粒状体の振動輸送に関する研究*

佐伯 暢人^{*1}, 皆川 利宣^{*2}, 高野 英資^{*3}

Study on Vibration Conveyance of Granular Materials

Masato SAEKI, Toshinori MINAGAWA and Eisuke TAKANO

The flow of granular materials on the vibratory conveyor is studied both experimentally and analytically. The vibratory conveyor consists essentially of a near-horizontal conveying vessel which is undergoing translational harmonic vibrations in a direction to the horizontal. The motion of individual particles contacting each other is solved by the discrete element method proposed by Cundall. The Normal component of the contact force acting on particle is firstly given by the sum of the forces due to the spring and the dash-pot. Then, the tangential component of the contact force applies the Coulomb law of friction. It is shown that the mean velocity of transport of granular materials depends on the frequency and amplitude of the vibratory input as well as various physical parameters. Also, the numerically observed flow properties agree quantitatively with experimental results.

Key Words: Frictional Vibration, Numerical Analysis, Vibratory Conveyor, Granular Materials, Discrete Element Method, Collision

1. 緒 言

振動面の上に物体を載せると、物体は振動面に対して相対すべりや跳躍運動を繰り返しながら一定の方向に輸送される。この輸送方法は振動輸送と呼ばれ、機械部品や原材料の輸送・供給装置としてきわめて広い分野で利用されている。振動輸送に関する研究は古くから行われ、谷口ら⁽¹⁾が輸送される物体の運動形態を分類し、岡部ら⁽²⁾は振動条件及び摩擦条件と運動形態との関係について論じている。これらの多くは、精密機器部品や電子部品のように品物を損傷せずに輸送する方式を対象としていることから、物体同士の衝突を考慮しない一質点の運動解析が行われてきた。それに対して、粒状の材料（以下、粒状体と呼ぶ）のような原材料を輸送・供給する振動輸送において、その輸送状態は非常に複雑な様相を呈する。この粒状体

の輸送挙動は粒子同士や粒子と輸送面が接触する時の摩擦や衝突などに大きく影響を受けるため、流体のような連続体の場合とは異なり、その解析は困難とされてきた。ところで、近年、地盤工学の分野では、Cundallら⁽³⁾により Discrete Element Method（以下、DEMと呼ぶ）なる数値計算法が開発され、岩盤や粒状体などの動力学の挙動解析が行われるようになってきた。この方法は個々の粒子を近似的に剛体とみなし、粒子同士が接触するときには仮想的なバネやダッシュポットを介して力が伝達されるものとして、個々の粒子の運動を解き、それらの積み重ねから集合体としての動力学の挙動を数値計算する手法である。そこで、本研究では、このDEMを円筒粒子から成る浅い層の粒状体の振動輸送解析に適用できるように改良し、振幅や振動数などの振動輸送を操作する変数が輸送に与える影響を計算する。さらに、実験との比較を行い、その妥当性を検討したので報告する。

2. 振動輸送

図1は振動輸送のモデル図である。図のように角度

* 原稿受付 1997年3月18日。

^{*1} 正員, 新潟工科大学(〒945-11 柏崎市藤橋1719)。

^{*2} 学生員, 新潟大学大学院(〒950-21 新潟市五十嵐2の町)。

^{*3} 正員, 新潟大学工学部。

α の傾きをもった振動容器を地面に対して角度 β の方向に正弦振動（振幅 a 、角振動数 ω ）をさせる。すると、振動容器上にある粒状体は相対すべりや跳躍運動を繰り返しながら輸送される。ここで、振動容器は粒状体の有無、輸送状態に関わらず一定の正弦振動を行うと仮定する。図のように、 $x-y$ 座標系を用いて、 t 時間後の振動容器の位置 X, Y を表すと式(1)のようになる。また、 i 番目粒子の位置を x_i, y_i で表すものとする。

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cdot \cos \beta \cdot \sin \omega t \\ Y &= a \cdot \sin \beta \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Fig. 1 Model of vibratory conveyor

3. 粒状体の運動解析

3.1 粒子の運動方程式 振動輸送中、粒状体は振動容器や他の粒子との摩擦や衝突を繰り返しながら輸送される。したがって、すべての粒子について、接触する他の粒子や容器からの摩擦や衝突を考慮した運動方程式をたてる必要があり、それらを積分することにより、粒子群全体の挙動を求めることができる。

