静的面外変位計測による回転円板の腰入れ効果評価法の研究*

岩田 弘^{*1}, 吉田 靖夫^{*2}, 橋本 浩二^{*3}A Study of the Estimation Method on the Tensioning Effect of a Disk
Using Static Lateral Deflection Measurement

Hiromu IWATA, Yasuo YOSHIDA and Koji HASHIMOTO

The method of measuring static lateral deflection of a circular saw disk is often used to estimate the tensioning effect at the stage of industrial production. To clarify the theoretical background of this test estimation method, the relation between the tensioning effect and the deflection of a disk which is loaded by a concentrated force at the outer boundary is studied, analytically and experimentally using normal and tensioned disks. (1) Analytical results of static lateral deflection by a concentrated force at the outer boundary coincide with the experimental results in both cases of normal and tensioned disks. (2) The relation between the deflection and isotropic additional stress parameter (maximum stress, radial location and variance) by tensioning is cleared. (3) Maximum of isotropic additional stress by tensioning has a optimal value for dynamic stability to use as a rotating disk. Because, small additional stresses make instability, and large stresses make low stiffness. (4) The tensioning effect is properly estimated by the method of measuring static lateral deflection of a disk.

Key Words: Tensioning, Stability, Stiffness, Plane Stress, Natural Frequency, Critical Speed, Tipped Saw

1. 目 的

金属材料の高速切断技術が、自動車産業をはじめとする多くの産業分野で重要になってきている。なかでも、丸のこを用いた高速切断は生産性などの面で成果を上げつつある。

この丸のこで高速切断を行うためには、丸のこの動的安定性が重要であり、このため従来より生産現場では腰入れ処理が行われている。これは、丸のこの親板の半径で中間部を、ローラやハンマを用いて板厚方向にわずかに塑性変形する程度に圧縮変形させることにより、面内に残留応力を生じさせる処理である。このとき、親板の外周部では半径方向に引張残留応力が、また半径の中間部では円周方向および半径方向に圧縮残留応力が生じる。もし、腰入れ処理が全く行われなかったり、不十分であったりすると、丸のこが不安定になり、まったく切断加工を行うことができなくなる。

これまでに、この腰入れ処理によって丸のこの固有

振動数が高くなり、結果として回転数を上げていったとき、回転と振動モードが同期することによって動的安定性が急激に低下する臨界回転数が高くなり、しかも臨界回転数より低い回転数領域でも動的安定性の向上をはかることができる⁽¹⁾ことがわかっている。さらに腰入れ処理は切断加工時に生じる熱応力による臨界回転数の低下を防ぐ効果がある⁽²⁾こともわかってきている。また、丸のこの外周に設けられたスリットについても腰入れと同様に動的安定性を向上⁽³⁾させることができる。

このように、丸のこでの切断時の動的安定性は非常に重要であり、これに最も貢献しているのが腰入れ処理であるといえる。

ところで、実際の丸のこ製造過程においては、腰入れ処理段階で腰入れ効果を予測するための評価方法が必要である。

これまでの知見によると、腰入れ状態を評価するためには、その固有振動数を計測することがよいと考えられる。しかし、周波数解析装置などを必要とすることや、たとえ周波数スペクトルが得られても、振動モードの判別が難しいことから、実用化されていないのが現状と思われる。

それに代わる方法として、生産現場では従来より、

* 原稿受付 1997年2月4日。

^{*1} 正員, 香川県工業技術センター (〒761 高松市郷東町 587-1)。

^{*2} 正員, 中部大学工学部 (〒487 春日井市松本町 1200)。

^{*3} 橋本特殊工業(株) (〒761 高松市春日町 1630-1)。

静的面外変位を計測する方法が利用されている。これは丸のこをフランジで固定し、その外周上の1ないし2点に面外から集中荷重を加え、集中荷重点から外周上で90°離れた点の面外変位量から腰入れ状態を推定するものである。この方法は以前から使われているにもかかわらず、十分な根拠には乏しいものであった。

そこで本論文では、この集中荷重による面外変位形状が、腰入れ処理によって生じる面内応力により変化し、腰入れ効果の評価方法として利用できることを解析的に解き明かそうとするものである。

2. 解析と実験

解析および実験では、実際の丸のこにおいてもスリットが特に大きくない限り大差ないことを確認のうへ、丸のこを単純なモデルとした円板を用いた。円板は外半径 $a=280$ mm、内半径 $b=20$ mm、板厚 $h=2.6$ mm で、内径拘束のためのフランジは半径 $c=60$ mm である。円板は鋼製で縦弾性係数 $E=2 \times 10^{11}$ Pa、ポアソン比 $\nu=0.3$ である。実験では、円板を水平に固定し、その外周上にフックで分銅を吊り下げることによって集中荷重を印加した。そのときの変位は変位センサを用いて計測した。

