不規則励振を受ける非線形系の非ガウス応答分布の推定* (非有理形スペクトルを有する入力の場合)

木村 康治*¹, 森本 敏靖*²

Estimation of Non-Gaussian Response Distribution of a Nonlinear System Subjected to Random Excitation (Application to Nonwhite Excitation with Nonrational Spectrum)

Koji KIMURA and Toshiyasu MORIMOTO

The non-Gaussian response distribution of a single degree-of-freedom system with nonsymmetric nonlinearities subjected to nonwhite random excitation with nonrational spectra is investigated. The nonstationary and stationary probability densities of stochastic responses are calculated by employing the method which consists of the non-Gaussian equivalent linearization technique and the use of the moment equations approach. The non-Gaussian probability density function for the response distribution is expressed in terms of the potential of the system and employed for determining the equivalent linear coefficients. The results are compared with the corresponding digital simulation results.

Key Words: Theory of Vibration, Random Vibration, Non-Gaussian Distribution, Nonlinear System, Nonwhite Excitation, Nonrational Spectrum, Moment Equations

1. 緒 言

実際の機械・構造物系は地震動等, 不規則な励振力を受ける。また, その応答は不規則過程となるため, 系の動的挙動をよりの確に把握するためには, 確率論的な取扱いが必要である。系の応答の統計的な量として従来, 平均値と分散について評価が行われてきたが, 系の非線形性が強く, 応答の分布が非対称あるいは多峰となる場合, 応答の平均値や分散のみでは情報が不十分であり, 応答の分布自体を求めることが必要である。著者らは前報⁽¹⁾で, 応答の非ガウス性を考慮した等価線形化法とモーメント方程式を組合せることによって, 任意相関を有する非白色性励振を受ける非線形系の応答分布を精度よく推定する近似解析手法を提示した。その際, 具体的な計算では, 周波数の二乗の有理関数で表される有理形スペクトル⁽²⁾を有する入力を対象とした。しかし, 実際の外部入力に常に有理形スペクトルをもつ雑音として近似できるとは限らないので, 非有理関数で表されるスペクトルに対する応答

解析⁽³⁾も必要と考えられる。

本論文は, 非対称非線形ばね特性を有する一自由度系が非有理形スペクトルを有するガウス性入力を受ける際の応答解析を, 前報⁽¹⁾で提示した応答の非ガウス性を考慮した等価線形化法により行い, 定常および非定常状態における変位の確率密度の推定, ならびに応答計算を行う。また得られた結果をシミュレーション結果と比較・検討し, 本手法の有効性を明らかにする。

2. 力学系モデルと運動方程式

図1, 2に示すような, 不規則励振を受ける非対称非線形ばね特性を有する一自由度系を考える。不減衰固有振動数 ω_0 , 減衰比 ζ および無次元化時間 $\tau = \omega_0 t$ を用いると系の運動方程式は次のように書ける。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + g(x) = f(\tau) \dots\dots\dots (1)$$

ここで, $f(\tau) = f_0(\tau/\omega_0)/m\omega_0^2$ であり, $\cdot$ は無次元化時間 τ による微分を表す。非対称非線形ばね特性 $g(x)$ は次式によって表されるとする。

$$g(x) = x + \eta x^2 + \varepsilon x^3 \dots\dots\dots (2)$$

ここで, η, ε は二次および三次非線形パラメータである。 η は非対称性を表し, $\eta = 0$ の場合は Duffing 系に帰着する。

* 原稿受付 1997年3月17日。

*¹ 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*² 学生員, 東京工業大学大学院。

Fig. 1 Single DOF nonlinear system

Fig. 2 Nonsymmetric nonlinear characteristic

不規則外力 $f(\tau)$ として、平均値零、自己相関関数 $R(v)$ のガウス性定常非白色雑音 $n(\tau)$ が確定包絡関数 $e(\tau)$ によって振幅変調される形の入力を考える⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} f(\tau) &= e(\tau)n(\tau) \\ E[n(\tau)] &= 0, \quad E[n(\tau)n(\tau+v)] = R(v) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値、 v は時間差を表す。

具体的な応答計算では、確定包絡関数 $e(\tau)$ として、定常応答については単位ステップ関数 $U(\tau)$ を、非定常応答については以下の式で表される指数包絡関数を考える。

$$e(\tau) = U(\tau) \dots (4)$$

$$e(\tau) = (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) / \max(e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) \dots (5)$$

