部分的に水に満たされた矩形タンクの地震による影響*

小 山 淳^{*1}, Leonard MEIROVITCH^{*2}

Effects of Earthquakes on Partially-Filled Rectangular Water Tanks

Jun KOYAMA and Leonard MEIROVITCH

This paper is concerned with the ability of tanks partially filled with water to withstand earthquakes. The interest lies in rectangular water tanks, which have received little attention to date. The analysis is relatively involved and includes the derivation of the equations of motion for the vibration of the whole tank by means of the substructure synthesis method, a stochastic analysis relating the random ground motion caused by earthquakes to the random vibration of the tank, a stochastic characterization of the fluid pressure and computation of the probability of failure of the tank.

Key Words: Liquid Sloshing, Elastic Rectangular Tank, Probability of Failure, Substructure Synthesis, Random Vibration

1. 緒 論

本論文では部分的に流体が満たされた矩形タンクの地震による影響を調べる。特にタンクの破壊確率を決定することが目的である。

流体容器の解析と設計のための古典的な方法に関する議論は多くの研究^{(1)~(4)}に見ることができる。流体・構造連成についての非常に多くの研究が過去20年間に行われ、柔軟な流体容器の解析と設計に対する新しい方法の発展が試みられている。しかし研究の多くが円筒状容器について成されている。

そこで本論文における解析は、矩形のタンクモデルを用いて、レイリー・リッツ法によるタンク全体の振動方程式の導出、地震によるタンク不規則振動の確率的解析および水圧の確率的特性からタンク各部の主応力の期待値を求めて、最大応力説によりタンクの破壊確率を決定する。その際、スロッシングによるタンクの変形、応力を対象とする。

2. 容器全体の運動方程式

2・1 レイリー・リッツ法による容器構造のモデル化 容器の構造をコンクリート製の基礎に固定された直方体状の箱と見なす。その基礎を剛と仮定し、図1のように容器を下端部が固定された4枚の縦板とモデル化する。そして、それらの端は互いに連結されており、どの両隣の板の水平面内角も常に90°を保つとする。板の上端部は鋼鉄製のはりで補強されている。容器の天井は剛性を受けもたないと仮定する。これは控えめな仮定である。なぜなら、鋼鉄はりで弾性的に支持しているとはいえ、上端部が固定ないしは単純支

Fig. 1 Tank model

* 原稿受付 1996年9月10日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} バージニア工科大学工学部 (Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, VA 24061)。

持されている箱は開いている場合よりも剛性が大きいからである。また、おのおのの板は一つまたは二つのリブによって補強されている。

図1に示される容器構造のモデル化をレイリー・リッツ法⁽⁵⁾によって行う。そして、時間 t 、点 ξ_i, ζ_i における板 $i (i=1, 2, 3, 4)$ の面外変形 w_i は式(1)のように表現できるとする。

$$w_i(\xi_i, \zeta_i, t) = \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} \phi_{rs}(\xi_i, \zeta_i) q_{rs}(t),$$

$$i=1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\phi_{rs}(\xi_i, \zeta_i)$ は許容関数⁽⁶⁾、 $q_{rs}(t)$ は一般座標である。幾何学的、力学的、すべての境界条件を満足するように、許容関数の線形結合である擬比較関数⁽⁵⁾を選ぶと、より正確な結果が得られる。擬比較関数を二つの許容関数の積として次のように示す。

$$\phi_{rs}(\xi_i, \zeta_i) = \phi_r(\xi_i) \phi_s(\zeta_i), \quad i=1, 2, 3, 4$$

$$\dots \dots \dots (2)$$

基礎に対して鉛直方向の擬比較関数、すなわち $\phi_s(\zeta_i)$ に固定-固定および固定-自由はりの許容関数の線形結合を選ぶ。そして水平方向に関しては次のように求める。