通常、粒状体は様々な形状の粒子から構成されるが、本研究では、解析を容易にするために粒状体を構成する各粒子を密度や粒径が均一な円筒粒子とし、浅い層の2次元モデルによって粒状体の振動輸送解析を行う。さらに、粒子間の付着力が無視できるとすれば、 i 番目の粒子の運動方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_i &= F_{xi} \\ m\ddot{y}_i &= F_{yi} - mg \\ I\ddot{\theta}_i &= T_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、均一な粒状体の質量を m 、慣性モーメントを I とし、重力加速度を g とする。また、 x_i, y_i, θ_i はそれぞれ i 番目粒子の t 時間後の x, y 座標並びに回転角を示し、 F_{xi}, F_{yi} は周辺の各接触粒子から i 番目粒子に働く接触力などの x, y 方向分力の総和であり、 T_i はこれらによる紙面に垂直な軸線回りのモーメントの

総和を示す。ドットは時間による微分を示す。以下に、粒子に働く接触力の求め方とそれらを F_{xi}, F_{yi}, T_i へ変換する方法について考える。

3.2 衝突時の法線方向力と接線力 図2は i, j 番目の粒子が衝突または接触する様子を表している（以下、簡単のため、衝突と称する）。ここで、 $P_i(x_i, y_i), P_j(x_j, y_j)$ はそれぞれ、 i, j 番目粒子の中心位置を示す。今、図に示すように、粒子が他の粒子や振動容器に衝突する時に作用する力を法線方向の成分 f_N と接線方向の成分 f_T に分けて考える。さらに、 f_N を弾性変形による反発力 P_N と粘性減衰力の和として定義する。また、 f_T については簡単のため、クーロンの摩擦力を用いて表すと、それらは次のように与えられる。

$$f_N = P_N + c_N \dot{\delta}_N \quad (3)$$

$$f_T = -\mu f_N \dot{\delta}_T / |\dot{\delta}_T| \quad (4)$$

$$\dot{\delta}_N = (u_i - u_j) \cos \phi_{ij} + (v_i - v_j) \sin \phi_{ij} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_T &= -(u_i - u_j) \sin \phi_{ij} + (v_i - v_j) \cos \phi_{ij} \\ &\quad + r(\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_j) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\delta_N = 2r - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (7)$$

$$\sin \phi_{ij} = (y_j - y_i) / \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (8)$$

ただし、 $\delta_N < 0$ のときは、 $f_N = f_T = 0$ とする。

ここで、添え字 N, T はそれぞれ法線方向及び接線方向を表し、 u_i, u_j はそれぞれ i, j 番目の粒子の x 方向の速度、 v_i, v_j は y 方向の速度を表している。また、 δ ：変位量、 C_N ：粘性減衰係数、 μ ：摩擦係数（粒子同士及び粒子と振動容器の摩擦係数を含める）を示すものとする。

3.3 ばね定数と粘性減衰係数 式(3)中におい

Fig. 2 Contact force

て、弾性変形による反発力 P_N は、弾性円柱の接触理論⁽⁴⁾によれば、法線方向の変位量 δ_N との間に次のような関係が成り立つ。

$$P_N = k_N \delta_N \quad (9)$$

ここで、 k_N は法線方向のばね定数を示し、円筒粒子同士が衝突する場合や円筒粒子が振動容器と衝突する場合には、それぞれ、 P_N 、 δ_N を後述する P と δ または P_I と δ_I に替えて求めることができる。寸法、材質が同じ円筒粒子同士の衝突においては、ヤング率 E 、ポアソン比 ν 、直径 D 、長さ L の円柱同士を荷重 P で圧縮した場合における、両中心の接近量 δ と接触幅 b は次式で示される。

$$b = \sqrt{2DP(1-\nu^2)/(\pi LE)} \quad (10)$$

$$\delta = \frac{2P}{\pi L} \frac{1-\nu^2}{E} \left(1.8864 + \ln \frac{L}{2b} \right) \quad (11)$$

