多孔板のCNCインクリメンタル張出し成形*

北澤 君 義^{*1}, 林 真太郎^{*2}

CNC Incremental Stretch-Expanding of Perforated Plates

Kimiyooshi KITAZAWA and Shintaro HAYASHI

The process of CNC incremental forming in which a blank is formed to fit on a tool-envelope surface made by relative motion of a tool around the blank, has the advantage of not only adapting to small-lot production of thin shell parts but also improvement of the forming limit by preventing plastic localization, such as necking and subsequent fracture. Although many cases in which plastic localization on the process is prevented have been reported, most of these are based on solid sheet (sheet metal without holes) alone. Here we report the possibility of CNC incremental stretch-expanding of perforated plates so as to clarify the effect. Aluminum sheets perforated with a periodic equilateral triangular pattern of circular holes were stretch-expanded to conical shells with various half-apex angles, α , and the deformation behavior was examined experimentally. It was found that when α is larger than about 45° , conical shells can be formed from a perforated plate by means of the process with a single tool-path, despite containing the necking around the holes. Furthermore, experimental results showed that the global deformation modes of the perforated plate are similar to those of the solid sheet, because the strain distributions at the center of the ligament were approximately equal to those obtained from the Sine law. The necking pattern found in the process can be explained on the basis of the geometrical relationship between the global deformation mode and the array of holes.

Key Words: Plastic Forming, Formability, Flexible Manufacturing System, Perforated Plate, CNC Incremental Forming, Stretch Expanding, Conical Shell, Sine Law

1. 緒言

薄板塑性加工の多品種少量生産化への対応を可能にする成形法としてCNCインクリメンタル張出し成形が注目されている。この成形法では、薄板に対する工具の相対的な運動により創成される工具包絡面形状に薄板を張出し成形するため、工具の運動を制御するだけで薄板を自在な形状に張出し成形することができる。いままでに、薄板を様々な形状に張出し成形できることが実験的に明らかにされており^{(1)~(9)}、成形限界の向上⁽¹⁰⁾、メタルフロー制御の可能性⁽¹¹⁾なども指摘されはじめている。

さて、CNCインクリメンタル張出し成形では、薄板にひずみが逐次与えられるため、ひずみ集中の回避が可能になるものと思われる。このため、プレス張出し成形においてひずみ集中が発生しやすい、多孔板、溶接板などの幾何的あるいは材質的な不連続部・不均一部を有する薄板の張出し成形に、この成形法が威力を発揮するものと思われる。ところで、孔の無い通常の薄板を円すい台形状に1パスでCNCインクリメンタル張出し成形すると、円すい台側壁の肉厚分布が一定な値になり、ひずみ集中が回避されることが知られている。もし、多孔板に対してもひずみ集中の回避効果が存在するのであれば、多孔板の自在張出し成形へ

の可能性が新たに開けるものと思われる。多孔板のプレス成形に関しては、電気カミソリのブレードキャップ、カラーテレビのシャドーマスクなどへの応用が行われているものの、孔縁へのひずみ集中に起因したくびれ発生など多孔板の成形に特有な課題も多い。さらに、多孔板および円孔を有する材料の変形に関しては、引張変形挙動など^{(12)~(16)}に関する報告が見あたる程度であり、そのCNCインクリメンタル張出し成形については、可能性を含めてほとんど検討されていない。

そこで本研究では、孔の無い薄板の場合にひずみ集中抑止効果が最も簡便な形で表われる円すい台状1パス張出し成形を取り上げ、多孔板のCNCインクリメンタル張出し成形の可能性を実験的に検討する。まず、多孔板の1パス張出し成形限界について検討し、張出し成形の可能性を明らかにする。次に、孔の無い場合と基本変形モードを比較検討し、その結果をもとにひずみ集中抑止効果の存在を明らかにする。さらに、この基本変形モードと孔配置の幾何的な関係に着目し、成形限界を支配するくびれと破断の周期的な発生パターンを解明する。

2. 実験方法

2.1 試料薄板 表1に示す円孔配置条件でパンチングされた市販の半硬質アルミニウム薄板(JIS A1100-1/2H, 板厚1.0mm)を150mm×150mmの正形状に切断し、試料薄板として用いた。また、この

* 原稿受付 1996年12月16日。

*1 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

*2 学生員, 信州大学大学院。

Table 1 Diameter of circular holes, perforation pitch and ligament efficiency of sheets perforated with a periodic equilateral triangular pattern of circular holes.

