回転する積層複合厚肉円筒殻の振動解析*

胡 継 群^{*1}, 鈴木勝義^{*2}, 鹿内元治^{*2}Vibration Analysis of Rotating Thick Laminated Composite
Circular Cylindrical Shell

Jiqun HU, Katsuyoshi SUZUKI and Genji SHIKANAI

An exact solution procedure is presented for solving free vibrations of a rotating thick laminated composite circular cylindrical shell. Based on the thick lamination shell theory, equations of motion and boundary conditions are obtained from the stationary conditions of the Lagrangian. The equations of motion are solved exactly using a power series expansion for symmetrically laminated cross-ply shells. Frequencies and mode shapes of the shells with both ends clamped and both ends freely supported are presented, showing their variations with changes of rotating angular velocity, number of laminae and other parameters, and the effects of shear deformation and rotary inertia are discussed by comparing the results from the present theory with those from the classical lamination shell theory (thin lamination shell theory).

Key Words: Free Vibration, Eigenvalue Analysis, Rotating Circular Cylindrical Shell, Composite Shells, Exact Solution, Thick Lamination Shell Theory, Frequency, Mode Shapes

1. 緒 言

回転する積層複合円筒殻の振動解析は高速遠心分離機や航空宇宙機器等の設計上重要であり, これまでもすでにいくつかの研究報告がなされている^{(1)~(4)}. しかし, いずれも古典理論(薄肉殻理論)を用いており, セン断変形と回転慣性の影響を無視して解析している. しかし, 殻厚が大きい場合, セン断変形と回転慣性の影響が大きく, 古典理論を適用することは問題である. 最近井川ら⁽⁵⁾は, 回転する厚肉異方性円筒殻の振動を修正ガラキン法を用いて解析している. しかし, 厳密な解法はまだ確立されておらず, 振動特性も十分解明されていない状況にある.

そこで, 本報告では回転する積層複合厚肉円筒殻の自由振動の厳密な解法について考える. 解析では積層厚肉殻理論に基づき, 回転によって生じる初期張力の影響を考慮した基礎方程式(運動方程式と境界条件式)をラグランジュアンの停留条件から求める. 運動方程式はクロスプライ対称積層構造殻の場合について, 級数解を用いて解析する. 数値計算では両端固定および両

端自由支持円筒殻の中央に関して対称な振動と反対称振動の振動数曲線, 振動モードを求め, 積層数, 回転数, ラミナ数, 配向角等の種々のパラメータがそれらに及ぼす影響を明らかにする. また本報の結果と薄肉理論を用いた著者らの前報⁽⁴⁾の計算結果とを比較し, セン断変形および回転慣性の固有振動数に及ぼす影響を明らかにする.

2. 解 析

2.1 運動方程式と境界条件式 角速度 Ω で回転している積層複合厚肉円筒殻の振動を考える. l, h, a を円筒殻の長さ, 殻厚および平均半径とする. 円筒殻の中央面上に x, ϕ, z 座標を図1のようにとる. また N 個のラミナは中央面に対して対称とし, z 軸の原点は横断面の中央面上にとる(図2参照). なお, h_k および h_{k-1} は中央面($z=0$)から k 番めのラミナの上面および下面までの距離を示す. 円筒殻の任意点の x, ϕ, z 方向変位 $U(x, \phi, z, t), V(x, \phi, z, t), W(x, \phi, z, t)$ を次のように仮定する.

$$U = u + \frac{z}{a} u_0$$

$$V = v + \frac{z}{a} v_0$$

* 原稿受付 1996年12月2日.

*¹ 准員, 山形大学大学院(〒992 米沢市城南4-3-16).*² 正員, 山形大学工学部.

