境界積分方程式を用いた立体形状モデリング*

落 合 芳 博^{*1}

Solid Modelling by Using Boundary Integral Equation

Yoshihiro OCHIAI

This paper describes a method of solid modelling using the boundary integral equation and the three-dimensional polyharmonic function. This method requires the arbitrary points and lines on the free-form surface of solid model. The free-form surfaces of solid model are searched, after solving the discretized boundary integral equation. In this paper, the integrated polyharmonic functions are deduced. These functions effectively smooth the obtained surface, even if functions of low order are used. In order to investigate the efficiency of this method, several examples are given.

Key Words: Modelling, Drawing, Surface Generation, CAD, Boundary Element Method, Design

1. 緒 言

自由曲面を含む任意形状の立体を定義する場合、スプライン関数を用いた小曲面(パッチ)により定義する場合が多い⁽¹⁾⁽²⁾。しかし、小曲面を用いる手法では小曲面と小曲面の接合線上で、曲率などの滑らかさが損なわれる場合がある。また、スプライン関数で自由曲面を定義する場合、点を格子状に指定しなければならない。一方、自由曲面を容易に作成する方法にはメタボールを用いる方法や濃度空間モデルを用いる方法があるが、これらを用いる方法では表面の位置を正しく指定することは困難である⁽³⁾⁽⁴⁾。また、三角形メッシュを用いてエネルギー関数を最小にする方法⁽⁵⁾もあるが、初期のメッシュをかなり多く与えておく必要がある。

著者は、境界積分方程式を用いて輪郭のデータおよび曲面上の点のデータの入力のみで2.5次元の自由曲面を作成する方法を提案している⁽⁶⁾。また、三次元問題の多重調和関数を使用した境界積分方程式から導かれる式を用いて三次元形状を定義する方法も提案しているが、意図しない部分に形状ができたり、曲面の表

現力が不十分な点があった⁽⁷⁾。そこで、本論文ではこれらの問題点を解決し、本理論の実用性を向上させる方法を示す。以前、示した論文では計算時間を短縮する意味で、境界を省略して、計算を行ったが、これが意図しない部分に形状ができる原因になっていたので、定義したい立体形状を入れる大きな容器のようなものを考え、この容器のようなものの中に形状を定義する方法を用いる。また、三次元多重調和関数は距離 r に関して奇数乗のものしか使用していなかったが、多重調和関数が一様に分布した状態を示す関数を導入し、距離に関して偶数乗の関数も使用することにより、自由曲面の表現力を向上させる方法を示す。なお、本手法では高次の関数を使用するほど滑らかな曲面が得られるが、計算時間が長くなる。一様に分布した状態を示す関数を使用することにより、低次の関数でも滑らかな曲面が得られる利点がある。また、新たに導いた式ではパラメータが存在し、パラメータを変化させることで形状を変化させることができる。

2. 理 論

2.1 基礎式 熱発生を伴う定常熱伝導方程式とみなすことができるポアソン方程式を用いて、温度が零より小さい値の部分の三次元形状と考える⁽⁷⁾⁽⁸⁾。任

* 原稿受付 1997年6月5日。

*¹ 正員、近畿大学理工学部(☎ 577-8502 東大阪市小若江3-4-1)。

意点の値 T_1 が次の三次元問題のポアソン方程式を近似的に満足していると仮定する.

$$\nabla^2 T_1 = -T_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

T_1 の値が零より小さい部分を立体と考える. したがって, 立体の表面は T_1 の値が零の等値面と考える. 二点 (P, Q) 間の距離を r とすると, 三次元問題の多重調和関数 $T_f^*(P, Q)$ およびその単位法線方向微分係数 $\partial T_f^*/\partial n$ は次式で与えられる⁽⁹⁾.

$$T_f^* = \frac{r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial T_f^*}{\partial n} = \frac{(2f-3)r^{2f-3}}{4\pi(2f-2)!} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (3)$$

低次の関数を用いても滑らかな曲面が得られるように, 図1に示すように半径 A の球の領域に様に分布させた状態を示す, 次式で定義される新たな関数 T_{fA}^* を導入する⁽⁹⁾.

$$T_{fA}^* = \int_0^A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T_f^* ad\theta d\phi da \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし, 上式は $R > A$ の場合であり, $R \leq A$ の場合は次式で定義される.

