ジェフコットロータの内部共振現象*
(主危険速度付近とその3倍付近)石田 幸男*¹, 井上 剛志*¹, 竹内 薫*²Internal Resonance Phenomena of the Jeffcott Rotor
(Major Critical Speed and Three Times the Major Critical Speed)

Yukio ISHIDA, Tsuyoshi INOUE and Kaoru TAKEUCHI

The Jeffcott rotor is the most widely used model in the analysis of nonlinear resonances of rotors. This model satisfies a condition of internal resonance, since a forward natural frequency and a backward natural frequency always satisfy the ratio of $1 : (-1)$. Due to this internal resonance relation, some unique phenomena may appear in the resonances. However, in most of the previous studies on nonlinear resonances in the Jeffcott rotor, the authors paid no attention to this internal resonance relation. In the previous report^(*), we clarified the effect of internal resonance at twice the major critical speed in the Jeffcott rotor. In this study, we deal those phenomena at the major critical speed and at three times the major critical speed theoretically and experimentally. Especially, the influences of internal resonance on the nonlinear oscillations of the Jeffcott rotor are investigated. The result shows that internal resonance relation must be considered in dealing with nonlinear vibrations of rotating machines by the Jeffcott rotor model.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Nonlinear Vibration, Critical Speed, Subharmonic Resonance, Internal Resonance

1. まえがき

図 1(a)に示されるジェフコットロータは、線形のみならず、非線形振動解析⁽¹⁾⁽²⁾にもよく用いられている。このモデルはたわみ振動モデルであり、ジャイロモーメントは作用しない。そのため前向き固有振動数 p_f と後向き固有振動数 p_b が回転速度によらず一定で、常に $p_f : p_b = 1 : (-1)$ の内部共振の関係が成立する。このような内部共振の関係を持つ系では、特異な振動現象⁽³⁾⁽⁴⁾が発生する可能性がある。

著者らは前報⁽⁵⁾において、非線形復元力を持つジェフコットロータにおいて、非対称非線形性に起因する分数調波振動⁽⁶⁾や和差調波振動⁽⁶⁾が発生する主危険速度の2倍付近で現れる共振現象を調べた。そして、内部共振の影響により前向き $1/2$ 次分数調波振動のみならず、後向き $1/2$ 次分数調波振動も同程度の大きさで共存して発生すること、共振曲線の形状が著しく変化すること、新たな安定な分枝が発生すること、概周

期運動が発生する場合があること等の現象を理論的、実験的に明らかにした。そして現象の正しい理解のためには、内部共振を考慮する必要があることを示した。

本報では、非線形復元力を持つジェフコットロータにおいて、主危険速度付近、および主危険速度の3倍付近で現れる内部共振現象を調べる。特に、単一共振との違いに注目して、非線形振動の発生の有無およびその振動特性を明らかにする。

2. 運動方程式

図 1(a)に示すジェフコットロータでは、 $p_f = |p_b|$ であるため、主危険速度あるいはその整数倍の危険速度において、いくつかの非線形振動の共振点一致する。本報では前報⁽⁵⁾と同様、共振点がずれたときの内部共振の影響の変化をも調べるため、図 1(b)の2自由度傾き振動モデルを用いて解析する。この系の無次元表示の運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + N_{\theta x} &= F \cos \omega t \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + N_{\theta y} &= F \sin \omega t \\ F &= (1 - i_p) \tau \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 1996年10月26日 山梨講演会において講演、原稿受付
1997年3月21日。

*¹ 正員、名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-01 名古屋市千種区不老町1)。

*² 石川島播磨重工業(株) (〒135 東京都江東区豊洲3-1-15)。

Fig. 1 Analytical model

ここで、 θ_x, θ_y は円板位置における傾き角の成分、 i_p は極慣性モーメントと直径に関する慣性モーメントの比、 c は減衰、 $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ は復元力中の非線形項、 τ は動つりあい、 ω は回転角速度、 t は時刻を示す。