式(5)で表される指数包絡関数は、定数 a, b を選択することにより、さまざまな包絡特性を模擬することができる関数である。

また、非白色雑音 $n(\tau)$ として、非有理形スペクトルを有する雑音を考える。実際の非白色雑音のスペクトルは常に有理形スペクトル⁽²⁾として表されるとは限らない。例えば、地震動や突風等のスペクトルが、実測スペクトルとして数値データの形で与えられる場合⁽⁶⁾、あるいは、実験式として与えられる場合⁽⁷⁾⁽⁸⁾には、非有理形スペクトルを有する入力に対する応答解析が必要である。ここでは、非有理形スペクトルをもつ非白色雑音として、次の自己相関関数を有するものを採用する。

(a) $\rho=1$ (b) $\rho=2$

Fig. 3 Nonrational power spectra of nonwhite noise

$$R(v) = R_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} v^2\right) \cos \rho v \dots (6)$$

この雑音のパワースペクトルは、次式によって表される。

$$S(\omega) = \frac{R_0}{2\sqrt{2\pi}\alpha} \left[\exp\left\{-\frac{(\rho-\omega)^2}{2\alpha^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(\rho+\omega)^2}{2\alpha^2}\right\} \right] \dots (7)$$

ここで、 R_0, α, ρ は、それぞれ、入力雑音の大きさ、帯域幅、卓越振動数を表すパラメータである。パワースペクトルの具体的な形状を図3に示す。図3(a), (b)はそれぞれ $\rho=1, \rho=2$ の場合を表す。 α を小さくすると狭帯域入力となり、大きくすると白色性入力に近くなる。

3. 理論解析

3.1 等価線形系 非対称非線形系ばね特性を有する系は、平均値が零のガウス性不規則入力を受ける場合でも、その応答の平均値が零にならない点に特徴がある。そこで、応答の平均値のずれを平均値が変動する等価外力から評価する等価線形化法を適用する⁽⁹⁾。

式(1)の近似解が次式のような等価線形化された運動方程式から得られると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + k_e x &= f_e, \\ f_e &= f + a_e, \quad a_e = k_e x_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 k_e , a_e は等価線形係数である。これらの係数を、式(1)と式(8)の二乗平均誤差が最小になるように定める⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。以下の解析では、状態変数 $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ を用いることにする。

$$\left. \begin{aligned} k_e &= \left\{ \begin{aligned} &[E[y_1^2] - E^2[y_1]] + \eta[E[y_1^3] \\ &- E[y_1]E[y_1^2]] + \varepsilon[E[y_1^4] - E[y_1^3]E[y_1]] \\ &\times \{E[y_1^2] - E^2[y_1]\}^{-1} \end{aligned} \right\} \\ a_e &= \left\{ \begin{aligned} &\eta[E[y_1^3]E[y_1] - E^2[y_1^2]] \\ &+ \varepsilon[E[y_1^4]E[y_1] - E[y_1^3]E[y_1^2]] \\ &\times \{E[y_1^2] - E^2[y_1]\}^{-1} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

k_e , a_e は変位応答の一～四次モーメント $E[y_i]$, ($i = 1, \dots, 4$) の関数である。

3.2 応答の非ガウス確率密度を用いた等価線形化法 等価線形係数を算定するためには応答の確率密度が必要である。従来、rms 応答については、応答のガウス性を仮定する手法によって比較的精度のよい結果が得られている⁽⁹⁾。しかし、系の非線形性が強い場合には、応答は顕著な非ガウス性を示すので、応答分布を正確に推定するには、新たに応答の非ガウス確率密度関数を導入する必要がある。

本研究では、系のポテンシャル特性に着目して、次式の形の非ガウス確率密度を適用する⁽¹⁾。

$$p(y_1, d) = C \exp \left\{ -d \left(\frac{y_1^2}{2} + \eta \frac{y_1^3}{3} + \varepsilon \frac{y_1^4}{4} \right) \right\} \dots\dots\dots (10)$$

C は正規化定数、 d は未知パラメータである。式(10)の確率密度に含まれている未知パラメータ d の値は、3.3 節のモーメント方程式より得られる二次モーメント $E[y_1^2]$ を用いて次式によって定める。

$$J(d) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 p(y_1, d) dy_1 - E[y_1^2] = 0 \dots\dots\dots (11)$$