まず、4枚のタンクの板はお互い独立に動かないので、水平方向の許容関数は変形によって決めねばならない。板が面内変形しないと仮定することから、タンクにおける四つの角では変位しないとする。しかし角変位はするものとする。タンク水平面の矩形枠を考慮することでこの解析は簡単にする。したがって、許容関数 $\phi_r(\xi_i)$ としてこの矩形枠の振動モードを選ぶ。質量と剛性の分布 m と EI はすべての板で同じと仮定すると、タンクは対称となり振動モードは対称、非対称の2クラスに分けられる。振動モードを得るため固有値問題

$$\frac{d^4 \phi(\xi_i)}{d\xi_i^4} = \lambda \phi(\xi_i), \quad \lambda = \frac{\omega^2 m}{EI}, \quad i=1, 2, 3, 4$$

$$\dots \dots \dots (3)$$

を解く。ここで ϕ はすべての角において次の境界条件を満たし

$$\phi(\xi_i) = 0, \quad \frac{d\phi(\xi_i)}{d\xi_i} = \frac{d\phi(\xi_{i+1})}{d\xi_{i+1}} \dots \dots \dots (4)$$

となる。そしてもちろん $\xi_5 = \xi_1$ が成立する。固有値問題を数値的に解き、その固有関数を図2、3に示す。

2.2 容器全体の運動方程式 地面運動によって容器は剛体変位すると仮定する。すると、容器のある点での速度ベクトルは

$$V_i = V_{ci} + \dot{s}_i, \quad i=1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots (5)$$

となる。ここで V_{ci} は容器の剛体速度、 $\dot{s}_i$ はタンクの面外速度を表す。また図1に示すように、右手系正

規直交座標系である参照座標系 $\{i\}$ を選ぶと

$$\dot{s}_1 = \dot{w}_1 \dot{i}_2 \quad \dot{s}_2 = -\dot{w}_2 \dot{i}_1 \quad \dot{s}_3 = -\dot{w}_3 \dot{i}_2 \quad \dot{s}_4 = \dot{w}_4 \dot{i}_1$$

$$\dots \dots \dots (6)$$

という関係を得る。

容器の運動方程式を求めるために次の拡張ハミルトンの原理を用いる。

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0, \quad i=1, 2, 3, 4 \dots (7)$$

ここで T は運動エネルギー、 V は位置エネルギー、そして δW は仮想仕事である。運動エネルギーは次のように表現できる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{a_i} \int_0^{b_i} \rho_i V_i \cdot V_i d\xi_i d\zeta_i \dots \dots \dots (8)$$

ただし図1より明らかなように、 $b_i = b$ である。位置エネルギーは

$$V = \frac{1}{2} D \sum_{i=1}^4 \int_0^{a_i} \int_0^{b_i} \left\{ (\nabla^2 w_i^2) \right. \\ + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i \partial \zeta_i} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \zeta_i^2} \right] \Big\} d\xi_i d\zeta_i \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{a_i} \left\{ k_{ib} w_i^2(\xi_i, b_i, t) \right. \\ + k_{it} \left[\frac{\partial w_i(\xi_i, b_i, t)}{\partial \xi_i} \right]^2 \Big\} d\xi_i d\zeta_i \\ + \frac{1}{2} \int_0^{b_1} E_r I_r \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} \right)^2 \right\}_{x=a_1/3} \\ + \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} \right)^2 \Big|_{x=2a_1/3} \Big\} dz_1 \\ + \frac{1}{2} \int_0^{b_2} E_r I_r \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} \right)^2 \right\}_{x=a_2/2} dz_2$$

ϕ_1

ϕ_2

ϕ_4

ϕ_3

ϕ_5

ϕ_6

Fig. 2 Symmetric frame modes

Fig. 3 Antisymmetric frame modes

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{b_3} E_r I_r \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial z_3^2} \right)^2 \right\}_{x=a_3/3} \\
& + \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial z_3^2} \right)^2 \Big|_{x=2a_3/3} \Big\} dz_3 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{b_4} E_r I_r \left(\frac{\partial^2 w_4}{\partial z_4^2} \right)^2 \Big|_{x=a_2/2} dz_4 \quad \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