このモデルでは、固有振動数 p_f, p_b は回転速度 ω の関数として変化し、その変化の度合いは i_p の値、すなわちジャイロモーメントの大きさに依存している。そのため、 $i_p \neq 0$ の場合には各非線形振動の共振点は一致しない。一方、 $i_p = 0$ の場合は、式(1)は実質上、ジェフコットロータの運動方程式となる。なお、非線形項 $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ は、前報⁽⁵⁾と同様な手順で求め、その非線形成分は、方向角が 2π 変化する間に n 回増減するその回数によって分類でき、その成分を記号 $N(n)$ で表す⁽⁶⁾。 $n=0$ のときの $N(0)$ は等方性、 $n \neq 0$ のときの $N(n)$ は異方性の非線形成分である。

座標の3乗までの非線形ばね特性を考えた場合、非線形成分としては $N(0) \sim N(4)$ がある⁽⁶⁾。しかし、実

際の系では、軸受中心線の一致がよい場合には等方性の対称非線形成分 $N(0)$ のみが強く現れ、軸受中心線にずれがある場合には $N(0)$ に加え、非対称非線形成分 $N(1)$ が比較的強く現れる。このことを考慮し、本報では成分 $N(0)$ と $N(1)$ のみが存在する系について解析する。

3. 主危険速度付近について

主危険速度付近の共振現象に対する内部共振の影響を調べる。ジェフコットロータでは、主危険速度付近において、以下に示す3種類の非線形振動の共振点が一致する。これらの振動が単独で発生する場合については既に報告したが、その結果によると、成分 $N(0)$ 、 $N(1)$ のみが存在する系での発生の有無は以下の通りである。

- (1) 調和振動 $[p_f]$ ⁽⁶⁾ : 発生
- (2) 後向き同期ふれまわり振動 $[p_b]$ ⁽⁷⁾ : ×
- (3) 超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$ ⁽⁸⁾ : ×

ここに、記号 $[(p_f - p_b)/2]$ は $(p_f - p_b)/2 = \omega$ が成立するとき発生する振動を表す。

ジェフコットロータでは、主危険速度付近において、振動数 $\omega, -\omega$ の振動が同時に発生すると予想し、解を $O(\varepsilon)$ 精度で次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= P \cos(\omega t + \beta) + R_b \cos(-\omega t + \delta) + A_x \\ \theta_y &= P \sin(\omega t + \beta) + R_b \sin(-\omega t + \delta) + A_y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、振動数 ω と定数項について $O(\varepsilon)$ 精度で両辺の係数を等値すると、振幅 P, R_b と位相角 β, δ 、定数項 A_x, A_y に関する次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{P} &= -F \sin \beta - c \omega P + 2\varepsilon^{(1)} R_b \{A_x \sin(\beta + \delta) - A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} R_b \{(A_x^2 - A_y^2) \sin(\beta + \delta) - 2A_x A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ A_f P \dot{\beta} &= -F \cos \beta + G_f P + 2\varepsilon^{(1)} \{2A_x P + A_x R_b \cos(\beta + \delta) + A_y R_b \sin(\beta + \delta)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{P(P^2 + 2R_b^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) + (A_x^2 - A_y^2) R_b \cos(\beta + \delta) + 2A_x A_y R_b \sin(\beta + \delta)\} \\ A_b \dot{R}_b &= c \omega R_b + 2\varepsilon^{(1)} P \{A_x \sin(\beta + \delta) - A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} P \{(A_x^2 - A_y^2) \sin(\beta + \delta) - 2A_x A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ A_b R_b \dot{\delta} &= G_b R_b + 2\varepsilon^{(1)} \{2A_x R_b + A_x P \cos(\beta + \delta) + A_y P \sin(\beta + \delta)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{R_b(2P^2 + R_b^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) + (A_x^2 - A_y^2) P \cos(\beta + \delta) + 2A_x A_y P \sin(\beta + \delta)\} \\ 0 &= A_y + 2\varepsilon^{(1)} \{A_x A_y + P R_b \sin(\beta + \delta)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{A_x^2 A_y + 2A_y(R_b^2 - R_b P \cos(\beta + \delta) + P^2) + 2A_x R_b P \sin(\beta + \delta) + A_y^3\} \\ 0 &= A_x + \varepsilon^{(1)} \{2P^2 + 2R_b^2 + 3A_x^2 + A_y^2 + 2R_b P \cos(\beta + \delta)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{A_x^3 + 2A_x(R_b^2 + R_b P \cos(\beta + \delta) + P^2) + A_x A_y^2 + 2A_y R_b P \sin(\beta + \delta)\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式において、 $A_f = (2 - i_p)\omega$ 、 $A_b = -(2 + i_p)\omega$ 、 $G_f = 1 + i_p\omega^2 - \omega^2$ 、 $G_b = 1 - i_p\omega^2 - \omega^2$ である。また、 $\beta^{(0)}$ は $N(0)$ を表す非線形復元力項の係数、 $\varepsilon^{(1)}$ は $N(1)$ を表す非線形復元力項の係数である。