Fig. 1 Coordinate system

$$W=w \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに u, v, w, u_0, v_0 は x, ϕ および t (時間) の関数である。任意点での垂直ひずみおよびせん断ひずみは Novozhilov⁽⁶⁾ より

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{a+z} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2(a+z)^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \phi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right)^2 + \left(V - \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{\phi z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{a+z} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} - V \right) + \frac{1}{a+z} \left[\frac{\partial U}{\partial \phi} \frac{\partial U}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial V}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right) + \frac{\partial W}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} - V \right) \right] \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \varepsilon_{x\phi} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{a+z} \left[\frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + W \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} - V \right) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

各ラミナは直交異方性複合材料よりなるものとし、また $\varepsilon_{zz}=0$ を考慮すると k 番めのラミナにおける応力とひずみの関係式は次のように表される⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\phi\phi} \\ \sigma_{\phi z} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{x\phi} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\phi\phi} \\ \varepsilon_{\phi z} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{x\phi} \end{bmatrix}_k \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに $\bar{Q}_{ij}$ は繊維やマトリックスの弾性特性、繊維の体積含有率などによって決定される弾性係数である(付録参照)。

はじめに、定常回転時の運動方程式を考える。定常回転時の諸量には*印を付す。また軸対称微小変形を仮定し、式(2)のひずみについては線形項のみを考え

Fig. 2 Cross-sectional view of shell

る。 k 番めのラミナのひずみエネルギー式は

$$E_{\bar{v}k}^* = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_{xx}^* \varepsilon_{xx}^* + \sigma_{\phi\phi}^* \varepsilon_{\phi\phi}^* + \sigma_{zx}^* \varepsilon_{zx}^*) (a+z) dx d\phi dz \quad \dots\dots\dots (4)$$

シェル全体のひずみエネルギーは

$$E_{\bar{v}}^* = \sum_{k=1}^N E_{\bar{v}k}^* \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 N はラミナの総数である。

k 番めのラミナの運動エネルギー式は

$$E_{\bar{T}k}^* = \frac{1}{2} \rho_k \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (a+z+w^*)^2 \Omega^2 \times (a+z) dx d\phi dz \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 ρ_k は k 番めのラミナの密度である。

シェル全体の運動エネルギーは

$$E_{\bar{T}}^* = \sum_{k=1}^N E_{\bar{T}k}^* \quad \dots\dots\dots (7)$$

シェル全体のラグランジュアンは

$$L^* = E_{\bar{T}}^* - E_{\bar{v}}^* \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、円筒殻の中央面の x 方向および z 方向変位を u^*, w^* とし、無次元座標 $\xi = x/a$ 、無次元変位 $U^* = u^*/a$, $W^* = w^*/a$, $U_0^* = u_0^*/a$ を導入する。ラグランジュアンの停留条件 $\delta L^* = 0$ を求めると、定常回転時の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (N_{\xi}^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (M_{\xi}^*) - N_{z\xi}^* &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (N_{z\xi}^*) - N_{\phi}^* &+ \Gamma_0 \Omega^2 (\beta^2 \bar{H}_1 + \bar{H}_3 + \beta^2 \bar{H}_1 W^*) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$\xi = \pm l/2a = \pm \mu$ における境界条件式は

$$N_{\xi}^* \delta U^* = M_{\xi}^* \delta U_0^* = N_{z\xi}^* \delta W^* = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} N_{\xi}^* &= \beta^2 \bar{A}_{11} \frac{dU^*}{d\xi} + \bar{D}_{11} \frac{dU_0^*}{d\xi} + \beta^2 \bar{A}_{12} W^* \\ N_{\phi}^* &= \beta^2 \bar{A}_{12} \frac{dU^*}{d\xi} + (\beta^2 \bar{A}_{22} + \bar{D}_{22}) W^* \\ N_{z\xi}^* &= \beta^2 \bar{A}_{55} U_0^* + \beta^2 \bar{A}_{55} \frac{dW^*}{d\xi} \\ M_{\xi}^* &= \bar{D}_{11} \frac{dU^*}{d\xi} + \bar{D}_{11} \frac{dU_0^*}{d\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ij} &= \sum_{k=1}^N \frac{\bar{Q}_{ij}}{E_0} \frac{(h_k - h_{k-1})}{h} \\ \bar{D}_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \frac{\bar{Q}_{ij}}{E_0} \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{h^3} \\ \bar{H}_1 &= \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k}{\rho_0} \frac{(h_k - h_{k-1})}{h} \\ \bar{H}_3 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k}{\rho_0} \frac{(h_k^3 - h_{k-1}^3)}{h^3} \\ \Gamma_0 &= \frac{\rho_0 a^2}{E_0}, E_0 = \frac{E_{11}}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \beta = \frac{a}{h}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (11)$$