ここで

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

であり、 E は弾性定数、 d は壁の厚さ、 E_r はリブの弾性定数、 I_r はリブの慣性モーメント、 ν はポアソン比、 ∇^2 はラプラス作用素、 k_{ib} は壁の上端部にある鉄鋼はりによって補強された曲げの分布ばね定数、 k_{it} は同じはりのねじり分布ばね定数を示す。仮想仕事は容器の流体圧力による分布力 $p_i(\xi_i, \zeta_i, t)$ によるもので、次のように書ける。

$$\delta W = \sum_{i=1}^4 \int_0^{a_i} \int_0^{b_i} p_i \delta w_i d\xi_i d\zeta_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

これらより、空間変数の離散化を次のように行う⁽⁶⁾。

$$w(\xi, \zeta, t) = \phi^T(\zeta, \xi) q(t) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで $w = \sum_{i=1}^4 w_i$ 、 q は一般化座標ベクトル、 ϕ は板の擬比較関数である。最終的に運動方程式

$$M\ddot{q} + Kq = Q \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得る。ここで、 M は慣性行列、 K は剛性行列、 Q は容器内圧力および支持台の剛体運動による一般化力ベクトルである。 M 、 K 、 Q の具体的な表示は付録に示す。

3. 水圧の確率的特性

大きさが a_1, a_2, b の剛な矩形容器において、自由表面波高のモード形状 $\delta_{mn}(x, y)$ と固有スロッシング振動数 Λ_{mn} は次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$\delta_{mn}(x, y) = A_{mn} \cos \frac{n\pi}{2a_1}(2x+a_1) \cos \frac{n\pi}{2a_2}(2y+a_2) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\Lambda_{mn} = gk \tanh kh \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで g は重力定数、 h は流体の高さを表す。また定数 k は次のように定義される。

$$k^2 = \frac{\pi^2}{a_1^2 a_2^2} (m^2 a_1^2 + n^2 a_2^2) \quad \dots\dots\dots (16)$$

微小変位という仮定の下で、粘性のない流体の速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z, t)$ は波動方程式を満足する⁽⁷⁾。速度場 v は速度ポテンシャルのこう配を取ることによって導くことができる。すなわち、

$$v = \nabla \Phi \quad \dots\dots\dots (17)$$

比較的低周波の励振のときは、流体は非圧縮と仮定できる。その結果、速度ポテンシャルの支配方程式は次

のラプラス方程式に簡単化される。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

そして、流体圧力 $p(x, y, z, t)$ の支配方程式は線形ベルヌーイ方程式となる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p + gz = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで ρ は流体の質量密度である。

速度ポテンシャルと流体圧力は式(18)と式(19)で示される自由表面、式(20)で表現される流体速度の垂直方向の境界条件より求まる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\
& \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p_0 + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \dot{w}_n \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 η は自由表面の波高関数、 p_0 は自由表面圧力、 n は垂直方向を意味する。そして、壁の流体圧力分布は静的流体圧力と動的流体圧力に分けられ、次のように表現できる。

$$p(z, t) = -\rho g z + f(z, t) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 ρg は流体の単位重量、 $f(z, t)$ は動的流体圧力、そして、 z は自由表面から測定した流体の深さである。

定常ランダム過程において、動的圧力の相互相関関数、式(23)、相互スペクトル密度関数、式(24)が得られる⁽⁸⁾。

$$R_f(z, \bar{z}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(z, t) f(\bar{z}, t + \tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$S_f(z, \bar{z}, \omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} R_f(z, \bar{z}, \tau) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad \dots\dots\dots (24)$$

ξ 軸に平行な向きに定常ランダム励振されるとき、壁に働く動的流体圧力パワースペクトル密度は式(12)の Q と式(22)～(24)を用いて次のように与えられる。

$$S_{fx} = \left[\frac{a_1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{xn} \phi_{xm} H_{xn} H_{xm} \right] S_{\ddot{x}_c} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで ϕ_{xn} と H_{xn} はそれぞれ流体圧力の n 番めの正規モード形状と n 番めの正規モードの基礎励振加速度に対する周波数応答であり、 $S_{\ddot{x}_c}$ は x 軸方向の基礎の加速度のパワースペクトル密度を示す。そして、関数 ϕ_{xn} と H_{xn} は以下のように導かれる。