3.1 共振曲線の形状 ジェフコットロータの主危険速度付近における調和振動成分の共振曲線を図2に示す。図中の実線は安定解、破線と鎖線は不安定解を示す。破線と鎖線は、Routh-Hurwitzの安定判別法における判別条件の違い⁽⁹⁾を表す。また、数値シミュレーションで得られた結果のうち、○は定常振動、・は概周期運動⁽⁹⁾を示す。解析の結果、内部共振の関係を持たない場合とは異なり、以下に示す特徴を持つことが明らかになった。

- (i) 内部共振の影響により、特に大振幅の部分で共振曲線が複雑になる。(形状に対する各パラメータの影響については後述)
- (ii) 同時に後向き同期ふれまわり振動が同程度の振幅で発生する。
- (iii) 安定な分枝 AB, KL, GH が存在する。

Fig. 2 Resonance curves at the major critical speed of the Jeffcott rotor

(a) $\omega = 1.0$

(b) $\omega = 1.17$

Fig. 3 Time histories and Spectrum ($i_p=0.0$)

(iv) 鎖線の分枝 JK の近傍では概周期運動が発生する。

また、図2のパラメータの値における時刻歴およびスペクトル線図を図3に示す。図3(a)は $\omega=1.0$ における定常振動を表し、図3(b)は $\omega=1.17$ における概周期運動を表す。どちらの場合においても、調和振動成分と後向き同期ふれまわり振動成分が共存していることが確認できる。

3.2 各非線形成分の影響

3.2.1 等方性の対称非線形成分 $N(0)$ の影響 成分 $N(0)$ に関する係数 $\beta^{(0)}$ を変えたときの共振曲線を図4に示す。単一共振の場合は、 $\beta^{(0)}$ が小さいほど、共振曲線は直立した形となる。しかし、ジェフコットロータの場合は、図2のパラメータの値から、 $\beta^{(0)}$ が減少し $\beta^{(0)}=0.005$ になると、共振曲線は振幅が大きくなりながら一旦ほぼ直立するが、 $\beta^{(0)}=0.001$ とさらに減少すると、漸軟形へと変化する。また、その形状は2つのピークを持つ特徴ある形となる。

3.2.2 非対称非線形成分 $N(1)$ の影響 成分 $N(1)$ に関する係数 $\varepsilon^{(1)}$ を変えたときの共振曲線を図5に示す。図2のパラメータの値から、 $\varepsilon^{(1)}$ が小さくなり $\varepsilon^{(1)}=0.027$ となると、図2の分枝 IJKL が高速

(b) $\beta^{(0)} = 0.005$

(b) $\beta^{(0)} = 0.001$

Fig. 4 Influence of $\beta^{(0)}$ on resonance curves

側に移動するとともに、点 D, G から高速側にでている不安定解の分枝は分裂する。さらに、 $\varepsilon^{(1)}$ が小さくなると、点 M, L の間隔が広がっていく。後向き同期ふれまわり振動成分は、図 2 の場合では調和振動成分と同程度の振幅で同時に発生するが、 $\varepsilon^{(1)}=0.027$ の場合では調和振動成分と比較して小さくなり、さらに $\varepsilon^{(1)}$ が小さくなると、後向き同期ふれまわり振動成分は消える。このように、成分 $N(1)$ が小さくなると、内部共振の影響が減少し、共振曲線は単一共振の場合の共振曲線へと変化していく。