また, E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} は材料の主軸方向の縦弾性係数およびポアソン比, ρ_0 , E_0 は代表密度, 代表弾性定数である。

次に, 円筒殻に定常的な初期張力および初期せん断力が生じている状態で, 円筒が微小振動する場合の基礎方程式について考える。変位成分は定常回転時による変形量(*印)と振動時により変形量(~印)の和とし

て次の式で表す。

$$\begin{aligned}(u, v, w, u_0, v_0) \\ = (u^* + \tilde{u}, \tilde{v}, w^* + \tilde{w}, u_0^* + \tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \\ \dots\dots\dots (12)\end{aligned}$$

式(12)を式(1), (2)に代入し, ひずみを2次の項まで考慮する。式(3)の応力とひずみの関係を用いて振動時のひずみエネルギーと運動エネルギーおよびラグランジュアンを求める。さらに, 無次元変位

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{u}}{a}, \tilde{V} = \frac{\tilde{v}}{a}, \tilde{W} = \frac{\tilde{w}}{a}, \tilde{U}_0 = \frac{\tilde{u}_0}{a}, \tilde{V}_0 = \frac{\tilde{v}_0}{a} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を導入し, ラグランジュアンの停留条件を求める。ただし, 振動項については2次まで, 定常回転項と振動項との相乗項についても最高3次まで考慮し, ほかの項は微少項として無視する。このようにして求めた運動方程式から式(9)の定常回転時の運動方程式を差し引くと, 振動時の運動方程式は

$$\begin{aligned}& -\bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \bar{H}_3 \Gamma_0 \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial t^2} + \beta^2 \bar{A}_{11} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \xi^2} + \beta^2 \bar{A}_{12} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \phi \partial \xi} + \beta^2 \bar{A}_{12} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \\ & + \beta^2 \bar{A}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \xi \partial \phi} - \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \phi^2} + (\beta^2 \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \phi^2} + N_{\xi}^* \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2} + N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \xi} \\ & + \tilde{U}_0 \frac{\partial N_{\xi}^*}{\partial \xi} + \bar{N}_{\phi}^* \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \phi^2} = 0 \\ & \bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \Omega^2 \tilde{V} - 2\bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \Omega \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \bar{H}_3 \Gamma_0 \Omega^2 \tilde{V}_0 - \bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} - \bar{H}_3 \Gamma_0 \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial t^2} \\ & + \bar{A}_{66} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial \xi^2} + \bar{A}_{66} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \phi \partial \xi} + (\bar{A}_{22} \beta^2 + \bar{D}_{22}) \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \phi^2} - \bar{D}_{22} \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial \phi^2} \\ & + (\bar{D}_{22} + \beta^2 \bar{A}_{22}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} + \bar{A}_{12} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi \partial \phi} + (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \tilde{V}_0 + (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} \\ & - (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \tilde{V} + N_{\xi}^* \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \xi^2} + N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{V}_0}{\partial \xi} + \tilde{V}_0 \frac{\partial N_{\xi}^*}{\partial \xi} + \bar{N}_{\phi}^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} - \tilde{V} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} \right) = 0 \\ & 2\bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \Omega \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + 2\bar{H}_3 \Gamma_0 \Omega \frac{\partial \tilde{V}_0}{\partial t} - \bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^2} + (\bar{H}_1 \Gamma_0 \beta^2 \Omega^2 - \bar{A}_{22} \beta^2 - \bar{D}_{22}) \tilde{W} \\ & + \bar{A}_{55} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \xi^2} + \bar{A}_{55} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} + (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44} + \bar{D}_{22}) \frac{\partial \tilde{V}_0}{\partial \phi} - (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44} + \bar{D}_{22} + \bar{A}_{22} \beta^2) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \phi} \\ & - \bar{A}_{12} \beta^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2} + (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \phi^2} + N_{\xi}^* \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} + \bar{N}_{\phi}^* \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \phi^2} - 2 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \phi} - \tilde{W} \right) = 0 \\ & - \bar{H}_3 \Gamma_0 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - \bar{H}_3 \Gamma_0 \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial t^2} + \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \xi^2} + (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial \phi \partial \xi} - \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \phi^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \phi^2} \\ & - \bar{A}_{55} \beta^2 \tilde{U}_0 - \bar{A}_{55} \beta^2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} - N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} = 0 \\ & \bar{H}_3 \Gamma_0 \Omega^2 \tilde{V} - 2\bar{H}_3 \Gamma_0 \Omega \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \bar{H}_3 \Gamma_0 \Omega^2 \tilde{V}_0 - \bar{H}_3 \Gamma_0 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} - \bar{H}_3 \Gamma_0 \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial t^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{66} \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \phi \partial \xi} \\ & - \bar{D}_{12} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \phi^2} + \bar{D}_{22} \frac{\partial^2 \tilde{V}_0}{\partial \phi^2} - \bar{D}_{22} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} + \bar{D}_{12} \frac{\partial^2 \tilde{U}_0}{\partial \xi \partial \phi} - (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \tilde{V}_0 - (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \phi} \\ & + (\bar{A}_{44} \beta^2 + \bar{D}_{44}) \tilde{V} - N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)\end{aligned}$$