ϕd (mm)	p (mm)	ζ (%)	
1.0	2.0	41	
1.5	3.0	48	
2.0	3.5	50	

d : Hole diameter, p : Hole pitch, ζ : Ligament efficiency ($\zeta = h/p \times 100$), L : Longitudinal (rolling) direction, T : Tangential direction.

試料薄板に350℃ 1時間の焼きなまし処理を施して得られた軟質材も実験に用いた。さらに、パンチング前（円孔を有しない状態）の半硬質アルミニウム薄板（JISA1100-1/2H、板厚1.0mm）を150mm×150mmの正形状に切断し、比較実験に用いた。また、この薄板に350℃ 1時間の焼きなまし処理を施して得られた軟質材も比較実験に用いた。このパンチングを施す前の試料薄板の機械的性質を表2に示す。

2・2 CNCインクリメンタル成形機

実験に用いたCNCインクリメンタル成形機の外観を図1に示す。この成形機は、回転する薄板の半径方向（ R 軸）と回転軸方向（ Z 軸）へ棒状工具を移動させることができ、さらに RZ 面内（ ϕ 軸）で棒状工具を傾斜させることができる3自由度のパソコン制御成形機である。この成形では、薄板を一定回転数で回転させ、棒状工具を R 軸方向と Z 軸方向に移動させながら薄板に押し込む。このとき、薄板に対して棒状工具の描く相対的な工具包絡面の形状に薄板が張出し成形される。このため、棒状工具の運動を制御するだけで、薄板のフレキシブルな張出し成形が可能となる。

2・3 成形条件

本研究では、図2に示す1パスの工具パススケジュールで多孔板を円すい台形状に張出し成形した。ここでは、円すい台の底面半径を40mm、半頂角 α を15°、20°、25°、30°、35°、40°、45°、60°、75°の各値に設定した。また、比較のため、パンチングを施す前のアルミニウム薄板も、同様の1パスの工具パススケジュールで張出し成形した。

実験には、先端が半球状になった直径10mmの棒状工具を用い、その移動速度 V を0.7mm/sに、傾斜角 ϕ を0°（成形前の薄板面に対して棒状工具を垂直に配置）に設定した。また、薄板の回転数 N を300rpm一定とし、潤滑剤としてペースト状の二硫化モリブデンを用い、これを薄板と棒状工具の双方に塗布した。

Table 2 Mechanical properties of materials used.

Materials (JIS)	t_0 (mm)	σ_Y (MPa)	n	C (MPa)	σ_B (MPa)
Hard aluminum (A1100-1/2H)	1.0	130	0.07	186	150
Soft aluminum (A1100-O)	1.0	25	0.28	178	118

σ_Y : Yield stress, $\sigma = C \varepsilon^n$, n : Work-hardening exponent, σ_B : Tensile strength, t_0 : Initial thickness

Fig.1 Conical stretch-expanding of perforated plate by CNC incremental forming machine.

Fig.2 A tool-path schedule for conical stretch-expanding of perforated plates.

2・4 ひずみの測定法

成形の進展に伴い、孔縁からくびれが発生すると、孔縁およびくびれ部の肉厚は不均一となり、肉厚測定は困難を極めるものと思われる。そこで、くびれの発生しない場所として、図3に示すように隣接する3つの円孔の接線によって作られる三角形領域内の図心 G に着目し、このひずみ履歴について検討することにした。同図(a)に示すように、成形前に多孔板の回転中心軸から図心 G までの半径 r_0 をデジタル工具顕微鏡で測定した。また、同図(b)に示すように、成形後に多孔板の回転中心軸から図心 G までの半径 r を同様にデジタル工具顕微鏡で測定し

Fig.3 Geometry of before and after deformation.