実験には通常の円板と、腰入れ処理を行った円板を用いた。腰入れ処理は、文献(1)にある方法と同じ処理で行った。

座標系は円柱座標系 (r, θ, z) を用いた。

2・1 腰入れ応力がないときの解析

2・1・1 解析方法⁽⁴⁾ 腰入れ応力のような面内応力が全く存在しないとき、面外変位 w の基礎式は次式である。

$$D\nabla^4 w = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}$$

である。

集中荷重点の角度が0°のとき、式(1)の一般解は、

$$w = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここで、

$$R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \log r$$

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{m+2} + C_m r^{-m} + D_m r^{-m+2}$$

$$(m=1, \cdots, \infty) \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

と表すことができる。

境界条件は、円板のフランジ径 c で拘束されていることから、面外変位とその傾きが零になるので、

$$(w)_{r=c}=0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=c}=0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

である。

また、円板の外周 a では角度0°の点に集中荷重 P が働くので、これを境界条件に含めると、境界条件はモーメント M_r と等価せん断力 V_r について、

$$(M_r)_{r=a}=0$$

$$(V_r)_{r=a} = -\frac{P}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

ここで、

$$M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial w}{r\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} \right) \right\}$$

$$V_r = -D \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\nu)}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial w}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial w}{r^2\partial\theta} \right) \right\}$$

である。

したがって、式(3)の関数を境界条件式(4)、(5)に代入して R_m を決定し、式(2)に代入することによって集中荷重下の面外変位形状を得ることができる。

2・1・2 解析および実験結果 解析は、式(3)の m の最大次数を20として計算した。これは、最大次数を変えたときの集中荷重点の面外変位の最大値の変化が図1のようになったことから、十分な次数と判断したためである。

円板の面外変位形状の鳥観図を図2に示す。集中荷重点の面外変位が最も大きい。外周上の約70°以上離れたところでは集中荷重の向き(マイナス)とは逆のプラス方向に面外変位していることがわかる。このときの円板の外周での面外変位形状を、実験結果と併せて図3に Analysis-1 として示した。実験と解析の結果は、集中荷重点の反対側で少し性質が異なるようである。これは、実験に用いた円板では板厚寸法を出すため研削加工を行っており、面内のわずかな残留応力が残っているものと考えられ、この残留応力が微妙に影響したものと考えられる。これは後の面内応力が存在する場合の解析結果から十分推察できるものであ

Fig.1 Relation between maximum deflection $w_{\max}/aP$ and analysis order m

Fig. 2 Deflection shape of a disk loaded by a concentrated force P at the outer boundary

Fig. 3 Analytical and experimental results of outer boundary deflection w/aP of normal disk

る。これらのことを考え合わせると、この解析法は正しいものと考えられる。なお、図3の Analysis-2 は2・2節の解析方法によるもので、後述する。

面外変位形状は外半径とクランプ径の比 c/a によってかなり変わるものと考えられる。そこでこの比 c/a を変えたときの面外変位形状の変化を図4に示す。図では、 w/aP が小さい領域を見やすくするために、 -6 から 6 MN^{-1} の範囲を拡大して表示した。半径比 c/a が大きくなるほど円板部の半径方向長さが小さくなるため、集中荷重点の面外変位は小さくなるのが解析結果からもわかる。またこのとき、面外変位が荷重の向きと逆になる領域の角度も小さくなる。

したがって、次節の面内応力が存在するときの解析法の実際の問題への適用においても、このことを考慮することが必要である。

2・2 腰入れ応力が存在するときの解析

2・2・1 解析方法 腰入れによる面内応力(半径方向 σ_r 、円周方向 σ_θ)が作用し、集中荷重 P が半径 r_0 、角度 θ_0 の位置にかかるとき、面外変位 w に関する基

Fig. 4 Outer boundary deflection w/aP as a function of clamped radius c/a

礎式は、

$$D\nabla^4 w - H(w) - \frac{P}{\pi a^2} \delta(r_0) \delta(\theta_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。

ここで、 δ はデルタ関数であり、面内応力を含む第2項は、

$$H(w) = h \left\{ \frac{\partial}{r \partial r} \left(\sigma_r \cdot r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \left(\sigma_\theta \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。