3.3 共振点のずれの影響 ジャイロモーメント

Fig. 5 Influence of $\varepsilon^{(1)}$ on resonance curves

(a) slight discrepancy

(b) small discrepancy

Fig. 6 Influence of discrepancy among critical speeds on resonance curves

の大きさに関連するパラメータ i_p を零から徐々に増大させると共振点がずれ、内部共振の関係がなくなる。この i_p を変えたときの共振曲線を図 6 に示す。図 2 のパラメータの値から、 i_p が少し変化し $i_p=0.03$ となった図 6(a) では、図 2 の分枝 AB と I J K L が分離、結合し、分枝 AN J P K L と BO I となる。従って、このようなパラメータであらわされる系においては、回転速度を低速側から高速側にゆっくりと変化させるとすると、振幅は分枝 OB ではなく分枝 J P K L に従って増加する。なお、鎖線の分枝 PK の近傍において概周期運動が発生する。

i_p が増加して $i_p=0.1$ になった図 6(b) では、分枝 BO I および C D E は高速大振幅側に移動する。まだこのパラメータの値では、概周期運動が発生する領域が存在しているが、 i_p がさらに増加するとその領域は消滅し、単一共振の場合の調和振動の共振曲線へと変化していく。後向き同期ふれまわり振動成分は、 i_p の増大と共にその振幅が小さくなり、消滅していく。

4. 主危険速度の 3 倍付近について

主危険速度の 3 倍付近の共振現象に対する内部共振の影響を調べる。ジェフコットロータでは、主危険速度の 3 倍付近において、以下に示す 4 種類の非線形振動の共振点が一致する。単独で発生する場合については既に報告した⁶⁾が、その結果によると、成分 $N(0)$, $N(1)$ のみが存在する系での発生の有無は以下の通りである。

(1) 前向き 1/3 分数調波振動 $[3p_f]$	: ×
(2) 後向き 1/3 分数調波振動 $[3p_b]$	: ×
(3) 和差調波振動 $[2p_f - p_b]$	: 発生
(4) 和差調波振動 $[p_f - 2p_b]$	: ×

ここで、成分 $N(0)$, $N(1)$ のみの系では、主共振点の 3 倍付近において前向き 1/3 次分数調波振動が発生しないことに注目する。

ジェフコットロータでは、主危険速度の 3 倍付近において、振動数 $(1/3)\omega$, $-(1/3)\omega$ の振動が同時に発生すると予想し、解を $O(\varepsilon)$ の精度で次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos\{(1/3)\omega t + \delta_f\} + R_b \cos\{(-1/3)\omega t + \delta_b\} \\ &\quad + P \cos(\omega t + \beta) + A_x \\ \theta_y &= R_f \sin\{(1/3)\omega t + \delta_f\} + R_b \sin\{(-1/3)\omega t + \delta_b\} \\ &\quad + P \sin(\omega t + \beta) + A_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)を式(1)に代入し、前節と同様な解析により次式を得る。

$$\begin{aligned}
 A_f \dot{R}_f &= -(1/3)c\omega R_f + 2\varepsilon^{(1)}R_b \{A_x \sin(\delta_f + \delta_b) - A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\
 &\quad + 4\beta^{(0)}R_b \{-2R_f P \sin(2\delta_f - \delta_b) + (A_x^2 - A_y^2) \sin(\delta_f + \delta_b) - 2A_x A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\
 A_f R_f \dot{\delta}_f &= G_f R_f + 2\varepsilon^{(1)}\{2A_x R_f + R_b A_x \cos(\delta_f + \delta_b) + R_b A_y \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\
 &\quad + 4\beta^{(0)}\{R_f(R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) - 2R_f R_b P \cos(2\delta_f - \delta_b) \\
 &\quad + R_b(A_x^2 - A_y^2) \cos(\delta_f + \delta_b) + 2R_b A_x A_y \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\
 A_b \dot{R}_b &= (1/3)c\omega R_b + 2\varepsilon^{(1)}R_f \{A_x \sin(\delta_f + \delta_b) - A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\
 &\quad + 4\beta^{(0)}R_f \{R_f P \sin(2\delta_f - \delta_b) + (A_x^2 - A_y^2) \sin(\delta_f + \delta_b) - 2A_x A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\
 A_b R_b \dot{\delta}_b &= G_b R_b + 2\varepsilon^{(1)}\{2R_b A_x + R_f A_x \cos(\delta_f + \delta_b) + R_f A_y \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\
 &\quad + 4\beta^{(0)}\{R_b(2R_f^2 + R_b^2 + 2P^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) - R_f^2 P \cos(2\delta_f - \delta_b) \\
 &\quad + (A_x^2 - A_y^2)R_f \cos(\delta_f + \delta_b) + 2A_x A_y R_f \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\
 0 &= A_y + 2\varepsilon^{(1)}\{A_x A_y + R_f R_b \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\
 &\quad + 4\beta^{(0)}\{A_y(2R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2 - 2R_f R_b \cos(\delta_f + \delta_b) + A_x^2 + A_y^2) + 2R_f R_b A_x \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\
 0 &= A_x + \varepsilon^{(1)}\{2R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2 + 4R_f R_b \cos(\delta_f + \delta_b) + 3A_x^2 + A_y^2\} \\
 &\quad + 4\beta^{(0)}\{A_x(2R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2 + 2R_f R_b \cos(\delta_f + \delta_b) + A_x^2 + A_y^2) + 2R_f R_b A_y \sin(\delta_f + \delta_b)\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