また、円筒粒子が振動容器に衝突する場合には、前述の弾性円柱とヤング率 E_I 、ポアソン比 ν_I の弾性板が荷重 P_I で圧縮されるときにの接近量 δ_I と接触幅 b_I は次式で与えられる。

$$b_I = \sqrt{\frac{2DP_I}{\pi L} \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_I^2}{E_I} \right)} \quad (12)$$

$$\delta_I = \frac{P_I}{\pi L} \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_I^2}{E_I} \right) \left(1.8864 + \ln \frac{L}{2b_I} \right) \quad (13)$$

ここで、弾性円柱の接触理論式(10)～(13)が、円筒粒子や振動容器が衝突する場合に成り立つものと仮定し、さらに、法線方向の変形量 δ_N を接近量 δ または δ_I と等しいとすると、 δ_N と P_N の関係は、図3のようになる。ここで、使用した材料定数は後述する実験条件と同一のものであり、円筒粒子はアクリル材（ヤング率 $E=300\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.32$ 、 $D=16 \times 10^{-3}\text{m}$ 、長さ $8 \times 10^{-2}\text{m}$ ）とし、振動容器を鋼製（ヤング率 $E_I=206\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu_I=0.3$ ）とした。なお、図中において、実線は、 δ_N と P_N の関係を近似した直線である。図3から P_N は δ_N に対してほぼ正比例の関係にあり、式(9)を用いれば、その関係を十分満足することができることがわかる。したがって、ばね定数 k_N は、各近似直線の勾配によって与えられる。

次に、衝突時のエネルギー減衰として仮定した粘性減衰力について考える。今、粒子が他の粒子や振動容器に衝突する時、衝突直前から終了までの瞬間の様子が粘性減衰振動の半周期で近似できるとすれば、粘性減衰係数 c_N は反発係数 e から次式のように与えられ

Fig. 3 The relation between the repulsive force and the normal displacement

る。

$$c_N = \frac{2\sqrt{m \cdot k_N}}{\sqrt{1 + (-\pi/\ln e)^2}} \quad (14)$$

なお、各粒子は輸送中、同時に複数の粒子や振動容器と衝突することもありうるが、本研究ではそういった場合についても k_N 、 c_N が式(9)、(14)によって定義できるものと仮定した。

3.4 すべり運動時の接触力 粒子は輸送中、他の粒子や振動容器と衝突するだけでなく、容器に対してすべり運動をすることもある。そこで、ここでは、容器上をすべり運動する粒子が容器から受ける接触力について考える。図4に示すように、容器上をすべり運動する粒子が容器から受ける接触力は垂直抗力 N と摩擦力 F である。粒子と振動容器との間の摩擦係数を μ_w とすれば、 F と N の間には次の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} P > \mu_w N &\text{のとき} & F &= \mu_w N \\ -\mu_w N \leq P \leq \mu_w N &\text{のとき} & F &= P \\ P < -\mu_w N &\text{のとき} & F &= -\mu_w N \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 P 、 N は粒子が容器上をすべることなく、容

Fig. 4 Relative motion of particle

器と一体となるときに容器から受ける最大静止摩擦力と垂直抗力を示し、式(16)のように与えられる。式(16)は $L_e = a \cdot \sin \omega t$ を用いて、粒子の運動方程式 $m\ddot{x} = F \cos \alpha - N \sin \alpha$ 、 $m\ddot{y} = F \sin \alpha + N \cos \alpha - mg$ を $x_0 - y_0$ 移動座標系に変換し、 $\dot{x}_0 = 0$ 、 $\dot{y}_0 = 0$ において求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} P &= m \{ g \sin \alpha - a \omega^2 \cos(\beta - \alpha) \sin \omega t \} \\ N &= m \{ g \cos \alpha - a \omega^2 \sin(\beta - \alpha) \sin \omega t \} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

また、接触力 F と N を式(2)で示した粒子の運動方程式に利用できるように、 x 、 y 方向に分解し、 x 、 y 方向の分力を F_{rx} 、 F_{ry} とすれば、これらは、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} F_{rx} &= F \cos \alpha - N \sin \alpha \\ F_{ry} &= F \sin \alpha + N \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3. 5 粒子に働く外力 次に、これらを式(2)中で示した接触力の x 、 y 方向成分 F_{xi} 、 F_{yi} と、中心回りのモーメント T_i に変換する方法について考える。図2に示すように、 i 番目の粒子に j 番目 ($j = 1 \sim n$) の粒子が接触するとき、 i 番目の粒子に働く接触力や容器から受ける接触力の x 、 y 方向分力の総和 F_{xi} 、 F_{yi} 及びこれら接触力の紙面に垂直な中心を通る軸線回りのモーメント T_i は、式(8)で示される接触角 ϕ_{ij} を用いると、次のように表される。ただし、注目する粒子が容器と接触しない場合には、式中の F_{xi} 、 F_{yi} 、 F を除いて計算することは言うまでもない。