$$\phi_{xn}(z) = -\frac{4a_1}{\pi^2(2n+1)^2} \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{a_1} \left(z + \frac{h}{2} \right)}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{a_2} h} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$H_n(\omega) = \frac{\omega^2}{\Lambda_n^2 - \omega^2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで a_1 と h はそれぞれ容器の x 軸に沿った大きさと、流体の深さであり、 Λ_n は n 番めの固有スロッピング振動数である。

z と ξ_i ($i=1, 2, 3, 4$) の座標変換式は

$$z = h - \frac{b}{2} - \xi_i \quad \dots\dots\dots (28)$$

である。

4. ランダム励振による容器の応答

最終的な目標はタンクの破壊確率を求めることである。そのため主応力間の主応力平均二乗値 $R_\sigma(\xi, \zeta, 0)$ を導く。なぜなら、 $R_\sigma(\xi, \zeta, 0)$ の平方根は主応力関数 $\sigma(\xi, \zeta, t)$ の確率密度関数に付随した標準偏差のためである。まず、以下に示す計算のフローチャートを図4に示す。

一般に式(12)で表される運動方程式の応答確率過程 w_i に関する実応答二乗平均値は、次のように与えられる⁽⁹⁾。

$$R_{w_i}(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n u_i^{(r)} u_i^{(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_r(\omega) H_s(\omega) S_{f_r f_s}(\omega) d\omega \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで u はモーダルベクトル、 $H_s(\omega)$ はモーダル周波数応答、 $\bar{H}_s(\omega)$ は $H_s(\omega)$ の複素共役、 $S_{f_r f_s}(\omega)$ はモーダル励振相互スペクトル密度関数である。ここで式(30)を見ると応力 $\sigma(\xi, \zeta, t)$ が w_i の関数であるので、主応力の二乗平均値も式(29)と同じ形になると容易に予想できる。

$$\sigma(\xi, \zeta, t) = \frac{3D}{d^2} \left[(1+\nu) \frac{\partial^2 w(\xi, \zeta, t)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w(\xi, \zeta, t)}{\partial \zeta^2} + (1-\nu) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w(\xi, \zeta, t)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w(\xi, \zeta, t)}{\partial \zeta^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \zeta, t)}{\partial \xi \partial \zeta} \right)^2} \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

このことより主応力平均二乗値は式(29)と同じ形をとる。

次に、モーダルベクトル(31)を定義する。

$$q(t) = \sum_{j=1}^n \eta_j(t) u_j \quad \dots\dots\dots (31)$$

そうすると、式(12)より実際の変位(実変位)とモーダル変位の関係は

$$w(\xi, \zeta, t) = \phi^T(\xi, \zeta) q(t) = \phi^T(\xi, \zeta) \sum_{j=1}^n \eta_j(t) u_j = \sum_{j=1}^n W_j(\xi, \zeta) \eta_j(t) \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで $W_j = \phi^T(\xi, \zeta) u_j$ は容器全体の固有関数と確認できる。そして式(13)と(29)より次のモーダル方程式

$$\ddot{\eta}_j(t) + \omega_j^2 \eta_j(t) = F_j(t), \quad j=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (33)$$

を得る。ここで n は容器の離散化モデルの自由度、 $F_j(t)$ はモーダル力である。

次に主応力間の相互相関関数⁽⁸⁾を定義する。

$$R_{\sigma\sigma}(\xi, \zeta, \xi', \zeta', \tau) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Sigma_j(\xi, \zeta) \Sigma_k(\xi', \zeta') R_{\eta_j \eta_k}(\tau) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで

$$\Sigma(\xi, \zeta) = \frac{3D}{d^2} \left\{ (1+\nu) \frac{\partial^2 W(\xi, \zeta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W(\xi, \zeta)}{\partial \zeta^2} + (1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 W(\xi, \zeta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W(\xi, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \zeta)}{\partial \xi \partial \zeta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