上式において、 $A_f = (2/3 - i_p)\omega$ 、 $A_b = -(2/3 + i_p)\omega$ 、 $G_f = 1 + i_p\omega^2/3 - \omega^2/9$ 、 $G_b = 1 - i_p\omega^2/3 - \omega^2/9$ である。また、調和振動数成分の振幅 P 、位相差 β は、振動数 ω について $O(\varepsilon^0)$ 精度で同様に求めることにより得られる $P = F/(1 + i_p\omega^2 - \omega^2)$ 、 $\beta = -\pi$ を用いる。

4.1 共振曲線の形状 主危険速度の3倍付近における共振現象は以下の特徴を持つ。

- (i) 内部共振の影響により、単一共振では発生しなかった前向き 1/3 次分数調波振動と後向き 1/3 次分数調波振動が同時に発生する。(その前向き 1/3 次分数調波振動数成分の共振曲線を図 7 に示す。)
- (ii) (単一共振の場合⁽¹⁰⁾は自明でない安定な分枝は1本であるのに対し、) 内部共振の影響を受けるこの場合は、A B、I J の2本の安定な分枝が存在する。
- (iii) 分枝 I J の低速部分の一部は鎖線で表される不安定となり、その付近で概周期運動が発生する。

図 7 のパラメータの状態における時刻歴およびスペクトル線図を図 8 に示す。図 8 (a) は分枝 I J 上の ω

Fig. 7 Resonance curves at three times the major critical speed of the Jeffcott rotor

=3.4 における定常振動を表し、図 8 (b) は $\omega = 3.1$ における概周期運動を表す。どちらの場合においても前向きと後向きの 1/3 次分数調波振動成分が共存していることが確認できる。

4.2 各非線形成分の影響

4.2.1 等方性の対称非線形成分 $N(0)$ の影響 成分 $N(0)$ に関する係数 $\beta^{(0)}$ を変えたときの影響を調べる。 $\beta^{(0)}$ を小さくすると、 $\beta^{(0)} = 0.015$ の図 9 からわかるように、全体的に漸硬形の傾きが弱められる。

4.2.2 非対称非線形成分 $N(1)$ の影響 成分 $N(1)$ に関する係数 $\varepsilon^{(1)}$ を変化させたときの共振曲

(a) $\omega = 3.4$

(b) $\omega = 3.1$

Fig. 8 Time histories and Spectrum

線を図 10 に示す. 図 7 のパラメータの値から, $\varepsilon^{(1)}$ を小さくし $\varepsilon^{(1)}=0.055$ になると, 分枝 ABCD, EFG は小さくなりながら変化し, それぞれ分枝 AN, GOD となる. そして, それらの分枝の間の振幅領域において概周期運動が発生する. なお, 図 7 の場合には, これに対応する概周期運動は, 安定な定常解 AB, IJ への引き込みが強いため見つけられなかった. また, 分枝 HIJ は高速側に移動する.

さらに $\varepsilon^{(1)}$ を小さくし零に近づけていくと, 前向きおよび後向きの 1/3 次分数調波振動成分の分枝は消滅, あるいは高速側に移動する. そして, 図 10 の概周期運動が収束し, 和差調波振動 $[2p_f - p_b]^{(6)}$ となる. このように, 非対称非線形成分 $N(1)$ が小さくなると, 内部共振の影響が減少し, 共振曲線は単一共振の場合の共振曲線へと変化していく.