いま、 $\theta_0 = 0$ として、 $\delta(\theta_0)$ を次のように表すこととする。

$$\delta(\theta_0) = \delta(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} k_l \cos l\theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $k_0 = 1/2$ 、 $k_l = 1 (l=1, 2, \dots)$ である。

また、面外変位 w は単純円板の固有関数を用いて、次式のように級数で表すことができる。

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} R_{mn}(r) \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 A_{mn} は未定係数、 R_{mn} は節円数 m 節直径数 n の振動モード (m, n) で、内周固定周辺自由の境界条件を満足する固有関数であり、文献(1)の方法で求めることができる。

式(8)、(9)を式(6)に代入すると、

$$\begin{aligned} & D\nabla^4 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} R_{mn} \cos n\theta \right) \\ & - H \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} R_{mn} \cos n\theta \right) \\ & - \frac{P}{\pi^2 a^2} \delta(r_0) \sum_{l=0}^{\infty} k_l \cos l\theta = 0 \end{aligned}$$

となり、整理すると次式を得る。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \{ D \bar{V}_n^4(R_{mn}) - \bar{H}_n(R_{mn}) \} \cos n\theta \\ - \frac{P}{\pi^2 a^2} \delta(r_0) \sum_{l=0}^{\infty} k_l \cos l\theta = 0 \quad \cdots (10)$$

ここで、 $\bar{V}_n, \bar{H}_n$ は、

$$\bar{V}_n^4(R_{mn} \cos n\theta) = \bar{V}_n^4(R_{mn}) \cos n\theta \\ H(R_{mn} \cos n\theta) = \bar{H}_n(R_{mn}) \cos n\theta$$

となる演算子である。

この式(10)にガラークイン法を適用して解くこととする。左辺に $R_{ij} \cos j\theta$ を掛けて円板の全面で積分を行う。

$$\int_c^a \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \{ D \bar{V}_n^4(R_{mn}) - \bar{H}_n(R_{mn}) \} \cos n\theta \\ \times R_{ij} \cos j\theta \cdot r d\theta dr \\ - \frac{P}{\pi^2 a^2} \int_c^a \int_{-\pi}^{\pi} \delta(r_0) \sum_{l=0}^{\infty} k_l \cos l\theta \cdot R_{ij} \\ \times \cos j\theta \cdot r d\theta dr = 0 \quad (i, j = 0, 1, \cdots) \quad \cdots (11)$$

これを整理して、級数を M までの有限個にする。

$$\sum_{m=0}^M A_{mj} \frac{\pi}{k_j} \int_c^a \{ D \bar{V}_j^4(R_{mj}) - \bar{H}_j(R_{mj}) \} R_{ij} r dr \\ - \frac{P}{\pi a^2} R_{ij}(r_0) r_0^2 = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, M) \quad \cdots (12)$$

したがって、節直径数 j について、単純円板の固有関数 R_{mj} (節円数 $m = 0, \cdots, M$) を式(12)に代入してできる $M+1$ 個の連立方程式を解くことにより係数 A_{mj} を求めることができる。各節直径数について求めた係数 A_{mj} を式(9)に代入することにより、面内応力が存在するときの集中荷重下の面外変位形状を得ることができる。

腰入れ応力 σ_a は、次式で表されるガウス分布形の

Fig. 5 Dependence of natural frequency f on the maximum isotropic additional stress A

等方性付加応力⁽¹⁾を仮定した。

$$\sigma_a = A \exp \left\{ -\frac{(r-r_a)^2}{2s^2} \right\} \quad \cdots (13)$$

ここで、 A, r_a, s は最大応力値、その半径および幅に相当する分散である。

腰入れ応力 σ_a によって生じる面内応力 σ_r, σ_θ は、

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^2} \int_b^r \sigma_a r dr + \frac{(r^2 - b^2)}{r^2(a^2 - b^2)} \int_b^a \sigma_a r dr \\ \sigma_\theta = \frac{1}{r^2} \int_b^r \sigma_a r dr + \frac{(r^2 - b^2)}{r^2(a^2 - b^2)} \int_b^a \sigma_a r dr - \sigma_a \\ \cdots (14)$$

となる。

また、固有振動数は、エネルギー法を用いて計算した。

2・2・2 解析と実験の結果 解析では単純円板の節直径数、節円数を合わせて、固有振動数の低いほうから約 1 kHz までの、21 個の固有関数を用いた。このとき、面内応力を考慮した面外変位の解析が可能な本方法を検証するため、面内応力を零として解析した場合の結果を Analysis-2 として、図 3 に示した。2・1 節の面内応力を考慮できない解析方法 Analysis-1 と比べると、集中荷重点の面外変位がやや大きいものの、全般的によく一致しているので、今後の解析には問題ないと判断した。