式(34)の結果よりモーダル座標の相互相関関数を求める必要がある。そのため、モーダルインパルス応答を $g_j(t)$ 、モーダル周波数応答を $G_j(\omega)$ と定義すると式(33)より

$$G_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (36)$$

この周波数応答はインパルス応答のフーリエ変換であ

Fig. 4 Calculation flow chart

る。また、モーダル応答はインパルス応答と畳み込み積分で関係付けられる。

$$\eta_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\sigma_j) F_j(t - \sigma_j) d\sigma_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (37)$$

ここで σ_j はダミー変数である。式(37)よりモーダル座標の相互相関関数を求めると、結論として次が得られる。

$$R_{\eta_j \eta_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_j(\omega) G_k(\omega) S_{F_j F_k}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (38)$$

ここで $\bar{G}_j(\omega)$ は $G_j(\omega)$ の複素共役である。

式(33)のモーダル力間の相互スペクトル密度関数を求める。まず、モーダル力相互相関関数を求めると

$$R_{F_j F_k}(\tau) = \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b W_j(\xi, \zeta) W_k(\hat{\xi}, \hat{\zeta}) \times R_{f\bar{f}}(\xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}, \tau) d\hat{\xi} d\hat{\zeta} d\xi d\zeta \quad (39)$$

ただし、 $R_{f\bar{f}}(\xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}, \tau)$ は分布力 $f(\xi, \zeta, t)$ と $f(\hat{\xi}, \hat{\zeta}, t)$ の間の分布相互相関関数を示す。相互スペクトル密度関数は $R_{F_j F_k}(\tau)$ のフーリエ変換として定義される。すなわち、式(39)を用いて

$$S_{F_j F_k}(\omega) = \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b W_j(\xi, \zeta) W_k(\hat{\xi}, \hat{\zeta}) \cdot S_{f\bar{f}}(\xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}, \omega) d\hat{\xi} d\hat{\zeta} d\xi d\zeta \quad (40)$$

Table 1 Slosh frequencies

$h=1m$		$h=1.8m$	
i	Λ_i	i	Λ_i
1	0.4506514	1	0.4984029
2	0.8817474	2	0.8833848
3	1.1404257	3	1.1404581
4	1.3494081	4	1.3494091
5	1.5300856	5	1.5300856
6	1.6915731	6	1.6915731
7	1.8389339	7	1.8389339
8	1.9753323	8	1.9753323
9	2.1029015	9	2.1029015
10	2.2231627	10	2.2231627
11	2.3372450	11	2.3372450
12	2.4460115	12	2.4460115
13	2.5501404	13	2.5501404
14	2.6501856	14	2.6501856
15	2.7465878	15	2.7465878
16	2.8397188	16	2.8397188

Table 2 Natural frequencies for the entire tank

i	ω_i	i	ω_i
1	11.221702	4	19.126770
2	12.098619	5	29.656633
3	18.459779	6	30.239724

ここで $S_{F_j F_k}(\omega)$ はモーダル励起相互スペクトル密度関数、 $S_{f\bar{f}}(\xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}, \omega)$ は実励起相互スペクトル密度関数を表す。式(38)を式(34)に代入すると、 ξ, ζ と $\hat{\xi}, \hat{\zeta}$ の主応力間の相互相関関数を得る。

$$R_{\sigma\sigma}(\xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Sigma_j(\xi, \zeta) \Sigma_k(\hat{\xi}, \hat{\zeta}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_j(\omega) G_k(\omega) S_{F_j F_k}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (41)$$

ここで、 $S_{F_j F_k}(\omega)$ は $S_{f\bar{f}}(\xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}, \omega)$ と式(40)で関係している。 $\xi=\hat{\xi}, \zeta=\hat{\zeta}$ とすると、主応力相互相関関数は主応力自己相関関数となる。最後に $\tau=0$ とすると主応力平均二乗値

$$R_{\sigma}(\xi, \zeta, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Sigma_j(\xi, \zeta) \Sigma_k(\xi, \zeta) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_j(\omega) G_k(\omega) S_{F_j F_k}(\omega) d\omega \quad (42)$$