Fig. 9 Influence of $\beta^{(0)}$ on resonance curves

Fig. 10 Influence of $\varepsilon^{(1)}$ on resonance curves

Fig. 11 Influence of discrepancy among critical speeds on resonance curves

4.3 共振点のずれの影響 ジャイロモーメントの大きさに関連する i_p を図 10 のパラメータの値 ($i_p=0$) から徐々に増加させ, $i_p=0.01$ にしたときの共振曲線を図 11 に示す. 図 10 の分枝 AN, HIJ が, 高速大振幅側に移動すると同時に結合し, 分枝 JPAQH となる. また, 分枝 GOD はほとんどその形状を変化させることなく高速大振幅側に移動する. 図 10 に対応する概周期運動は, 定常解の低速側では発生したが, 高速側では見つけられなかった.

さらに i_p が増加すると, 内部共振の影響がなくなるため, 分枝 JPAQH, GOD は消え, 概周期運動はその発生範囲を広げつつ収束して, 和差調波振動 $[2p_f - p_b]^{(6)}$ となる.

5. 実験

5.1 実験装置 実験装置は既報⁽⁶⁾ で用いた装置と基本的に同じ構成である. 上下の軸受中心間距離 $l=701\text{mm}$, 直径 $d=12\text{mm}$ の一様円形断面の軸の中央位置に, 直径 300mm , 厚さ 14mm の円板を取り付け, 下端を単列深みぞ玉軸受 #6204, 上端を複列自動調心玉軸受 #1200 で支持した. 円板は軸の任意の位置に取り付け変えることができるようになっており, その軸中央からの距離を a とする.

この実験装置は単列深みぞ玉軸受のアンギュラクリアランスに起因して非線形ばね特性を持ち, このアンギュラクリアランスは 軸上端位置における水平方向距離に換算すると $3\text{mm} \sim 6\text{mm}$ の大きさである⁽⁶⁾. 下側軸受の軸受中心線の延長線と上側軸受の中心との水平距離を δ で表す. 組立状態がよい時 ($\delta \approx 0$) は, 等方性の非線形ばね特性となり, この場合は, $N(0)$ のみを考慮した理論モデルに対応する. 一方, 軸受中心線のずれ δ があるときは, 等方性非線形性に非対称非線形性を加えたばね特性となり, $N(0)$ と $N(1)$ を考慮した理論モデルに対応する.

円板の位置は, 作用するジャイロモーメントの大きさに影響する. 軸中央に円板を設定した時は, たわみと傾きが連成しない 4 自由度系となり, たわみ振動モードに対応する前向きと後向きの固有振動数は回転速度によらず一定となる. 従って, このモードは図 1(a) のジェフコットロータモデルで表現でき, 主危険速度およびその整数倍の回転速度で, 複数の非線形振動の共振点が一致する. 一方, 円板が軸中央からずれると, たわみと傾きが連成する 4 自由度系となる. そして, たわみ振動が支配的なモードの前向きと後向きの固有振動数はジャイロモーメントの影響により回転速度の

関数となる。従って、このモードは図 1(b)の 2 自由度傾き振動モデルで表さなければならず、この場合には各非線形振動の共振点は一致しない⁽⁶⁾。

本報では、 δ が 1mm 以下の状態にし、

- ・設定 1 : $a=0\text{mm}$ (円板を軸中央に設定)
- ・設定 2 : $a=40\text{mm}$ (円板を軸中央から少しずれた位置に設定)

の 2 種類の設定状態について実験を行った。

5.2 実験結果

5.2.1 主危険速度付近 主危険速度付近を調べた実験結果を示す。図 12 は、設定 1 における調和振動成分の振幅 P についての共振曲線であり、図 13 は、その 632rpm における時刻歴とスペクトル分布である。図 13 からわかるように、調和振動成分と後向き同期ふれまわり振動成分が共存しており、この状態は 500rpm 付近から 800rpm 付近にわたって現れた。また、いろいろな δ の値について実験し、概周期運動の発生も確認した。