実験には、2・1 節で用いた通常の円板のほかに、腰入れ処理を行った円板を用いた。したがって、これらの固有振動数を計測し、エネルギー法を用いた固有振動数の解析結果と比較することによって、等方性付加応力の最大応力値 A の値を求めることができる。この結果を図 5 に示す。この図は、付加応力のパラメータ $r_a/a = 0.464, s/a = 0.0893^{(1)}$ としたときの結果である。図に示したように、固有振動数の計測値は腰入れ円板の最大応力値 $A = 60$ MPa で解析結果とよく一致している。

Fig. 6 Distribution of isotropic additional stress σ_a and radial, circumferential residual plane stresses σ_r, σ_θ

Fig. 7 Analytical and experimental results of outer boundary deflection w/aP of tensioned disk

この結果、決定された腰入れによる等方性付加応力とこれによって生じる面内応力は図6のようになった。この応力が存在するときの外周での面外変位形状を求めると、図7のようになり、計測結果とほぼ一致した。

これらの結果から、面内応力を含む場合の面外変位についての本解析法は正しいものと考えられる。

a. 付加応力の最大値 A の影響

丸のこでは、腰入れ量の調整は主に付加応力の最大応力値 A で行う。このとき固有振動数は図5のように変化する。図からわかるように最大応力値 A の増加に伴って $(0, 0)$ および $(0, 1)$ の振動モードの固有振動数は一様に減少し、特に $(0, 0)$ モードは $A \approx 120$ MPa で、固有振動数が 0 Hz の座屈状態となり、通常の場合、最大応力値 A の上限となる。このような固有振動数の変化は次のように解釈できる。腰入れによって生じる残留応力は主に、半径中央部で圧縮応力、外周部で円周方向の引張応力である。したがって内径拘束で外周自由の円板の節円数 0 の振動モードでは主に、半径方向の曲率は圧縮残留応力、円周方向の曲率は引張残留応力の影響を受けると考えられる。 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ モードは円周方向に比べて半径方向の曲率を主に生じるモードであるので、圧縮残留応力により固有振動数は減少する。また、 $(0, 2)$ 以上の振動モードは円周方向の曲率が増加するモードで、外周部の広い範囲の引張残留応力により固有振動数は増加することになる。

丸のこのような回転円板では、回転によって節直径数 2 以上の各振動モードの後進波の固有振動数は回転とともに減少し 0 Hz となり、動的不安定になる。このときの各振動モードに対応する回転数のうち、最も低い回転数を回転円板の臨界回転数という。この臨界回転数を決定する振動モードは、外径とクランプ径の比 c/a によって異なるが、実験に使用した円板の場合

Fig. 8 Dependence of outer boundary deflection w/aP on maximum isotropic additional stress A

は $(0, 2)$ モードである。また臨界回転数は非回転時の固有振動数に比例する。これらのことから、臨界回転数を高くするためには $(0, 2)$ モードの非回転時の固有振動数を高くしなければならないので、最大応力値 A は大きい程よいことになる。

一方、最大応力値 A の変化による面外変位の変化を図8に示す。図にあるように、最大応力値 $A \approx 14$ MPa では $\theta = \pm 90^\circ$ までの領域がマイナス側にたわみ、さらに増加して $A \approx 50$ MPa では $\theta = \pm 135^\circ$ の領域まで、 $A \approx 60$ MPa では $\theta = \pm 180^\circ$ 、つまり外周全体がマイナス方向にたわむことがわかる。さらに最大応力値が増加すると各点の面外変位はマイナス方向に増加し、90 MPa を超えると急激に増加するようになる。このことは剛性の急激な低下を意味するものである。また同時にこの剛性の低下は振動振幅にも影響するので、円板を振動系として考えると、動的安定性の低下を意味することになる。

したがって、臨界回転数や固有振動数を上げるためには、座屈しない範囲内で最大応力値を大きくしなければならないが、逆に、剛性を保つためには最大応力値は抑える必要があることになる。

これらのことから、特に丸のこに適用する場合、臨界回転数が高くしかも動的安定性がある最適な点が存在することになる。具体的には、図8において剛性が急激に低下し始める $A \approx 90$ MPa 付近が該当する。