た. さらに, 成形後の多孔板の図心 G の肉厚 t をデジタルポイントマイクロメーターで測定した. このようにして得られた図心 G における成形前の半径 r_0 と成形後の半径 r , および成形前の板厚 t_0 と成形後の肉厚 t を用いて, 円周方向ひずみ $\varepsilon_\theta (= \log_e(r/r_0))$ と肉厚ひずみ $\varepsilon_t (= \log_e(t/t_0))$ を求め, 体積一定の関係 ($\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta + \varepsilon_t = 0$) から子午線方向ひずみ ε_r を求めた. ここでは, 成形前後の半径を測定するために, 成形前の薄板の各図心 G に野描き線を施した. ところで, 各図心の肉厚は野描き線の影響を受ける. そこで, 別途, 野描き線を施さない多孔板の円すい台状張出し成形を行い, 各図心近傍領域内 (例えば穴径 2 mm の多孔板の場合は図心を中心とした直径約 0.8 mm の円内) の肉厚を図心の肉厚の推定値として用いた. なお, この図心近傍領域内の肉厚がほぼ一定 (肉厚ひずみに換算して約 1.0% 以内の変動) になることを別途確認している.

3. 張出し成形挙動

3.1 張出し成形の可能性 多孔板を 1 パスで円すい台形状に張出し成形した結果を図 4 に示す. 同図 (a) に示すように, 穴径 2.0 mm の多孔板では半頂角 α を 30° に設定して円すい台形状の張出し成形を行った場合, 成形初期段階で破断状態に至った. しかし, α が 45° の条件では, 同図 (b) に示すように孔縁にくびれを伴うものの, 破断は発生せず, 円すい台形状の張出し成形が可能であった. このように実験結果は, 特定の α を境にして成形可能な領域と破断を生じる領域

Fig.4 Pictures of failed and unfaild conical-shell products (Half-hard aluminum, $d=2.0\text{mm}$).

に別れた. そこで, 半硬質材と軟質材の成形限界を α で整理した結果をそれぞれ表 3 と表 4 に示す. 表 3 に示すように穴径が 1.0 mm および 2.0 mm の半硬質の多孔板では, α を 40° 以下に設定して円すい台状張出し成形を行うと破断が発生した. しかし, α を 45° 以上の条件に設定すると破断は発生せず, 張出し成形が可能になった. 穴径が 1.5 mm の半硬質材の多孔板では, α が 40° 以上の条件で円すい台状張出し成形が可能であった. 一方, 孔の無い半硬質材の場合には, α が 25° 以上の条件で円すい台状張出し成形が可能であった. また, 表 4 に示すように, 穴径が 1.0 mm および 2.0 mm の軟質の多孔板では, α を 35° 以下に設定して円すい台状張出し成形を行うと破断が発生した. しかし, α が 40° 以上の条件になると破断は発生せず, 張出し成形が可能になった. 穴径が 1.5 mm の軟質の多孔板では, α が 35° 以上の条件で円すい台状張出し成形が可能であった. 一方, 孔の無い軟質材の場合には, α が 20° 以上の条件で円すい台状張出し成形が可能であった.

従って, 多孔板の成形性は孔の無い通常の薄板より劣るものの, CNC インクリメンタルフォーミングにより, 多孔板を円すい台形状に張出し成形できることが初めて明らかになった.

3.2 くびれ挙動 上述のように, 成形が可能な場合においても, 各孔縁に若干のくびれを伴った. そこで, 図 5 に示すように円すい台形状に張出し成形された多孔板の圧延方向から角 θ の位置における孔縁の

Table 3 Recommended working zone for CNC incremental stretch-expanding of conical-shells (Half-hard aluminum).

Sheet	ϕ d (mm)	Half-apex angle of conical shells α (°)				
		0	20	40	60	80
Solid sheet	0		●	○ ○	○	○
Perforated sheet	1.0		●	● ○	○	○
	1.5		●	● ○ ○	○	○
	2.0		●	● ○	○	○

d: Diameter of circular holes, ○: Successes, ●: Rupture

Table 4 Recommended working zone for CNC incremental stretch-expanding of conical-shells (Soft aluminum).