5.2.2 主危険速度の 3 倍付近 主危険速度の 3 倍付近を調べた実験結果を示す。図 14 は設定 1 における前向き 1/3 次分数調波振動成分の振幅 R_f についての共振曲線である。図 7 に示した理論解析結果と同様、定常振動の共振曲線が 2 本発生した。図 15 は、図 14

の共振曲線のうち、振幅の大きい側の 1905 rpm における時刻歴とスペクトル分布である。前向き 1/3 次分数調波振動成分と後向き 1/3 次分数調波振動成分が共存していることが確認できる。図 14 のもう一方の分枝についても図 15 と同様な結果が得られた。また、いろいろな δ の値について実験し、概周期運動が発生することも確認した。

図 16 に設定 2 における前向き 1/3 次分数調波振動成分の振幅 R_f についての共振曲線を示す。円板の位置のずれに起因してジャイロモーメントが作用するため共振点がずれ、図 11 に示した理論解析結果と同様、和差調波振動様式の概周期運動が広い回転速度範囲にわたって発生した。図 17 は図 16 の共振曲線の 1993 rpm における時刻歴とスペクトル分布である。

以上の実験結果は、本報で行った理論解析結果と定性的に一致していることがわかる。

Fig. 14 Resonance curves at three times the major critical speed (Experimental results - assembly 1)

Fig. 12 Resonance curves at the major critical speed (Experimental results - assembly 1)

Fig. 15 Time histories and Spectrum $\omega = 1905\text{rpm}$ (Experimental results - assembly 1)

Fig. 13 Time histories and Spectrum $\omega = 632\text{rpm}$ (Experimental results - assembly 1)

Fig. 16 Resonance curves at three times the major critical speed (Experimental results - assembly 2)

6. 結論

非線形ばね特性を持つジェフコットロータの、主危険速度付近とその3倍付近の振動について以下の結論を得た。

- (1) 主危険速度付近では、調和振動、後向き同期ふれまわり振動、超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$ の共振点が一致し、内部共振現象が発生する。
- (2) 主危険速度の3倍付近では、前向き $1/3$ 次分数調波振動、後向き $1/3$ 次分数調波振動、和差調波振動 $[2p_f - p_b]$, $[p_f - 2p_b]$ の共振点一致し、内部共振現象が発生する。
- (3) 非対称非線形成分 $N(1)$ が存在するとき、主危険速度付近では、調和振動と後向き同期ふれまわり振動が同時に発生し、主危険速度の3倍付近では、前向きと後向きの $1/3$ 次分数調波振動が同時に発生する。
- (4) 主危険速度付近とその3倍付近のどちらにおいても、それぞれの非線形振動が単独で発生する場合とは振動特性が異なり、共振曲線の形状が複雑になるとともに、新たな安定な分枝が発生する。
- (5) 主危険速度付近とその3倍付近のどちらにおいても、パラメータの値により、概周期運動が発生する場合がある。
- (6) ジェフコットロータは内部共振の関係をもつので、その影響を考慮した解析を行う必要がある。
- (7) 理論解析で得られた上記の結果を実験によって確認した。

Fig. 17 Time histories and Spectrum $\omega = 1993\text{rpm}$
(Experimental results - assembly 2)

最後に、本実験装置を作成していただいた名古屋大学大学院工学研究科、中西幸弘技官に謝意を表す。

文献

- (1) F.F.Ehrich, ASME Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design, Vol.110, 1988, 9-16
- (2) Y.B.Kim and S.T.Noah, Nonlinear Dynamics, Vol.1 1990, 221-241
- (3) Sethna, P.R, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, 27-1(1960-3), 187-195
- (4) Nayfeh, A.H., Balachandran, B., Appl Mech Rev vol-42, no11 Part2, Nov 1989, S175-S201
- (5) 石田・井上, 機論, 63-606(1997), 321
- (6) 山本・石田, 機論, 41-345(1975), 1374
- (7) 下山・山本, 機論, 20-91(1954), 216
- (8) 山本・石田・池田, 機論, 50-456(1984), 1390
- (9) 山本・安田, 機論, 42-358(1976), 1692
- (10) T.Yamamoto, Y.Ishida, Ingenieur-Archiv 46(1977) 125-135