半無限空間における衝撃音の解析*

西 垣 勉^{*1}, 鈴木 伴 征^{*2}, 遠 藤 満^{*1}Analysis of Impact Sound in a Half Space
Based on the Boundary Element Method

Tsutomu NISHIGAKI, Tomoyuki SUZUKI and Mitsuru ENDO

This paper describes an analysis technique based on the boundary element method (BEM) for problems concerning transient sounds by impacted bodies of arbitrary shape that are in close proximity of a rigid infinite plane. The BEM is formulated using a new half-space Green's function which exactly satisfies the Laplace transformed Helmholtz equation and the rigid boundary condition on the infinite plane. The analysis is first carried out in the Laplace transformed domain using the boundary input values obtained by a numerical Laplace transform. Then, the results in the time domain are obtained by a numerical inverse Laplace transform. For a transient sound radiated by impacted bodies, transient acoustic radiation from a sphere and a cube impacted by a sphere are considered. The validity of the analytical results is examined by comparing it with the experimental results.

Key Words: Boundary Element Method, Impact Sound, Half Space, Rigid Infinite Plane, Laplace Transform

1. 緒 言

機械の高速化, 高出力化に伴い発生する騒音は重要な問題となっているが, そのおもな原因として固体同士の接触や振動などが挙げられる。固体の過渡衝撃音に関しては, これまで比較的多くの研究がなされているが^{(1)~(6)}, これらの研究は形状を限定した単純な要素同士の衝突を対象としたものがほとんどである。しかし, 現実にはさまざまな形状の要素同士の衝突により騒音が引き起こされている可能性があるため, これを解析可能とする手法が必要であると考えられる。一方, 三次元音響問題の解析手法として境界要素法が有力視されているが, 過去に行われた境界要素法に関する研究は定常音のみを扱っており⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾, 過渡衝撃音などの非定常音問題に対する研究は見受けられない。しかしながら上述のような固体同士の接触は本質的には過渡現象であり, 非定常音響問題として取扱う必要がある。

以上の観点から著者らは既報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾において, 境界要素法に基づき固体の過渡衝撃音および非定常音響問

題を解析する手法を提案した。本手法は, Laplace 変換(以後 L^+ 変換と書く)により, 像空間において非定常問題を定常問題と同様に解析し⁽¹³⁾, 高速フーリエ変換を利用した数値逆 Laplace 変換⁽¹⁴⁾(以後 L^- 変換と書く)により時間領域における解を求めるものである。これに基づき, 球と球, 球と円柱あるいは球と立方体の衝突による過渡衝撃音について解析を行った結果, それらの解析が有効であることを確認した。しかしながら, いずれの場合においても問題で取扱う領域を無限空間と仮定して解析を行っている。

本研究の目的は, 本解析手法の汎用性をより高めるため半無限空間における固体同士の衝突に伴う過渡衝撃音を解析可能とする手法を確立することである。なお, 空間を仕切る平面は剛体壁と仮定して剛体壁での境界条件を満たす基本解を導入し, 境界要素法に基づく定式化を行う。

半無限空間における衝突問題の例として, 球と球および球と立方体の衝突問題を考え, 衝突によって発生する過渡衝撃音について解析結果と実験結果を比較することにより本解析手法の妥当性を検証する。

2. 支配方程式

音響問題の支配方程式は, Helmholtz の波動方程式

* 原稿受付 1997 年 1 月 20 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 東京工業大学大学院。

であり、次式で表される。

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 P, t, c および ∇^2 はそれぞれ、音圧、時間、音速およびラプラシアンである。 $t=0$ における初期条件を次式とする。

$$P(0)=0, \dot{P}(0)=0 \quad (2)$$

式(2)の初期条件のもとに、式(1)を L^+ 変換することにより、本研究における境界要素法の支配方程式は次式となる。

$$\nabla^2 \bar{P} - \frac{s^2}{c^2} \bar{P} = 0 \quad (3)$$

ここで、 s は L^+ 変換のパラメータであり、 $\bar{P}$ は L^+ 変換された音圧を表す。式(3)をもとに図1に示すような半無限領域 Ω 、境界 Γ を考える。なお、 $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_P$ であり Γ_0 は固体表面、 Γ_P は剛体壁を表す。式(3)を重み付き残差式で表し、式(3)を満足する基本解 $\bar{P}^*$ 、 $\bar{q}^*$ を重み関数とすれば半無限空間における積分方程式は次式となる。

$$\bar{P} = \int_{\Gamma_0} (\bar{q} \bar{P}^* - \bar{P} \bar{q}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_P} (\bar{q} \bar{P}^* - \bar{P} \bar{q}^*) d\Gamma \quad (4)$$