$\xi = \pm l/2a = \pm \mu$ における境界条件式は

$$(\tilde{N}_{\xi} + N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + N_{\xi}^* \tilde{U}_0) \delta \tilde{U} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left(\tilde{N}_{\xi\phi} + N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + N_{z\xi}^* \tilde{V}_0 \right) \delta \tilde{V} = 0 \\
& \left(\tilde{N}_{z\xi} + N_{\xi}^* \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \right) \delta \tilde{W} = 0 \\
& (\tilde{M}_{\xi}) \delta \tilde{U}_0 = 0 \\
& (\tilde{M}_{\xi\phi}) \delta \tilde{V}_0 = 0 \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{\xi} &= \bar{A}_{11} \beta^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + \bar{D}_{11} \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \xi} + \bar{A}_{12} \beta^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi} \\
& \quad + \bar{A}_{12} \beta^2 \tilde{W} \\
\tilde{N}_{\xi\phi} &= \bar{A}_{66} \beta^2 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + \bar{D}_{66} \frac{\partial \tilde{V}_0}{\partial \xi} + \bar{A}_{66} \beta^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \phi} \\
\tilde{N}_{z\xi} &= \bar{A}_{55} \beta^2 \tilde{U}_0 + \bar{A}_{55} \beta^2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \\
\tilde{M}_{\xi} &= \bar{D}_{11} \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \xi} + \bar{D}_{11} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + \bar{D}_{12} \frac{\partial \tilde{V}_0}{\partial \phi} \\
\tilde{M}_{\xi\phi} &= \bar{D}_{66} \frac{\partial \tilde{V}_0}{\partial \xi} + \bar{D}_{66} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \xi} + \bar{D}_{66} \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \xi} \\
\tilde{N}_{\phi}^* &= (\bar{A}_{12} \beta^2 + \bar{D}_{12}) \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \\
& \quad + (\bar{A}_{22} \beta^2 + 3\bar{D}_{22}) W^* - \bar{D}_{12} \frac{\partial U^*}{\partial \xi} \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

なお, $\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22} = 12$, $\bar{A}_{12} = 12\nu$, $\bar{A}_{44} = \bar{A}_{55} = 6k'(1-\nu)$, $\bar{A}_{66} = 6(1-\nu)$, $\bar{D}_{11} = \bar{D}_{22} = 1$, $\bar{D}_{12} = \nu$, $\bar{D}_{44} = \bar{D}_{55} = k'(1-\nu)/2$, $\bar{D}_{66} = (1-\nu)/2$, $\bar{H}_1 = 1$, $\bar{H}_3 = 1/12$, $12\beta^2 = \beta$ (k' :せん断修正係数, ν :ポアソン比)とおくと, 式(14), (15)は文献(9)の均質等方性の円筒殻の基礎方程式に一致する。

2.2 運動方程式の解 はじめに, 定常回転時の運動方程式の解について考える。 $\xi=0$ の断面に関して変形は対称として, 式(9)の解を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
U^* &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^{2m+1} \\
U_0^* &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m \xi^{2m+1} \\
W^* &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \xi^{2m} \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