$$\left. \begin{aligned} F_{xi} &= \sum_j (-f_n \cdot \cos \phi_{ij} - f_T \cdot \sin \phi_{ij}) + F_{rx} \\ F_{yi} &= \sum_j (-f_n \cdot \sin \phi_{ij} + f_T \cdot \cos \phi_{ij}) + F_{ry} \\ T_i &= r \cdot \left(\sum_j f_T + F \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. 6 解析手順 次に、本研究で用いた粒状体の振動輸送における解析手順について簡単に説明する。まず、一つの粒子に注目し、その粒子が受ける接触力を式(3)、(4)、(17)によって算出する。次に、それらを式(18)式により、 x 、 y 方向分力 F_{xi} 、 F_{yi} 及び中心回りのモーメント T_i に変換し、式(2)からその粒子の運動を解く。それをすべての粒子に対して繰り返すことによって、粒状体の輸送挙動を解析する。解析は前述した各粒子の運動方程式(2)をルンゲ・クッタ法に

より数値積分を行いながら進めた。その際、計算の時間増分 Δt の決定には特に注意を払った。それは、 Δt を大きくすると、計算は不安定となり、逆に Δt を小さくすると、計算は安定となる反面、計算時間が長くなるためである。したがって、解の収束性と安定性を考慮に入れて Δt を決定する必要があった。

4. 解析結果

表1には数値シミュレーションに用いた計算条件が示されており、これらは、後述する実験条件と同一である。ばね定数は前述した図3の直線の傾きから求めたものであり、摩擦係数はアクリル円筒と鋼製平板を用いて、それぞれの静止摩擦係数を計測して得た値である。また、反発係数については、自由落下試験を行った様子をビデオに録画し、画像処理装置を用いて、衝突前後の高さから算出した。いずれにおいても、温度、湿度を一定に保った部屋で計測した。

Table 1 Condition of calculation

Particle	
Total number	23, 36, 109
Diameter	16 mm
Length	80 mm
Spring constant	
Particle-Particle	5.8×10^6 N/m
Particle-Vessel	11.5×10^6 N/m
Coefficient of friction	
Particle-Particle	0.52
Particle-Vessel	0.25
Coefficient of restitution	
Particle-Particle	0.62
Particle-Vessel	0.76

Fig. 5 Effect of time step Δt

Fig. 6 Effect of period T

Fig. 7 Flow pattern (calculation)

通常、振動容器の傾き角 α は粒子がすべり落ちない摩擦角以下に設定されるが、本研究では $\alpha \neq 0$ でも転がり落ちる円筒粒子を用いているため、すべて $\alpha = 0$ について解析を行った。

図5は23個の円筒粒子が振動輸送される様子を数種の Δt を用いて算出し、 Δt が計算結果に与える影響を調べた図である。横軸には振動容器を振動させるときの振幅、縦軸には粒状体の平均輸送速度 V_m をとった。ここで、「平均輸送速度 V_m 」は設定した時間当たりに粒子が地面に対して水平方向に移動した距離を粒子の個数で割った値として定義した。また、設定した時間は後述する実験装置において、23個の粒子が振動容器内を移動できる最大限の時間1.155秒とした。図5を含めて、他の条件下の解析結果においても、 $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ sec}$ とすると収束性がよく、安定となることから、本研究ではすべての解析においてこの値を用いて計算を行った。

図6は縦横の両軸を図5と同じにとり、振動容器に与える周期 T や振幅 a が23個の粒子の輸送に与える影響を調べた図である。振幅 a を増大したり、周期 T を小さくすることにより、輸送速度 V_m は増大することがわかる。