等価線形係数 k_e , a_e には、変位応答の一～四次モーメント $E[y_i]$, ($i = 1, \dots, 4$) が含まれている。本研究においては、三次、四次のモーメントの値は、上記の方法によって決定した応答の非ガウス確率密度関数を用いて積分演算を行うことにより算定される。この点が三次、四次のモーメントを一次、二次のモーメントで表すことのできた応答のガウス性を仮定する従来の手法と異なる本手法の特徴である。

3.3 モーメント方程式 式(8)より、応答の一次、二次のモーメント方程式が得られる⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}[y_1] &= E[y_2] \\ \dot{E}[y_2] &= -2\zeta E[y_2] - k_e E[y_1] + E[f_e] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}[y_1^2] &= 2E[y_1 y_2] \\ \dot{E}[y_1 y_2] &= E[y_2^2] - 2\zeta E[y_1 y_2] - k_e E[y_1^2] \\ &\quad + E[y_1 f_e] \\ \dot{E}[y_2^2] &= -4\zeta E[y_2^2] - 2k_e E[y_1 y_2] + 2E[y_2 f_e] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(12), (13)と非ガウス確率密度 $p(y_1, d)$ を表す式(10)、パラメータ d の決定法である式(11)、および等価線形係数 k_e , a_e を表す式(9)を組合せることによって応答計算ならびに応答分布の推定を行うことができる。式(13)の数値計算には、Runge-Kutta-Gill 法を用いる。

定常応答ならびに定常応答分布を求める際には、モーメント方程式(12), (13)の左辺の微分項を零として得られる代数方程式と、上記の諸式を組合せて繰返し演算を行う。

4. 応答計算例と考察

4.1 系と不規則外力 図4に計算で用いた非対

Fig. 4 Nonsymmetric nonlinear characteristic

Table 1 Parameter values for computation

(a) $\rho=1, R_0=1$

	$\eta = -0.3$	$\eta = -0.54$
$\alpha = 0.3$	○	Fig.5
$\alpha = 0.6$	○	○

(b) $\rho=2, R_0=4$

	$\eta = -0.3$	$\eta = -0.54$
$\alpha = 0.3$	Fig.6	Fig.7
$\alpha = 0.6$	○	Fig.8

称非線形ばね特性を示す。 $\eta = -0.3$ は非対称性がそれほど強くない場合、 $\eta = -0.54$ は非対称性が強い場合である。

計算で用いた入力のパワースペクトル [図 3(a), (b)] は、入力の卓越振動数と線形系の固有振動数が等しい $\rho=1$ と、入力の卓越振動数が線形系の固有振動数の 2 倍の $\rho=2$ に対応する。ともに、帯域幅の狭い $\alpha=0.3$ と広い $\alpha=0.6$ の 2 通りの計算を行った。入力の大さきについては、対応する線形系が共振状態となる $\rho=1$ の場合は $R_0=1$ 、共振状態から外れる $\rho=2$ の場合は、応答分布の非対称性を明確にするため $R_0=4$ とした。

表 1 に、実際に計算を行った上記の 8 通りのパラメータの組合せを示す。表 1(a) は、 $\rho=1$, $R_0=1$ の場合、(b) は、 $\rho=2$, $R_0=4$ の場合である。

4・2 計算結果 図 5~8 に、変位応答の定常確率密度を示す。表 1 中、○で表示したパラメータについては、図を省略する。実線は応答の非ガウス性を考慮した本論文の手法、破線はガウス性を仮定した手法、

ヒストグラムはシミュレーションによる結果を表す。また、各図の右上には、上記の各手法によって得られた一次および二次モーメントの値を示す。シミュレーションでは、5 000 本の標本関数を用いた。十分に時間の経過した $\tau=98.1 \sim 100$ (時間刻み $\Delta\tau=0.1$) における $20 \times 5\,000 = 100\,000$ 点の標本より、定常応答のヒス

Fig. 7 Stationary probability density ($\alpha=0.3$, $\rho=2$, $R_0=4$, $\eta=-0.54$, $\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.1$)

Fig. 5 Stationary probability density ($\alpha=0.3$, $\rho=1$, $R_0=1$, $\eta=-0.54$, $\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.1$)

Fig. 8 Stationary probability density ($\alpha=0.6$, $\rho=2$, $R_0=4$, $\eta=-0.54$, $\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.1$)

Fig. 6 Stationary probability density ($\alpha=0.3$, $\rho=2$, $R_0=4$, $\eta=-0.3$, $\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.1$)