ここで、 $\bar{q}$ は空気密度と加速度の積に L^+ 変換を施した流束を示しており、境界の法線方向を n とすれば $\bar{q} = \partial \bar{P} / \partial n$ で表せる。また、基本解 $\bar{P}^*$ 、 $\bar{q}^*$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{P}^* &= \frac{1}{4\pi r} \exp\left(-\frac{s}{c} r\right) \\ \bar{q}^* &= \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial n} = \frac{d\bar{P}^*}{dr} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{s}{c} + \frac{1}{r}\right) \exp\left(-\frac{s}{c} r\right) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、 r はソース点と観測点の間の距離を示す。次に、剛体壁 Γ_P における境界条件を満足する基本解 $\bar{P}_\#^*$ 、 $\bar{q}_\#^*$ を求める。まず、剛体壁 Γ_P での境界条件は次式で表せる。

$$\bar{q} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

式(6)を満たす基本解を求めるにあたり鏡像原理を適用すると、新しい基本解 $\bar{P}_\#^*$ 、 $\bar{q}_\#^*$ が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{P}_\#^* &= \frac{1}{4\pi r} \exp\left(-\frac{s}{c} r\right) + \frac{1}{4\pi R} \exp\left(-\frac{s}{c} R\right) \\ \bar{q}_\#^* &= \frac{\partial \bar{P}_\#^*}{\partial n} = \frac{d\bar{P}_\#^*}{dr} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{s}{c} + \frac{1}{r}\right) \exp\left(-\frac{s}{c} r\right) \frac{\partial r}{\partial n} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi R} \left(\frac{s}{c} + \frac{1}{R}\right) \exp\left(-\frac{s}{c} R\right) \frac{\partial R}{\partial n} \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 r はソース点と観測点の間の距離、 R はソース点と、観測点の剛体壁に対する鏡像点の間の距離を示す。基本解に式(7)を用い、境界条件(6)を考慮すると Γ_P での積分は零となり式(4)は結局、次式で表される。

$$\bar{P} = \int_{\Gamma_0} (\bar{q} \bar{P}_\#^* - \bar{P} \bar{q}_\#^*) d\Gamma \quad (8)$$

式(8)から固体表面上における積分方程式を求める。境界面に半径 ε の半球を考え、その中心に負荷点 b が存在すると仮定し、 ε を零に収束させることにより、境界積分方程式は次式となる。

$$\left(1 - \frac{\phi b}{4\pi}\right) \bar{P}_b + \int_{\Gamma_0} \bar{P} \bar{q}_\#^* d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \bar{q} \bar{P}_\#^* d\Gamma \quad (9)$$

ここで、 $\phi b/4\pi$ は点 b における半径 ε の球に対する部分球の表面積の割合を表す。

次に、図2のようなデカルト座標系において、 (x_i, y_i, z_i) ($i=1, 2, 3$) を頂点とする三角形線形要素を考え、要素分割数を n 、節点数を m として、節点 i から見た j 要素を考えて離散化を行えば、境界上での積分方程式は次式となる。

$$\left(1 - \frac{\phi_i}{4\pi}\right) \bar{P}_i + \sum_{j=1}^n (\bar{P}_{j1} h_{ij}^1 + \bar{P}_{j2} h_{ij}^2 + \bar{P}_{j3} h_{ij}^3)$$

Fig. 1 Half space Ω and boundary Γ

Fig. 2 Triangular coordinate system

$$= \sum_{j=1}^n (\bar{q}_{j1} g_{ij}^1 + \bar{q}_{j2} g_{ij}^2 + \bar{q}_{j3} g_{ij}^3) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで,