図7は109個の円筒粒子を振動容器上に規則正しく並べ、容器を図中に示す条件で振動した場合に円筒粒子群が輸送される様子を計算により求めた結果の一例である。ここで、(b)は(a)に対して、振動の投射角 β を大きくした場合の結果であり、(c)は(a)に対して、周期 T を大きくした場合の結果である。時間の経過に伴って、規則正しくならべた粒子群がその形状を崩し、振動台上を左から右へと輸送される様子がよく理解できる。また、 β を大きくすることにより、粒状体が輸送されるというよりもはねる傾向が強くなるため、輸

Fig. 8 Experimental apparatus

Fig. 9 Comparison of experimental and calculated results

送能力が低下する様子がうかがえる。これは、 β を大きくすることにより、粒状体を上下に揺らす成分が大きくなるためであり容易に想像できる現象である。また、粒状体は移動時に波のような形を取りながら移動するが、周期 T を小さくすると、波の形状が進行方向に向かって形成され、輸送速度も増大している様子がわかる。粒状体の流動状態を示すこういった結果はDEM解析の最大の利点であり、従来の一質点による振動輸送解析では得られなかった結果である。

5. 実験

解析手法の妥当性を検討するために、本研究では図8に示すような実験装置を用いて実験を行った。本装置では、ACサーボモータにより、ボールねじを介してスライドガイド上の振動容器を加振する機構を用いた。加振機構及び振動容器はジグを用いて水平に対する角度を変更できるようにしている。また、ACサーボモータの動作については、一定の正弦振動をする必要があるため、コントローラを介してコンピュータによりプログラム運転を行った。なお、非接触型の変位計を用いて振動容器の変位量を常時計測を行うことにより、指令通りに容器が加振されていることを確認している。実験の前後には使用するすべてのアクリル製円筒粒子を清潔な白布を用いて汚れを落とし、振動容器も同様に清潔な面を保つよう注意した。輸送実験では、断面にマーキングを施した円筒粒子群を容器上に規則正しく並べ、それらが輸送される様子をビデオに収録した。そして、画像処理装置を用いて各粒子のマーキングから粒子の変位量などを測定した。また、温度や湿度の影響が極力少なくなるように、温度と湿度を一定に保った部屋で実験を行った。

(a) Experimental

(b) Calculated

Fig. 10 Comparison of flow pattern between experimental and calculated results
($T=0.1s$, $a=0.9mm$, $\alpha=0^\circ$, $\beta=20^\circ$)

図9は、23個の粒子を用いて行った輸送実験の結果を計算と比較したものである。縦、横の両軸は図5と同一である。計算や実験による結果が共に振幅の増大によって輸送速度が増大する傾向を持ち、それらの値もほぼ一致していると言える。

図10は、36個の粒子が振動輸送される様子を実験と計算により比較した一例である。ここで、(a)は実験で撮影した流動状態のビデオ画像であり、(b)は計算結果である。端部に施したマーキングから各粒子が回転しながら移動する様子がわかるが、計算及び実験の結果を比較すれば、粒子の回転角は4段に並べた粒子の各段共にほぼ同じ変化を示していると言える。以上から、本計算は粒状体の振動輸送現象の予測に有効であると言える。

6. 結言

振動コンベアを対象として、多数の円筒粒子からな

る粒状体が振動輸送される様子をDEMを用いてシミュレーションし、輸送挙動を解析的に予測する手法に関する基礎的研究を行った。粒子同士及び粒子と振動容器が接触するときに粒子に作用する接触力については、法線方向に作用する力をばね力と粘性減衰力によりモデル化し、接線方向についてはクーロンの摩擦モデルを用いて決定した。さらに、計算の妥当性を論ずるために実験結果との比較を行ったところ、本計算方法が満足な結果を与えることが分かった。従来の振動輸送理論が一質点の解析に基づいていたのに対して、本計算方法は、多数粒子からなる粒状体を扱える点ではより現実的である。

最後に本研究に際して、実験装置製作に御協力いた

だいた田村隆技官（新潟大学工学部）並びに実験遂行に協力された新潟大学工学部生渡辺英和君に謝意を表します。

文 献

- (1) 谷口ほか3名, 機論, 28-188(1962), 485.
- (2) 岡部・横山・神保, 精密機械, 35-5(1969), 299.
- (3) Cundall P. A. and O. D. L. Strack : Geotechnique, 29 (1979), 47.
- (4) 例えば、機械設計便覧編集委員会編：機械設計便覧, 887, 丸善
- (5) 川口ほか2名, 機論, 58-551B(1992), 2119.