Fig. 9 Stationary probability density (simulation) ($\alpha=0.3$, $\rho=2$, $R_0=4$, $\eta=-0.54$, $\varepsilon=0.1$, $\zeta=0.1$)

Fig. 10 Exponential envelope function ($a=0.125$, $b=0.25$)

トグラムを作成した。

共振状態に近い場合の $\rho=1$ (図5) については、本手法とシミュレーションのヒストグラムはよく一致している。また、図を省略した他の場合についても本手法とヒストグラムはよく一致していることを確認している。入力卓越振動数と系の固有振動数が大きく異なる $\rho=2$ の場合については、帯域幅が狭くかつ非対称性が強い図7を除いて、本手法はヒストグラムとよく一致しており、本手法の有効性が明らかになった。

特に図7の誤差について検討するために、シミュレーション結果から得られた二次モーメントを用いて、式(11)より未知パラメータ d を定めた場合の非ガウス確率密度[式(10)]を図9に示す。シミュレーション結果とよく一致していることから、図7の誤差は式(10)の非ガウス確率密度の仮定に起因するものではなく、おもに二次モーメントの推定精度に起因するものと考えられる。

図10に、非定常計算に用いた指数包絡関数[式(5)]を、また、図11に非定常応答と非定常確率密度を示す。入力、系のパラメータは図5と同じである。図11(a)に変位の平均応答、rms 応答を、図11(b), (c)にそれぞれ $\tau=7$, $\tau=13$ における分布を示した。なお、シミュレーションでは、20 000本の標本関数を用いた。応答については、非ガウス性を考慮した手法とガウス性を仮定した手法の間に、精度上の大きな差異は認められない。一方、分布については、非ガウス性を考慮した本論文の手法はシミュレーション結果とよく一致するのに対して、ガウス性を仮定した手法はよい近似となる分布を得ることができない。

以上の結果より、非有理形スペクトルを有する不規則励振に対しても、本論文で用いた応答の非ガウス性を考慮した等価線形化法は有効であることが明らかになった。特に応答のガウス性を仮定した従来の手法による計算結果と比較すると、応答分布の評価に著しい

(a) Nonstationary rms and mean displacement responses

(b) Nonstationary probability density ($\tau=7$)

(c) Nonstationary probability density ($\tau=13$)

Fig. 11 Nonstationary responses and response distribution ($\alpha=0.3$, $\rho=1$, $R_0=1$, $\eta=-0.54$, $\epsilon=0.1$, $\zeta=0.1$)

精度の向上が認められる。

5. 結 言

非対称非線形ばね特性を有する一自由度系が、非有理形スペクトルを有するガウス性非白色励振を受ける際の応答分布の推定を、応答の非ガウス性を考慮した等価線形化法とモーメント方程式を組合せた手法を適用することにより行った。

定常応答分布および非定常応答分布ともに、入力卓越振動数と系の固有振動数が大きく異なり、入力の帯域幅が狭くかつ系の非線形性が強い特別な場合を除く、幅広いパラメータ領域に対して、計算結果とシミュレーション結果がよく一致すること、ならびに、応答のガウス性を仮定した従来の手法と比較して、著しい精度の向上が得られることを示し、本手法が非有理形スペクトルを有する入力に対しても有効な手法であることを明らかにした。

文 献

- (1) 木村康治・駒田匡史・坂田勝, 機論, **61**-583, C(1995), 95-

99.
 (2) Åström, K. J., *Introduction to Stochastic Control Theory*, (1970), Ch. 4, Academic Press.
 (3) 木村康治・坂田勝, 機論, **51**-472, C(1985), 3196-3202.
 (4) Shinozuka, M. and Henry, L. R., *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, **91**-EM 5(1965), 123-143.
 (5) Bolotin, V. V., *Statistical Method in Structural Mechanics*, (1969), 204, Holden-Day.
 (6) 木村康治・竹本真一郎・坂田勝, 機論, **56**-522, C(1990), 104-110.
 (7) Davenport, A. G., *Inst. Civil Engrs.*, **23**(1962), 389.
 (8) 大月晃, 機論, **38**-310(1972), 1321-1341.
 (9) Kimura, K. and Sakata, M., *JSME Int. J. III*, **31**-4(1988), 690-697.
 (10) Lin, Y. K., *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, (1967), 283, McGraw-Hill.