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \xi_1 \bar{q} d\Gamma, & g_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \xi_1 \bar{P} d\Gamma \\ h_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \xi_2 \bar{q} d\Gamma, & g_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \xi_2 \bar{P} d\Gamma \\ h_{ij}^3 &= \int_{\Gamma_j} \xi_3 \bar{q} d\Gamma, & g_{ij}^3 &= \int_{\Gamma_j} \xi_3 \bar{P} d\Gamma \\ \xi_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

本研究では、固体のかど部、すなわちかど点におけるポテンシャルの流束 $\bar{q}$ を決定する場合、二重節点法を適用している。これより、式(10)は節点 i に関してまとめると、次式となる。

$$\sum_{k=1}^m H_{ik} \bar{P}_k = \sum_{k=1}^{m+a} G_{ik} \bar{q}_k \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 a はかど点数を示しているが、かど点のない物体を取扱うときは $a=0$ とすればよい。 H_{ik} 、 G_{ik} はそれぞれ節点 i から見た節点 k に関する積分 h_{ij}^1, g_{ij}^1 の総和である。また、 H_{ii} は一様ポテンシャルを作用させることにより次式で求められる。

$$H_{ii} = 1 - \sum_{k=1}^m H_{ik} \quad (i \neq k) \dots\dots\dots (13)$$

本研究においては、固体表面の加速度が入力となるため、自由度の増分 a にかかわらず境界上の $\bar{q}$ はすべて既知となる。したがって、式(12)を整理すると、 A を既知の係数行列とする次のような m 元一次の連立方程式となる。

$$Ax = f \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 A は式(12)の H_{ik} を成分とする行列、 x は $\bar{P}_k$ を成分とするベクトルであり、 f は式(12)の右辺を成分とするベクトルである。式(14)より未知ベクトル x を求めることにより、境界上のすべての節点の $\bar{P}$ 、 $\bar{q}$ の値が定まる。次に、求めた各節点の $\bar{P}$ 、 $\bar{q}$ を用いて半無限空間中の任意点 I での $\bar{P}$ を求める式を離散化すると次のようになる。

$$\bar{P}_I = - \sum_{k=1}^m H_{Ik} \bar{P}_k + \sum_{k=1}^{m+a} G_{Ik} \bar{q}_k \quad \dots\dots\dots (15)$$

$\bar{P}_I$ の値はすべて Laplace 領域における値であるから、数値 L 変換することにより時間領域における解が求まる。

3. 半無限空間における固体の過渡衝撃音の解析

以上をもとに半無限空間における任意形状の発音源に対して解析可能となるようなはん用的な解析プログラムを作成した。なお、衝突モデルとして鋼球と鋼球、

および鋼球と鋼の立方体の衝突を考えた。

3.1 入力データおよび座標系 解析に先立って入力に必要な固体の加速度の解析は、それぞれの固体を運動学的には質点とみなして、Hertz の接触理論を利用した二体接触問題の近似解法⁽¹⁵⁾ により行った。また、測定点の位置は、図3に示すように剛体壁上に原点をもち、 $x>0$ の領域を半無限空間とするデカルト座標系を用いて表した。また、数値解析に際しては空気密度 $\rho=1.226 \text{ kg/m}^3$ 、音速 $c=340.0 \text{ m/s}$ とした。

3.2 実験 解析結果の妥当性を検証するために実験を行った。実験方法は球と立方体の衝突の場合、図4に示すように立方体を上部の支持材より糸でつり下げ、球を衝突速度 v_0 で衝突させることにより発生する音圧を測定することにより行った。また、球と球の衝突の場合も同様な方法で実験を行った。なお、剛体壁には厚さ 5 mm の鋼板を使用した。音圧は図3の座標系により定まる任意の位置 (x, y, z) に設置した精密騒音計からの信号を直接 FFT アナライザに取込み、フロッピーディスクを介して計算機 PC 9801 に

