ij})$ 、また逆基底ベクトル $\bar{e}^i$ と基本テンソルの反変成分 $(\bar{g}^{ij})$ をまとめて示す。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan \alpha & 0 & \sec \alpha \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = i \\ \bar{e}_2 = j \\ \bar{e}_3 = \sin \alpha i + \cos \alpha k \end{cases} \quad (\bar{g}_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

Fig. 7 Relation between covariant and contravariant component

$$\begin{cases} \bar{e}^1 = i - \tan \alpha k \\ \bar{e}^2 = j \\ \bar{e}^3 = \sec \alpha k \end{cases} \quad (\bar{g}^{ij}) = \begin{bmatrix} \sec^2 \alpha & 0 & -\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} & 0 & \sec^2 \alpha \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{共変成分: } \bar{V}_1 = x, \bar{V}_3 = x \sin \alpha + z \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{反変成分: } \bar{V}^1 = x - z \tan \alpha, \bar{V}^3 = z \sec \alpha \quad \dots\dots\dots (17)$$

図7は磁軸ベクトル X の x - z 平面上での基底ベクトル $\bar{e}_i$ による表現と、逆基底ベクトル $\bar{e}^i$ による表現を示しているが、共変成分の式(16)の $\bar{V}_3$ は、 $\bar{V}_3 = \overline{OA} + \overline{AC}$ 、反変成分の式(17)の $\bar{V}^1$ は $\bar{V}^1 = \overline{OE} - \overline{DE}$ 、 $\bar{V}^3$ は $\bar{V}^3 = \overline{OB}$ と解釈でき計算の正しいことがわかる。

少し現実的な例として、回転半径 $|r|=0.7$ 、角速度 $\omega \cong 100 \text{ rad/s}$ とし、接触角 α が条件式

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega_z}{\omega_x} \quad \dots\dots\dots (18)$$

を満足するよう ω_x と ω_z を選び、 ω_y も適当な小さな値として1を入れ、接触角 $\alpha=0 \sim 20^\circ$ の範囲を 5° ピッチで計算を行った。計算条件を表2にまとめて示す。

図8は玉と軌道面との接触点を考慮した斜交座標軸、すなわち $\bar{z}$ 方向のホール電圧の変化を示す。接触角 α の増大とともに $\bar{z}$ 方向の共変成分が+側にシフトして、振幅の小さくなることがわかる。したがって、接触角 α が零以外の条件下で測定されたホール電圧より角速度の計算を行えば、式(12)で逆変換をしな

Table 2 Condition of calculation

contact angle α , degree	ω_x , rad/s	ω_y , rad/s	ω_z , rad/s
0	100	1	0
5	99.62	1	8.716
10	98.48	1	17.36
15	96.59	1	25.88
20	93.97	1	34.20

Fig. 8 Change of covariant component $\bar{V}_3$ with contact angle

Fig. 9 Change of square sum of covariant component with contact angle

い限り、誤差を含んだ計算結果をもたらすことになる。

図9は接触角 α をパラメータとして共変成分の二乗和が時間とともに変化することを表している。直交座標系では、この値は方向余弦の和であるため時間とは無関係に1となるが、例えば接触角が一定の条件下であっても斜交座標系では共変成分の二乗和は時間とともに変化することがわかる。接触角 α の小さい場合は正弦波に近い変化をするが、 α の増加とともに上側の振幅の山が偏平化し、全体の振幅も大きくなる。 $\alpha=20^\circ$ では山の頂上に凹みを生じ、複雑な形を呈するようになる。実際の玉軸受では接触角もダイナミックに変化するものと考えられるので、ホール電圧の二乗和の波形はさらに複雑な形となることを示している。事実、実験値に対して認められる各ホール電圧の

(a)

(b)

(c)

Fig. 10 Calculated angular velocity neglecting change of contact angle

二乗和波形の1を中心にしたばらつきの原因が、実際のホール電圧が完全なサインカーブでないことのほかに、接触角の動的な変化によることも原因の一つであることがこの図から考えられる。