Sheet	ϕ d (mm)	Half-apex angle of conical shells α (°)				
		0	20	40	60	80
Solid sheet	0		●	○ ○ ○	○	○
Perforated sheet	1.0		●	● ○ ○	○	○
	1.5		●	○ ○ ○	○	○
	2.0		●	● ○ ○	○	○

d: Diameter of circular holes, ○: Successes, ●: Rupture

くびれパターンについて検討した。まず、同図(a)に示すように、 $\theta=0^\circ$ の位置にある孔形状は、子午線方向に長円状に変形し、子午線(ϕ)方向から約 60° 傾いた方向に伝播するくびれパターンが観察された。次に同図(b)に示すように、 $\theta=30^\circ$ の位置にある孔形状は、ひし形状に変形し、円周(θ)方向に伝播するくびれパターンが観察された。そして、 $\theta=60^\circ$ の位置になると再び同図(a)のくびれパターンが現れ、 $\theta=90^\circ$ の位置になると、同図(b)のくびれパターンが再び現れた。さらに、 $\theta=120^\circ$ の位置では、再び同図(a)のくびれパターンが現れ、 $\theta=150^\circ$ の位置では、再び同図(b)のくびれパターンが現れた。また、いずれの θ においても同一子午線方向には、同じくびれパターンが発生した。このように、孔形状には円周方向へ 60° の周期性を有するくびれパターンが発生した。

4. 張出し変形機構

4.1 問題点の整理 上述のように、多孔板を1パスで円すい台形状に張出し成形できることが明らかになった。しかも、孔縁にはくびれの発生を伴うものの、このくびれパターンは円周方向に周期性を有し、同一子午線方向ではいずれの孔縁においてもほぼ均一にくびれた状態になった。これは、各孔縁にくびれが分散され、しかも、各孔縁でくびれの成長が抑止されるために、くびれが子午線方向の特定な場所に集中しないことを示唆している。この効果は、くびれ(成長)抑止効果にほかならない。もし、孔の無い薄板と同様な理由でくびれ抑止効果が発現するのであれば、少なくとも、孔の無い場合と変形モードが一致するはずである。また、この変形モードの存在が明らかになれば、孔縁のくびれパターンの発生機構の解明が可能になるものと思われる。ところで、孔の無い通常の薄板の1

Fig.5 Necking patterns found in the process.

パス張出し成形では、円周方向ひずみ ε_θ が零となる状況下で子午線方向の引張り変形により円すい台形状に変形するため、円すい台側壁の肉厚が一定厚になることが知られている。上述の実験結果からは、多孔板の場合も同様な変形モードが基本変形モード(大域的な変形モード)になっているものと推察される。そこで、以下では、この点に着目して変形機構を探る。

4.2 基本変形モード 多孔板の円すい台状張出し成形品の $\theta=60^\circ$ の位置の側壁の図心近傍の肉厚の測定結果を図6に示す(単位はmm)。くびれ部と図心近傍の肉厚の値は著しく異っている。しかし、図心近傍領域内(この穴径2.0mmの多孔板の場合は図心を中心とした直径約0.8mmの円内、図心はG)では、ほぼ一定厚(肉厚ひずみに換算して約1.0%以内)とな

Fig. 6 Thickness distribution of a unit cell (Half-hard aluminum, $d=2.0\text{mm}$, $\alpha=45^\circ$, $\theta=60^\circ$).

った。なお、この傾向については、円すい台側壁の全領域にわたって確認した。

さて、多孔板の円すい台状張出し成形品の側壁の各図心における円周方向ひずみ ε_θ 、子午線方向ひずみ ε_ϕ 、肉厚ひずみ ε_t を図 7 に示す。同図中に示すように、 ε_t はサイン則⁽⁸⁾⁽¹⁷⁾の値より大きく、 ε_ϕ はサイン則の値より小さいものの、 ε_θ はサイン則の値($\varepsilon_\theta = 0$)とほぼ一致した。ところで、孔の無い場合にはサイン則に従った変形となる⁽⁸⁾。このためサイン則の観点から、多孔板の変形モードと孔の無い通常の薄板の変形モードを比較することができる。さて $\varepsilon_\theta = 0$ の関係が成立する変形モードは、サイン則が成立する場合の特徴的な変形モードであり、子午線方向の引張り変形が主となる環境下で変形していることを意味している。従って、多孔板の円すい台状 1 パス張出し成形では、第 1 近似として、孔の無い場合⁽⁸⁾と同様にサイン則が成立する変形モードがその基本変形モードになっているものと考えられる。