ところで図8をみると、腰入れ処理の最大応力値 A の増加に伴う面外変位の変化は集中荷重点から 90° の位置が最も大きく、しかも一様に変化していることがわかる。このことから、腰入れによる最大付加応力値をこの点の面外変位によって推定することができるものと思われる。このことは生産現場で行われている腰入れ試験方法とも符号するものである。

b. 付加応力の半径 r_a と幅 s の影響

等方性付加応力の最大応力点の半径 r_a を変化させたときの、円板の固有振動数の変化と外周の面外変位の変化を図9と図10に示す。図9から、(0,2)モードの固有振動数を最も高くする半径 r_a/a は約0.45である。一方、図10から、面外変位は、半径 r_a/a が約0.35~0.45の領域では円板の全周においてマイナスになっているが、この領域の外では集中荷重点の反対側を中心にプラス側にたわみ、面内応力が小さくなっていることがわかる。これは腰入れによる付加応力が、自由端である外周または内周に近いとき、応力解

Fig. 9 Dependence of natural frequency f on radius r_a/a at maximum isotropic additional stress

Fig. 10 Dependence of outer boundary deflection w/aP on radius r_a/a at maximum isotropic additional stress

Fig. 11 Dependence of natural frequency f on variance s/a of isotropic additional stress

放が行われ十分な面内応力を残留することができなくなり、腰入れの効果がなくなるためと考えられる。

腰入れ幅 s による固有振動数の変化と外周での面外変位の変化を図11と図12に示す。図11から、(0,2)モードの固有振動数が最も高くなるのは $s/a=0.18$ 付近であるが、図12でみると、このとき集中荷重点の面外変位も最も大きくなる。また外周全般をみても、すべて同じマイナス側にたわんでいることがわかる。

Fig. 12 Dependence of outer boundary deflection w/aP on variance s/a of isotropic additional stress

Fig. 13 Dependence of natural frequency f on maximum isotropic additional stress A under constant value of tensioning A^*s/a

Fig. 14 Dependence of outer boundary deflection w/aP on maximum isotropic additional stress A under constant value of tensioning A^*s/a

また、この付近では固有振動数の変化に比べて面外変位の増加が著しい。したがって付加応力の半径 r_a と幅 s は、この最大点を少し避けて剛性を確保したほうがよいと考えられる。

c. 腰入れ総量 ($A \times s$) 一定のとき

腰入れの総量を一定にしたとき、つまり、腰入れの等方性付加応力の最大応力値 A とその分散 s の積は腰入れの総量に相当するものと考えられる。そこでこの値を一定にしたときについてみると、図 13 と図 14 のようになった。このとき、 $A \times s/a = 5.36$ MPa, 付加応力の半径 $r_a/a = 0.46$ である。 A が約 60 MPa 以上で s/a が約 0.1 以下のとき、腰入れによる残留応力が自由端で解放されないため、図 13 の固有振動数と図 14 の面外変位の両方においてほぼ一定になることがわかった。これは、半径方向に幅広く分布させる腰入れ処理と一定の半径部に狭い幅で集中的に行う腰入れ処理が、ほぼ等価であることを示すものである。

3. ま と め

本研究では、腰入れ効果を製造段階で予測するための試験法について実験と解析を行った。この結果をまとめると以下ようになる。

(1) 外周上の一点の横方向に集中荷重を受ける円板において、面内応力が存在するときの解析を行い、

実験値と一致することを確認した。

(2) 腰入れと等価な等方性付加応力の最大応力値やその半径および分散幅による面外変位の変化の傾向を求めることができた。

(3) 特に腰入れ量としての最大応力値は、臨界回転数を高くするためには大きくしなければならないが、大きくしすぎると剛性の急激な低下を伴うため、最適な値があることがわかった。

(4) 集中荷重による静的面外変位計測による腰入れ効果の判定は妥当な評価法であることがわかった。

最後に、本研究を遂行するにあたり、多大な励ましをいただいた静岡大学の佐々木彰教授と徳島大学の賀勢晋名誉教授に感謝する。

文 献

- (1) 岩田弘・吉田靖夫, 回転円板振動に与える腰入れ効果の基礎的研究, 機論, **58**-547, C(1992), 684-689.
- (2) 岩田弘・吉田靖夫, 熱応力を受ける円板の振動に与える腰入れ効果の基礎的研究, 機論, **59**-563, C(1993), 2015-2019.
- (3) 岩田弘・吉田靖夫・橋本浩二, 熱応力を受ける円板の振動に与えるスリットの効果に関する基礎的研究, 機論, **61**-584, C(1995), 1293-1299.
- (4) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), §64, 290, McGRAW-HILL.