図10(a), (b), (c)はそれぞれ斜交座標系で測定された共変成分 $\bar{V}$ を式(12)で直交座標系に変換しないで、そのまま従来のように固定した直交座標系で解析したものである。角速度成分の正しい値は表2に示しているが、図10(c)ではその値を点線でも示している。玉は一定速度で回転しているにもかかわらず、いずれの角速度成分も見かけ上変化しているように見え、正解値からの偏差は接触角 α の増大とともに大きくなり、正しい値のまわりで複雑な変動を示している。しかしながら接触角が同じであれば角速度成分の

Table 3 Comparison of angular velocity ratio

Contact angle α , degree	ω_y/ω_x , %	ω_z/ω_x , %
0	1	0
5	1.01	8.85
10	1.05	18.47
15	1.12	29.88
20	1.23	44.64

波形も類似しているため、接触角が同じ条件内で最大角速度成分 ω_x を基準として角速度成分の比を計算すると、その比は時間とは無関係に表3に示すようにほとんど一定値を示し、接触角の増加とともに僅かに増加するものの正解値に近い比率となることがわかる。

4. 結 論

ホール素子による玉の運動の計測法において、ラジアル方向の磁束変化成分が玉の自転によるもののほか、ハウジングを介して測定するため、接触角による影響も考慮して斜交座標系を用いて計算した結果、以下のことが明らかとなった。

(1) ホール電圧は斜交座標系では磁軸ベクトルの共変成分に比例した電圧となる。

(2) 玉の自転角速度を計算するのに回転ベクトルの面積速度と、面内にベクトル軌跡を含む平面を最小二乗法で決定することで微分処理の不要な計算法を提案し、精度が十分であることを確認した。

(3) 接触角を考慮した磁軸ベクトルの反変成分の二乗和は1にはならず、接触角が一定の場合でも自転とともに変化する。

(4) 接触角を考慮した反変成分を、接触角によるホール電圧を変化を考慮しない従来の手法で角速度の計算を行うと、非常に大きな誤差を生じることが明ら

かとなった。その大きさは接触角の大きさとともに増大する。

(5) 接触角が一定の場合、(4)で述べた誤差を含む見かけ上の角速度成分の比は、真の値についての比に近い値となる。

5. 結 言

以上のように接触角の変化によるホール電圧の変化は、玉の自転角速度の計算に非常に大きな影響を与えることを示した。このことは接触角の変化が不安定な玉の運動を三次元的に精度よく決定することに大きな障害となるため、さらなる実験的および理論的な考察を必要とする。

文 献

- (1) 岡本純三・角田和雄, 転がり軸受, (1986), 171-174, 幸書房.
- (2) 平野富士夫, アンギュラ玉軸受の玉の運動について, 機論, **30**-211 (1964), 427-436.
- (3) 平野富士夫・川北和明, アンギュラ玉軸受の玉の運動に及ぼす潤滑条件の影響, 機論, **33**-253 (1967), 1524-1528.
- (4) 平野富士夫・川北和明・浦晟・権藤誠吾, スラスト玉軸受の運動学的研究, 機論, **37**-302 (1971), 2009-2015.
- (5) 山本精徳, ころがり軸受における転動体の運動, 潤滑, **13**-9 (1968), 463-475.
- (6) 川北和明・有吉省吾, 玉軸受における玉自転角速度の三次元ベクトル成分の解析, 潤滑, **31**-5 (1986), 343-348.
- (7) 浦晟・中嶋明・木須博行, 偏心スラスト玉軸受の玉の運動計測, 機論, **53**-490, C (1987), 1254-1258.
- (8) Spencer, A. J. M., *Continuum mechanics*, (1985), 63-66, Longman.
- (9) 宮川浩臣・今戸啓二・川北和明, 玉軸受の玉の運動に及ぼす軌道面損傷の影響, 機論, **52**-476, C (1986), 1375-1379.
- (10) 田代嘉宏, テンソル解析, (1985), 146-154, 裏華房.
- (11) 石原繁, テンソル・その応用, (1986), 98-102, 共立出版.