ここに, A_m, B_m, C_m は未定係数である。

式(17)を式(9)に代入すると

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} [\beta^2 \bar{A}_{11} (2m+2)(2m+3) A_{m+1} \\
& \quad + \bar{D}_{11} (2m+2)(2m+3) B_{m+1} + f_{cm}] \xi^{2m+1} = 0 \\
& \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{D}_{11} (2m+2)(2m+3) A_{m+1} \\
& \quad + \bar{D}_{11} (2m+2)(2m+3) B_{m+1} - f_{bm}] \xi^{2m+1} = 0 \\
& \sum_{m=0}^{\infty} [f_{am} - \beta^2 \bar{A}_{55} (2m+1)(2m+2) C_{m+1}] \xi^{2m} \\
& \quad = \alpha_0^4 \left(\bar{H}_1 + \frac{\bar{H}_3}{\beta^2} \right) \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\alpha_0^4 = \Gamma_0 \Omega^2 \beta^2$$

$$\begin{aligned}
f_{am} &= \beta^2 \bar{A}_{12} (2m+1) A_m + (\beta^2 \bar{A}_{22} + \bar{D}_{22} - \alpha_0^4 \bar{H}_1) C_m \\
& \quad - \beta^2 \bar{A}_{55} (2m+1) B_m \\
f_{bm} &= \beta^2 \bar{A}_{55} B_m + \beta^2 \bar{A}_{55} (2m+2) C_{m+1} \\
f_{cm} &= \beta^2 \bar{A}_{12} (2m+2) C_{m+1} \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

2.2.1 同次解 式(18)の第3式の右边が零の場合について考える。式(18)が ξ の任意の値に対して常に成立するためには式(18)の3式の[]内が零となることを要す。これより A_0, B_0, C_0 が未定のまま $C_{m+1}, A_{m+1}, B_{m+1}$ ($m \geq 0$) が以下の式より順に決定される。

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= \frac{f_{bm} + f_{cm}}{(\bar{D}_{11} - \beta^2 \bar{A}_{11})(2m+2)(2m+3)} \\
B_{m+1} &= \frac{f_{bm} - \bar{D}_{11} (2m+2)(2m+3) A_{m+1}}{\bar{D}_{11} (2m+2)(2m+3)} \\
C_{m+1} &= \frac{f_{am}}{\beta^2 \bar{A}_{55} (2m+1)(2m+2)} \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

これより3組の独立な解が求まる。

2.2.2 特殊解 式(20)で $A_0 = B_0 = C_0 = 0$, $A_1 = \frac{f_{b0} + f_{c0}}{6(\bar{D}_{11} - \beta^2 \bar{A}_{11})}$, $B_1 = \frac{f_{b0} - 6\bar{D}_{11} A_1}{6\bar{D}_{11}}$, $C_1 = \frac{f_{a0}}{2\beta^2 \bar{A}_{55}}$ とし, 以下 $C_{m+1}, A_{m+1}, B_{m+1}$ ($m \geq 1$) が式(20)より決定される。

同次解における3組の独立な解は3個の未定係数 A_0, B_0, C_0 のうち1個を1とし, 残りの2個を零とする3とおりから決定することができる。したがって, 同次解における3組の独立な解を (U_1^*, U_{01}^*, W_1^*) , (U_2^*, U_{02}^*, W_2^*) , (U_3^*, U_{03}^*, W_3^*) , 特殊解を $(U_{sp}^*, U_{0sp}^*, W_{sp}^*)$ とすると, 式(9)の一般解は

$$\begin{aligned}
U^* &= \lambda_1^* U_1^* + \lambda_2^* U_2^* + \lambda_3^* U_3^* + U_{sp}^* \\
U_0^* &= \lambda_1^* U_{01}^* + \lambda_2^* U_{02}^* + \lambda_3^* U_{03}^* + U_{0sp}^* \\
W^* &= \lambda_1^* W_1^* + \lambda_2^* W_2^* + \lambda_3^* W_3^* + W_{sp}^* \\
U_i^* &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \xi^{2m+1}, U_{0i}^* = \sum_{m=0}^{\infty} B_{im} \xi^{2m+1} \\
W_i^* &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{im} \xi^{2m}, U_{sp}^* = \sum_{m=0}^{\infty} A_{4m} \xi^{2m+1} \\
U_{0sp}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{4m} \xi^{2m+1}, W_{sp}^* = \sum_{m=0}^{\infty} C_{4m} \xi^{2m} \dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