を得る。

Table 3 Probability of failure at certain points of the tank

number	failure (%)	number	failure (%)
1	0.0	18	0.0
2	0.0	19	0.0167997
3	0.0	20	0.0
4	0.0	21	0.0
5	0.0	22	0.0
6	0.0	23	0.0
7	0.0	24	0.0
8	0.0	25	0.0
9	0.0	26	0.0
10	0.0	27	0.0002930
11	0.0	28	0.0
12	0.0	29	0.0
13	0.0	30	0.0
14	0.0	31	0.0
15	0.0	32	0.0022614
16	0.0000033	33	0.0
17	0.0019544

Fig. 5 Points for which the probability of failure is predicted

5. 数値計算結果

タンクは次のような等方的な材料特性をもつとする。ヤング率 $E=12\,250\text{ kg/mm}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3$, 比重 $\rho g=1\,820\text{ kg/m}^2$ 。

図1のタンクのスロッシング振動数を, 最低次から16次まで, 2種類の水位 h について表1に掲げる。タンクの大きさは $a_1=3\text{ m}$, $a_2=2\text{ m}$, $b=2\text{ m}$ で, x 軸に平行な方向に振動が励起される。2種類の水位 $h=1\text{ m}$, $h=1.8\text{ m}$ のスロッシング振動数は, 最低次振動数を除きほとんど等しい。表2にタンク全体の固有振動数を最低次から6次までの値を示す。表1と表2を比較すればわかるように, タンクのスロッシング振動数とタンクの固有振動数はよく分離されている。このことは流体・構造連成振動の影響は小さいことを示す。そのため, タンクに働く流体スロッシング力はタンクを剛体とみなして求めた値を使っても影響は小さい。もちろん, その力は弾性容器に働く。

支持台の加速度を与えたとき, タンクの任意の点 x , y における主応力の二乗平均値は式(42)で計算できる。 $R_\sigma(\xi, \zeta)$ の平方根は, 応力の大きさ $\sigma(\xi, \zeta)$ の確率密度関数に関係した標準偏差に等しい。一度, この主応力確率密度関数が導かれれば, 最大応力理論⁽¹⁰⁾を用いて, ガウス確率密度関数における許容応力よりも右側の面積を計算することにより, 破壊確率を計算できる。

シミュレーションに関して, 日本大阪で1963年3月27日に起きた Richter スケールで6.9の典型的パワースペクトル密度をもつ地震データを用いた。材料の引張応力は 31.164 kg/mm^2 である。タンクの大きさ $a_1=3\text{ m}$, $a_2=2\text{ m}$, $b=2\text{ m}$ で水位 $h=2\text{ m}$ の場合の各場所(図5)における破壊確率を表3に示す。これより, タンクの最も弱い部分は図5に示す底面の点17, 19, 32であることがわかった。最大破壊確率は点19の0.017%であるので, このタンクは比較的強いと考えられる。もしこの確率を高すぎると見なすならば, タンクの上部と同様に, その底面に鋼鉄リングを取付けて補強すればよい。また, リブで補強された場所は十分強いこともわかった。

6. 結 論

本稿は, 部分的に流体が満たされた矩形タンクの地震によるランダム励起振動応答を決定し, そのタンクの破壊確率を計算した。

本論文でなされたことを次に示す。

(1) タンクの非常に少ない自由度をもつ構造モデ

ルの構築。このようなモデルをレイリー・リッツ法によって導き, 重要な振動モードを計算した。

(2) 重要なスロッシングモードの計算。

(3) 地震によって引き起こされる流体スロッシング圧力下の振動するタンクの運動方程式の構築。

(4) タンク応答の決定とそのタンクの与えられた点における破壊確率の計算。ただし, 主応力はガウス確率密度関数で記述されると仮定する。

本稿では矩形タンクを対象として計算を行っているが, 円筒タンクについても拡張は容易である。また, 地震による運動を水平方向に限定したが, 垂直方向の運動やねじりを考えることでより現実的な結果が得られると予想される。そしてそのとき, タンク上部の強度が問題となることが予想される。これら諸問題については続報において議論を行う。