ところで、図 8 に示すように、図心の肉厚は円すい台半頂角 α が小さくなるに従い、サイン則から求まる値よりも大きくなった。このため、肉厚にのみ着目すると、変形モードはサイン則が成立する場合と大きく異なるように見える。しかし、上述のように、円周方向ひずみに着目すると、この場合にも各図心でサイン則が成立しており、孔の無い場合と同じ変形モードで変形していた。 α が大きくなると図心の肉厚がサイン則の値に近づくのは、 α が大きくなるとサイン則からも明らかなように子午線方向の引張り変形が小さくなるため、孔縁のくびれが小さくなり、くびれ部の肉厚

Fig. 7 Comparison of the strains at the center of each ligament, ε_θ , ε_ϕ , ε_t and those obtained from the sine law (Half-hard aluminum, $d=2.0\text{mm}$, $\alpha=45^\circ$).

Fig. 8 Thickness at the center of each ligament of conical-shell stretch expanded, and those obtained from the sine law (Half-hard aluminum, $d=2.0\text{mm}$, $\theta=0^\circ$, $R \approx 26\text{mm}$)

が図心の肉厚に近づくためと考えられる。このサイン則に従った基本変形モードは、円すい台側壁のいたるところ全ての各図心において成立していた。

従って、局所的なくびれを伴った状況下で、サイン則に従った基本変形モード（大域的な変形モード）で変形している。すなわち、孔の無い薄板と同じ変形機構でひずみが逐次与えられるため、円すい台側壁の肉厚が均一化する。このため、多孔板の場合も孔の無い薄板と同様に子午線方向の特定な場所にひずみが集中

Fig.9 Geometrical relationship between the global deformation mode and array of holes, to explain the necking patterns found in the process.

しにくい状況下で成形が進展するものと考えられる。

4.3 くびれパターン発生機構 破断は、くびれに沿って発生し、しかも、くびれと同様に円周方向に 60° の周期性(円すい台を上から見ると六角形の破断伝播軌跡)を有していた。このように破断パターンがくびれパターンと一致していた。ここで明らかにした基本変形モードに着目した観点から、円周方向に 60° の周期で変化するくびれパターン(前述の図5)発生挙動が説明できるものと思われる。

さて、上述のように子午線方向への引張り変形が主となる環境下で円すい台形状が成形されていた。この引張り変形の方角と円孔配置条件に着目すると、 $\theta = 0^\circ$ と 60° の位置では図9(a)に示すように、子午線方向に対して 60° 傾いた方向へくびれが入るモードAのくびれパターンの発生が予想される。また、 $\theta = 30^\circ$ と 90° の位置では同図(b)に示すように、円周方向へくびれが入るモードBのくびれパターンの発生が予想される。しかも、これら2つのパターンは円周方向に 60° の周期で繰り返し発生するはずである。一方、上述の図5に示した実験結果によると、 $\theta = 0^\circ$ と 60° の位置では子午線方向に対して 60° 傾いた方向へくびれが入り、 $\theta = 30^\circ$ と 90° の位置では子午線方向に垂直な方向へくびれが入った。また、これらのくびれパターンは 60° の周期で繰り返し発生していた。従って、ここで推論された結果は、上述の実験結果と一致する。

このように、円周方向への周期性を有するくびれ現象の発生挙動は、基本変形モード(大域的な変形モード)と孔配置条件という幾何的な関係に着目することにより説明することができる。

5. 結言

本研究では、多孔板のCNCインクリメンタル張出し成形の可能性を探る目的でアルミニウム多孔板の1パス円すい台状張出し成形を行い、以下の結果を得た。(1) 半硬質の多孔板では、半頂角 α が約 40° 以下の条件で成形初期に孔縁部から円周方向に伝播する割れが発生した。しかし、 α が 45° 以上の条件になると、孔縁にくびれを伴うものの、破断は発生せず、円すい台形状の張出し成形が可能であった。また、軟質の多孔板の場合も同様に α が約 40° 以上の条件で円すい台形状の張出し成形が可能であった。このように、半頂角 α を適切な値に選択することにより、1パスで円すい台形状に張出し成形できることが初めて明らかになった。なお、多孔板のCNCインクリメンタル張出し成形の成形性は孔の無い通常の薄板より劣る。

(2) 孔縁には円周方向へ 60° の周期を有するくびれパターンが発生した。また、同一子午線方向ではいずれの孔縁においても同一のくびれパターンが発生した。このように、各孔縁にくびれが分散され、くびれが子午線方向の特定な場所に集中しない状況下で成形が進展した。