ここに, $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ は境界条件によって決定される任意定数である。このとき, 定常回転による初期張力は

$$\begin{aligned}
N_{\xi}^* &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{X}_m \xi^{2m}, \bar{N}_{\phi}^* = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{Y}_m \xi^{2m}, N_{z\xi}^* = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{Z}_m \xi^{2m+1} \\
& \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\bar{X}_m &= \bar{A}_{11} \beta^2 (2m+1) P_m + \bar{D}_{11} (2m+1) Q_m \\
& \quad + \bar{A}_{12} \beta^2 R_m \\
\bar{Y}_m &= (\bar{A}_{12} \beta^2 + \bar{D}_{12}) (2m+1) P_m \\
& \quad + (\bar{A}_{22} \beta^2 + 3\bar{D}_{22}) R_m - \bar{D}_{12} (2m+1) Q_m
\end{aligned}$$

$$\bar{Z}_m = \bar{A}_{55}\beta^2 Q_m + \bar{A}_{55}\beta^2(2m+2)R_{m+1} \dots\dots\dots (23)$$

$$P_m = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^* A_{im}, Q_m = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^* B_{im}, R_m = \sum_{i=1}^4 C_{im} \dots\dots\dots (24)$$

次に、振動時の解について考える。次のような変数分離を行う。

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_n(\xi)\cos(n\phi+pt) \\ \bar{V} &= V_n(\xi)\sin(n\phi+pt) \\ \bar{W} &= W_n(\xi)\cos(n\phi+pt) \\ \bar{U}_0 &= U_{0n}(\xi)\cos(n\phi+pt) \\ \bar{V}_0 &= V_{0n}(\xi)\sin(n\phi+pt) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここに、 $U_n, V_n, W_n, U_{0n}, V_{0n}$ は ξ の関数、 n は周方向波数、 p は円振動数、 t は時間を表す。このとき、式(14)の解として、 U_n, U_{0n} が ξ の奇関数、 V_n, W_n, V_{0n} が ξ の偶関数の場合と U_n, U_{0n} が ξ の偶関数、 V_n, W_n, V_{0n} が ξ の奇関数の場合の2通りの解が求まる。すなわち、

(i) U_n, U_{0n} が ξ の奇関数の場合(対称振動の解)

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m \xi^{2m+1}, V_n = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \xi^{2m} \\ W_n &= \sum_{m=0}^{\infty} F_m \xi^{2m}, U_{0n} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \xi^{2m+1} \\ V_{0n} &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m \xi^{2m} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

(ii) U_n, U_{0n} が ξ の偶関数の場合(反対称振動の解)

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m \xi^{2m}, V_n = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \xi^{2m+1} \\ W_n &= \sum_{m=0}^{\infty} F_m \xi^{2m+1}, U_{0n} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \xi^{2m} \\ V_{0n} &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m \xi^{2m+1} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここに、 D_m, E_m, F_m, G_m, H_m は未定定数であり、式(26)、(27)を式(14)に代入することにより、(i)、(ii)に対してそれぞれ D_0, E_0, F_0, G_0, H_0 が未定のまま $D_{m+1}, E_{m+1}, F_{m+1}, G_{m+1}, H_{m+1} (m \geq 0)$ が順次決定される。これより(i)、(ii)の場合とも、それぞれ5組の独立な解が求まり、合計10組の独立な解が求まる。振動方程式の一般解はこれら10組の解を線形結合して与えられる。しかし、 $\xi=0$ の面に関して円筒殻が対称形で両端の境界条件が等しい場合、振動は二つの面に対して対称な振動と反対称な振動に分離される。対称振動の一般解は式(26)より求まる5組の独立な解を線形結合した式で与えられる。すなわち、 $\lambda_1 \sim \lambda_5$ を任意定数として

$$(U_n, V_n, W_n, U_{0n}, V_{0n}) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i (U_{ni}, V_{ni}, W_{ni}, U_{0ni}, V_{0ni}) \dots\dots\dots (28)$$