Fig. 3 Definition of coordinate system

Fig. 4 Experimental set-up

Fig. 5 Experimental method

Fig. 6 Method of boundary division

取込んで処理した。

3・3 球と球の衝撃音の解析 まず、半無限空間において鋼球 A が鋼球 B に衝突した際に発生する音圧の時間変動に関し、解析結果と実験結果を比較した。球と壁の配置は図 5 に示すとおり、球と球の衝突点と剛体壁との距離を 0.1 m として剛体壁に対して垂直な方向で球 A を球 B に速度 $v_0 = 0.63$ m/s で衝突させた。なお、鋼球 A、鋼球 B の半径はそれぞれ、 $r_A = 20$ mm, $r_B = 20$ mm とした。境界表面の分割数および数値 L+変換における時間点数は、それぞれについて収束性を考慮して、節点数 147、要素数 288 および時間点数 256 とした。境界要素の分割方法を図 6 に示す。発生する音圧の座標点 (x, y, z) における時間変動について、解析結果と実験結果を比較したのが図 7 である。グラフはすべて測定地点に衝撃音が到達した瞬間を時間軸の原点としている。ここで、表示している時間内において物体が衝突後離れた距離を計算すると最大 0.6 mm 程度であり、これは物体の大きさに比べて非常に小さいため無視できる。したがってここでは両物体を常に接触していると考えて解析を行った。これは以降の解析についても同様である。図 7 (a) は鋼球 A を初速度 $v_0 = 0.63$ m/s で衝突させ、 $x = 0.35$ m, $y = 0.0$ m, $z = 0.0$ m の位置で測定した場合に対する結果、図 7 (b) は測定地点を $x = 0.3$ m, $y =$

(a) $x = 0.35$ m, $y = 0.0$ m, $z = 0.0$ m, $v_0 = 0.63$ m/s (b) $x = 0.3$ m, $y = 0.3$ m, $z = 0.0$ m, $v_0 = 0.63$ m/s (c) $x = 0.1$ m, $y = 0.3$ m, $z = 0.0$ m, $v_0 = 0.63$ m/s

Fig. 7 Comparison of the theory and the experiment for the collision between steel sphere A and steel sphere B ($r_A = 20.0$ mm, $r_B = 20.0$ mm)

0.3 m, $z = 0.0$ m とした場合に対する結果、図 7 (c) は測定位置 $x = 0.1$ m, $y = 0.3$ m, $z = 0.0$ m とした場合の結果を示している。以上の図中、実線が本解析結果、破線が実験結果を示している。解析結果と実験結果はどの条件の場合にもよく一致しており、本解析結果が有効であることがわかる。また、図 7 (a), (b) を見ると遅れて到達する剛体壁からの反射波の影響が波形の後半部分に現れていることが明確に確認できる。

3・4 球と立方体の衝撃音の解析 次に、本解析手法により任意形状の固体同士の衝突音が解析可能であることを示すため、半無限空間において鋼球が鋼の立方体を衝撃した際に発生する音圧に関しても解析を

行い実験結果との比較を行った。球、立方体および壁の配置は図8(a), (b)に示す二つの場合を考えた。図8(a)は剛体壁に対して垂直な方向で球を立方体に衝突させた場合、図8(b)は剛体壁と平行な方向で球を立方体に衝突させた場合を示している。なお、いずれの場合も衝突時の球の速度を $v_0=0.63$ m/s とし、球の半径を $r=20$ mm、立方体の一辺を $h=40$ mm としている。境界表面の分割方法、および数値 L^+ 変換における時間点数は、それぞれ収束性を考慮して節点数 459、要素数 912 および時間点数 256 とした。境界要素の分割方法を図9に示す。この場合、球の衝突方向に垂直な立方体の面の各辺に存在する節点には二重節点を置いている。発生する音圧の座標点 (x, y, z)

Fig. 8

Fig. 9 Method of boundary division

における時間変動について、解析結果と実験結果を比較したのが図10, 11である。図10(a)は図8(a)に示す条件により $x=0.35$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m の位置で測定した場合に対する結果、図10(b)は測定地点を $x=0.5$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m とした場合に対する結果、図10(c)は測定位置 $x=0.1$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m とした場合の結果を示している。また、図11(a)は図8(b)に示す条件により $x=0.165$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m の位置で測定した場合に対する結果、図11(b)は測定地点を $x=0.5$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m とした場合に対する結果、図11(c)は測定位置 $x=0.165$ m, $y=-0.5$ m, $z=0.0$ m とした場合の結果