本稿をまとめるにあたり, 投稿することを勧め協力していただいた東京工業大学の狼嘉彰氏, そして助力していただいた東京工業大学の松永三郎氏に感謝する。

付 録

式(14)中の M, K, Q は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^4 \int_0^{b_i} \int_0^{a_i} \rho \phi^{(i)} \phi^{(i)T} d\xi_i d\zeta_i \\ K &= \sum_{i=1}^4 D \int_0^{a_i} \int_0^b \left[\nabla^2 \phi^{(i)} \nabla^2 \phi^{(i)T} \right. \\ &\quad + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial \xi_i \partial \zeta_i} \frac{\partial^2 \phi^{(i)T}}{\partial \xi_i \partial \zeta_i} - \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial \xi_i^2} \frac{\partial^2 \phi^{(i)T}}{\partial \zeta_i^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial \zeta_i^2} \frac{\partial^2 \phi^{(i)T}}{\partial \xi_i^2} \right) \right] d\xi_i d\zeta_i \\ &\quad + \int_0^{a_i} \left[k_{ib} \phi^{(i)}(\xi_i, b_i, t) \phi^{(i)T}(\xi_i, b_i, t) \right. \\ &\quad \left. + k_{it} \frac{\partial \phi^{(i)}(\xi_i, b_i, t)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \phi^{(i)T}(\xi_i, b_i, t)}{\partial \xi_i} \right] d\xi_i \\ &\quad + E_r I_r \left[\int_0^{b_1} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \phi^{(1)T}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\xi=a_1/3} \right. \\ &\quad + \int_0^{b_1} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \phi^{(1)T}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\xi=2a_1/3} \\ &\quad + \int_0^{b_2} \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \phi^{(2)T}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\xi=a_2/2} \\ &\quad + \int_0^{b_3} \frac{\partial^2 \phi^{(3)}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \phi^{(3)T}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\xi=a_3/3} \\ &\quad + \int_0^{b_3} \frac{\partial^2 \phi^{(3)}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \phi^{(3)T}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\xi=2a_3/3} \\ &\quad \left. + \int_0^{b_4} \frac{\partial^2 \phi^{(4)}}{\partial \zeta^2} \frac{\partial^2 \phi^{(4)T}}{\partial \zeta^2} \Big|_{\xi=a_4/2} \right] \end{aligned}$$

$$Q = P - \dot{S}$$

ここで

$$P = - \sum_{i=1}^4 \int_0^{b_i} \int_0^{a_i} p_i \phi^{(i)} d\xi_i d\zeta_i$$

$$\begin{aligned}
S = & \dot{Y}_c \left(\int_0^{a_1} \int_0^b \rho \phi^{(1)} d\xi_1 d\zeta_1 \right. \\
& - \int_0^{a_3} \int_0^b \rho \phi^{(3)} d\xi_3 d\zeta_3 \Big) \\
& - \dot{X}_c \left(\int_0^{a_2} \int_0^b \rho \phi^{(2)} d\xi_2 d\zeta_2 \right. \\
& \left. - \int_0^{a_4} \int_0^b \rho \phi^{(4)} d\xi_4 d\zeta_4 \right)
\end{aligned}$$

文 献

- (1) Housner, G. W., *Bulletin of the Seismological Society of American*, **47**-1 (1957), 15-36.
- (2) Abramson, H. N., *National Aeronautics and Space Administration*, NASA SP-106 (1966).
- (3) Bauer, H. F., Hsu, T. M. and Wang, J. T. S., *J. Basic Engineering*, ASME, **90** (1968), 373-377.
- (4) 高原引樹・木村康治・伊東 健・坂田 勝, 機論, **59**-561, C(1993), 48-55.
- (5) Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, (1996), 522-542, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- (6) Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, (1980), 242-252, Sijthoff and Noordhoff.
- (7) Lamb, H., *Hydrodynamics*, (1945), 282-284, Dover Publication.
- (8) Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, (1975), 456, McGraw-Hill.
- (9) Newland, D. E., *An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis*, (1975), 58-59, Longman.
- (10) Ugural, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, (1981), 24, McGraw-Hill.