同様に反対称振動の一般解は式(27)より求まる5組の

独立な解を線形結合した式で表される。

3. 数 値 計 算

数値計算は両端固定および両端自由支持でクロスプライ対称積層構造の2種類の円筒殻について行った。また各ラミナは等厚とし、同じ複合材料からなるものとした。複合材料としてはグラファイト繊維強化エポキシ樹脂 (G/E) を考え、弾性定数として $E_{11}=138, E_{22}=8.96, G_{12}=G_{13}=7.1, G_{23}=3.45$ GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.3$ とした。境界条件としては、式(15)より両端固定の場合

$$\bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \bar{U}_0 = \bar{V}_0 = 0 \dots\dots\dots (29)$$

両端自由支持の場合

$$\begin{aligned} (\bar{N}_\xi + N_\xi^* \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + N_{z\xi}^* \bar{U}_0) &= \bar{V} = \bar{W} = \bar{M}_\xi \\ &= \bar{V}_0 = 0 \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

Fig. 3 Comparison between the results by the classical lamination theory and those by the present theory (Both ends clamped, symmetric vibration)

Fig. 4 Comparison between the results by the classical lamination theory and those by the present theory (Both ends clamped, symmetric vibration)

とした。解 U^* , U_0^* , W^* , U_n , V_n , W_n , U_{0n} , V_{0n} は解の係数を各 100 項求めて計算した (解の収束けた数 16 けた)。計算結果の妥当性を調べるために、本解法の特別な場合として導かれる均質、等方性の厚肉円筒殻の基礎方程式 (2・1 節参照) を用いて求めた結果 (振動数) と文献 (9) の結果を一部比較したが両者は完全に一致した。以下に示す図で $\alpha_0^4 = \Gamma_0 \beta^2 \Omega^2$ は無次元回転数を、 $\alpha^4 = \Gamma_0 \beta^2 p^2$ は無次元振動数を表す。

図 3, 4 は積層薄肉円筒殻理論 (古典理論) による結果と本報の積層厚肉殻理論による結果との比較を示す。 $\beta = 6$ と殻厚が大きくなると古典理論による振動数曲線 (破線) と本報の厚肉理論による振動数曲線 (実線) の差は大きく、もはやせん断変形と回転慣性の影響は無視できなくなることがわかる。図に示していないが反対称振動の場合も同様な傾向である。

図 5~7 は両端固定回転円筒殻、図 8, 9 は両端自由支持回転円筒殻の振動数曲線をそれぞれ示す。図 5, 6 の振動数曲線上の $F_1 \sim F_4$, $B_1 \sim B_4$ はモードの計算点でこの後図 11, 12 で示す。周方向波数 n が小さいときは $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ 積層のほうが $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ 積層の場合より振動数が高いが n が大きくなるにつれてその大きさが逆転する傾向が見られる。これは n が大きい場合、周方向の剛性効果が大きく影響するためと考えられる。後進波の場合は (図 6), 前進波の場合に比べて振動数は高く求まる。両端自由支持の場合は、両端固定の場合より振動数曲線は全般に低く求まるが曲線の傾向は大体同じである。

図 10 は振動数に及ぼす積層数と積層順序の影響を調べたものである。図からわかるように $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ 積層のほうが $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ 積層の場合より振動数は高い。特に、その差は層数が小さいところで大きい。しかし、層数が増加するにつれてその差は小さくなって

いく。紙面の都合上省略したが、反対称振動の場合も対称振動と同様な傾向が見られる。

図 11, 12 は図 5 と図 6 の振動数曲線上の点のモードを示す。左端が $\xi = 0$, 右端が固定端 ($\xi = \mu = 1$) である。図中、 $W_n/44$ は W_n を $1/44$ に縮小して表していることを示す (他も同じ)。図より、前進波と後進波のモードはほぼ同じようなモードであることがわかる。また、変位の大きさについて見ると、 W_n が最も大きく、 U_n が最も小さい。図に示していないが、 $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ 積層の場合の振動モードは $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ 積層の場合のモードとほとんど同じである。また両端自由支持の場合の振動モードは両端固定の場合のモードにほとんど類似している。

表 1 は弾性定数の振動数に及ぼす影響を示す。 k' は修正係数である。本報で示した結果は (1) の場合に相当する。(2) の場合は G_{23} の値の影響を調べたものであるが、 G_{23} の値が小さくなると、振動数は減少することがわかる。(3), (4) の場合は式 (3) の応力