(a) $x=0.35$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m, $v_0=0.63$ m/s (b) $x=0.5$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m, $v_0=0.63$ m/s (c) $x=0.1$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m, $v_0=0.63$ m/s

Fig. 10 Comparison of the theory and the experiment for the collision between a steel cube and a steel sphere ($r=20.0$ mm, $h=40.0$ mm)

(a) $x=0.165$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m, $v_0=0.63$ m/s (b) $x=0.5$ m, $y=0.5$ m, $z=0.0$ m, $v_0=0.63$ m/s (c) $x=0.165$ m, $y=-0.5$ m, $z=0.0$ m, $v_0=0.63$ m/sFig. 11 Comparison of the theory and the experiment for the collision between a steel cube and a steel sphere ($r=20.0$ mm, $h=40.0$ mm)

を示している。3・3節の球と球の場合と同様に、解析結果と実験結果はいずれの場合にもよく一致しており本解析結果が有効であることがわかる。

3・5 剛体壁を有限平面で近似した解析 最後に剛体壁を有限平面で近似し式(5)の基本解を用いて解析した結果と本解析手法による計算結果の比較を行った。解析条件は図5に示すように鋼球Aが鋼球Bへ剛体壁に対して垂直な方向で衝突する場合を考えた。ただし衝突速度は $v_0=1.2$ m/s として解析を行った。なお、球A、球Bの半径はともに20 mmとした。また、有限平面は一辺が0.4 mの正方形で、収束性を考慮して節点数441、要素数1600とした。計算結果を

$x=0.35$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m, $v_0=1.2$ m/sFig. 12 Comparison of the theories for the collision between steel sphere A and steel sphere B ($r_A=20.0$ mm, $r_B=20.0$ mm)

図12に示す。なお、グラフの実線(Infinite P.)は本解析手法を用いた結果を表し、丸印(Finite P.)は有限平面近似した結果を表している。これより有限平面近似を行っても半無限空間のよい近似解が得られることが示されたが上記のように有限平面の節点数、要素数は膨大となり同一の計算機を用いた場合、本解析手法と比較して10倍以上の計算時間を要した。以上から、本手法により効率よく精度の高い解が得られることが示された。

4. 結 言

本研究では、半無限空間での固体同士の衝突に伴う過渡衝撃音に対し、境界要素法に基づき剛体壁での境界条件を満たす基本解を導入することによりはんだ的な解析プログラムの開発を行った。これに基づき、半無限空間での鋼球と鋼球の衝突、鋼球と鋼の立方体の衝突によって発生する過渡衝撃音の解析を行い、実験結果との比較を行った。その結果、解析結果と実験結果はよく一致しており、本解析手法の有効性を確認した。

文 献

- (1) Akay, A. and Latcha, M., *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**-2 (1983), 640-648.
- (2) Takahagi, T., ほか2名, *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, **1**-2 (1980), 121-132.
- (3) 遠藤満・ほか3名, 機論, **44**-377 (1978), 38-46.
- (4) 五十嵐昭男・相本豊賀, 機論, **50**-458, C (1984), 1799-1806.
- (5) Akay, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**-4 (1978), 977-987.
- (6) 中川紀寿・ほか2名, 機論, **51**-467, C (1985), 1786-1792.
- (7) 中川紀寿・ほか2名, 機論, **54**-500, C (1988), 866-873.
- (8) 遠藤満・古坂敬太, 機論, **55**-513, C (1989), 1248-1253.
- (9) 田中正隆・増田佳文, 機論, **53**-486, C (1985), 387-391.
- (10) 伊藤宏幸・ほか2名, 境界要素法論文集3, (1986), 163-

- 168.
(11) 齋藤俊・ほか2名, 機論, 57-536, C (1991), 1413-1418.	(14) Krings, W. and Waller, H., <i>Int. J. Num. Meth. Eng.</i> , 14 (1979), 1183-1196.
(12) 西垣勉・ほか2名, 機論, 61-585, C (1995), 1924-1929.	(15) Goldsmith, W., <i>Impact</i> , (1960), 82, Edward Arnold.
(13) 田中正隆・田中道彦, 境界要素法の基礎, (1984), 89, 培風館.	
-