(3) 円すい台側壁の各図心の肉厚ひずみと子午線方向ひずみはサイン則から予想される値と大きく異なるものの、円周方向ひずみ ε_θ はサイン則の値と一致した。従って、局所的なくびれを伴った状況下で、孔の無い薄板と同じサイン則に従った基本変形モード(大域的な変形モード)で変形していることが初めて明らかになった。すなわち、孔の無い薄板と同じ変形機構でひずみが逐次与えられるため、円すい台側壁の肉厚が均一化する。このため、多孔板の場合も孔の無い薄板と同様に子午線方向の特定な場所にひずみが集中しにくい状況下で成形が進展するものと考えられる。

(4) 破断はくびれに沿って発生し、しかも、くびれと同様に円周方向に 60° の周期性を有していた。周期的なくびれパターンの発生機構は、基本変形モード(大域的な変形モード)と孔配置条件に着目した幾何的な関係により説明することができる。

参考文献

- (1) 北澤君義：知能化インクリメンタルフォーミング，日本塑性加工学会第168回塑性加工シンポジウムテキスト，(1996)，67-73。
- (2) 北澤君義，若林昭彦，村田和也，清野次郎：反転プロセスによる鋭

- 凸部輪郭製品のCNCインクリメンタル張出し成形, 塑性と加工, **35**-406 (1994), 1348-1353.
- (3) 井関日出男, 加藤和典, 坂本誠一郎: ボールローラーによるフレキシブルな逐次張出し成形に関する研究, 日本機械学会論文集C編, **58**-554 (1992), 3147-3155.
- (4) 井関日出男, 加藤和典, 久門統, 尾崎一雄: 複数ボールローラーによるフレキシブルな逐次張出し成形に関する研究, 日本機械学会論文集C編, **59**-565 (1993), 2849-2854.
- (5) 松原茂夫: 数値制御逐次成形法, 塑性と加工, **35**-406 (1994), 1258-1263.
- (6) 松原茂夫: 半球頭工具による薄板の逐次逆張出し成形, 塑性と加工, **35**-406 (1994), 1311-1316.
- (7) 北澤君義, 林真太郎, 山崎純生: 2パス法によるアルミニウム薄板のCNCインクリメンタル半球面状張出し成形, 軽金属, **46**-5 (1996), 219-224.
- (8) 北澤君義, 尾角勉: 1パス法による薄板のCNCインクリメンタル張出し成形の可能性, 日本機械学会論文集C編, **62**-597 (1996), 2012-2017.
- (9) 北澤君義, 中島明: 薄板のCNCインクリメンタル円筒状張出し成形, 日本機械学会論文集C編, **62**-597 (1996), 2018-2024.
- (10) 北澤君義, 若林昭彦, 村田和也, 八重島公郎: アルミニウム薄板のCNCインクリメンタル張出し成形におけるメタルフロー挙動, 軽金属, **46**-2 (1996), 65-70.
- (11) Kitazawa, K.: Incremental Sheet Metal Stretch-Expanding with CNC Machine Tools, Proc. 4th ICTP, (1993), 1899-1904.
- (12) Winnicki, L., Kwiecinski, M., and Kleber, M.: Numerical Limit Analysis of Perforated Plates, Int. J. Numer. Methods Eng., **11**-3(1977), 553-561.
- (13) Needeman, A.: Void Growth in an Elastic-Plastic Medium, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **39**-4 (1972), 964-970.
- (14) O'Donnell, W.J., and Porowski, J.: Yield Surfaces for Perforated Materials, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **40**-1(1973), 263-270.
- (15) Jones, D.P., and Gordon, J.L.: Elasto-Plastic Analysis of Perforated Plates Containing Triangular Penetration Patterns of 10 Percent Ligament Efficiency, Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol., **101**-3 (1979), 210-215.
- (16) 井関日出男, 室田忠雄, 加藤和典: 多数の円孔を持つ薄板の引張り変形挙動の数値シミュレーション, 塑性と加工, **30**-337 (1989), 304-311.
- (17) Kalpakcioglu, S.: On The Mechanics of Shear Spinning, Trans. ASME J. Engineering for Industry, **83**-2 (1961), 125-130.