Fig. 6 Frequency curves (Both ends clamped, symmetric vibration, backward)

Fig. 5 Frequency curves (Both ends clamped, symmetric vibration, forward)

Fig. 7 Frequency curves (Both ends clamped, antisymmetric vibration, forward)

Fig. 8 Frequency curves (Both ends freely supported, symmetric vibration, forward)

Fig. 9 Frequency curves (Both ends freely supported, antisymmetric vibration, forward)

Fig. 10 Effects of number of layers upon the frequencies (Both ends clamped, symmetric vibration, forward)

Fig. 11 Mode of vibration (Both ends clamped, symmetric vibration, forward)

Fig. 12 Mode of vibration (Both ends clamped, symmetric vibration, backward)

 Table 1 Effects of the moduli of elasticity upon the frequencies $\sqrt{\alpha^4/12\beta^2}$ (Both ends clamped, symmetric vibration, forward)

$\sqrt{\alpha_0^4/\beta^2}$	Classical theory	Present Case(1)	Case(2)	Case(3)	Case(4)
0	0.299	0.251	0.250	0.250	0.249
0.1	0.241	0.200	0.199	0.199	0.198
0.2	0.220	0.191	0.191	0.188	0.187
0.3	0.228	0.210	0.209	0.205	0.204

Parameter : $N = 3, n = 2, \beta = 6, \mu = 1, (0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$

Case(1) : $G_{23} = 3.45 \text{ (GPa)}, v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0.3$

Case(2) : $G_{23} = \kappa' \times 3.45 \text{ (GPa)}, v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0.3$

Case(3) : $G_{23} = 3.45 \text{ (GPa)}, v_{12} = 0.3, v_{13} = v_{23} = 0$

Case(4) : $G_{23} = \kappa' \times 3.45 \text{ (GPa)}, v_{12} = 0.3, v_{13} = v_{23} = 0$
 $\kappa' = \pi^2/12$

$(\sigma_{xx}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{x\phi})$ とひずみ $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\phi\phi}, \varepsilon_{x\phi})$ の関係を二次元の式で置き換えた場合に相当する。これらの結果より(4)の場合が最も低い振動数を与えることがわかる。

4. 結 言

本報では回転する積層複合厚肉円筒殻の振動を級数解を用いて厳密に解析し、その振動特性を明らかにした。特に、 $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ 積層の場合と $(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$ 積層の場合の振動数を比較すると、古典理論の場合と同様、周方向波数によってその大きさが逆転することが明らかにされた。また古典理論による結果と本報の積層厚肉殻理論の結果を比較し、両理論の適用範囲を明らかにした。

本報における数値計算はすべてオムロンデータゼネラル AV350 を用い、倍精度で行った。

付 録

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{16} &= -mn^3Q_{22} + m^3nQ_{11} \\ &\quad - mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{26} &= -m^3nQ_{22} + mn^3Q_{11} \\ &\quad + mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \\ m &= \cos \phi, n = \sin \phi \\ Q_{11} &= E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta \\ Q_{22} &= E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})/\Delta \\ Q_{12} &= E_{11}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})/\Delta = E_{22}(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})/\Delta \\ Q_{44} &= G_{23}, Q_{55} = G_{13}, Q_{66} = G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}\end{aligned}$$

文 献

- (1) Chen, Y., ほか 2 名, *J. Sound Vib.*, **160**-1(1993), 137-160.
- (2) Yamada, G., ほか 2 名, *Proc. APVC.* 93, (1993), 1516-1520.
- (3) Lam, K. Y., ほか 1 名, *Int. J. Solids Structures*, **32**-5(1995), 647-663.
- (4) 胡 繼群・ほか 2 名, 機論, **62**-599, C(1996), 2549-2555.
- (5) 井川寛隆・ほか 2 名, 機論, **62**-600, C(1996), 3005-3012.
- (6) Novozhilov, V. V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, (1953), 13, Graylock Press.
- (7) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1987), 48, 303, Dordrecht, The Netherlands, Martinus Nijhoff Publishers.
- (8) Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, (1987), 24-26, Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania.
- (9) 鈴木勝義・ほか 2 名, 機論, **57**-536, C(1991), 1075-1083.