$$T_{fA}^* = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T_f^* ad\theta d\phi da + \int_R^A \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T_f^* ad\theta d\phi da \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(4), (5)の積分を行うと R の関数となるが, 式(2)との整合性のために R を r と書き改めて, 本論文に必要な関数を以下に示す.

$$T_{1A}^* = \frac{A^3}{3r}, r > A \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$T_{1A}^* = \frac{3A^2 - r^2}{6}, r \leq A \quad \dots\dots\dots (7)$$

Fig. 1 Notations for new function

$$T_{2A}^* = \frac{A^3}{6r} \left[r^2 + \frac{A^2}{5} \right], r > A \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$T_{2A}^* = -\frac{r^4 - 15A^4 - 10r^2A^2}{120}, r \leq A \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$T_{3A}^* = \frac{A^3(35r^4 + 42r^2A^2 + 3A^4)}{2520r}, r > A \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$T_{3A}^* = \frac{16r^7 + 7r^4A^3 + 42r^2A^5 + 15A^7}{2520r}, r \leq A \quad \dots\dots\dots (11)$$

以上の関数を使用して分布を補間する. 式(1)の T_f は, 点でしか値を持たないもの T_f^p , 線状でしか値を持たないもの T_f^l , 面状のもの T_f^s および三次元的に分布するもの T_f^v に分けることができる. なお, 面状のものの中で二重層である $\partial T_f^*/\partial n$ に関するものを T_f^p とする. また, 式(4), (5)の球状に分布させたものに関するものには A を下添字に付ける. 式(1)の T_1 を T_1^v と置くと, T_1^v は次式のように表現することができる⁽⁷⁾⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_1^v = & (-1)^F (T_{F+1}^s + T_{F+1}^l + T_{F+1}^p + T_{F+1}^v + T_{F+1A}^s + T_{F+1A}^l + T_{F+1A}^p + T_{F+1A}^v) \\ & + \text{sgn}(F-1) \sum_{j=1}^{F-1} (-1)^{F+j} \nabla^2 [T_{F-j+1}^s + T_{F-j+1}^l + T_{F-j+1}^p + T_{F-j+1}^v + T_{F-j+1A}^s + T_{F-j+1A}^l \\ & + T_{F-j+1A}^p + T_{F-j+1A}^v] \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

境界を Γ とすると式(12)は, グリーンの定理より, 次式で与えられる⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned} cT_1^v(P) = & - \sum_{j=1}^F (-1)^j \int_{\Gamma} \left\{ T_j^*(P, Q) \frac{\partial T_j^v(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_j^*(P, Q)}{\partial n} T_j^v(Q) \right\} d\Gamma(Q) \\ & - \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma_s} (-1)^j T_j^* T_{j+1}^s d\Gamma_s - \sum_{j=1}^F \sum_{l=1}^J (-1)^j T_j^* T_{j+1}^l - \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^j T_j^* T_{j+1}^l d\Gamma_L \\ & - \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma_D} (-1)^j \frac{\partial T_j^*}{\partial n} T_{j+1}^p d\Gamma_D - \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma_s} (-1)^j T_{jA}^* T_{j+1A}^s d\Gamma_s - \sum_{j=1}^F \sum_{l=1}^J (-1)^j T_{jA}^* T_{j+1A}^l \\ & - \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^j T_{jA}^* T_{j+1A}^l d\Gamma_L - \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma_D} (-1)^j \frac{\partial T_{jA}^*}{\partial n} T_{j+1A}^p d\Gamma_D \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし, Γ_s, Γ_L および Γ_D は面状の T_f^s , 線状の T_f^l および T_f^p の形状を示し, T_f^p の数を J とする. 滑らかな境界 Γ 上では $c=0.5$ であり, 境界の内部では $c=1.0$ である.

2.2 立体の表面の法線 レイトレーシングなどにおいて立体表面の単位法線方向ベクトルが重要となる. 法線方向ベクトルを求めるために, 式(13)を x_i で微分すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1^V(P)}{\partial x_i} = & - \sum_{f=1}^F (-1)^f \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T_f^*}{\partial x_i} T_{f+1}^V - \frac{\partial T_f^*(P, Q)}{\partial n} T_f^V(Q) \right\} d\Gamma(Q) \\
& - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_s} (-1)^f \frac{\partial T_f^*}{\partial x_i} T_{f+1}^S d\Gamma_s - \sum_{j=1}^J \sum_{f=1}^F (-1)^f \frac{\partial T_f^*}{\partial x_i} T_{f+1}^j - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^f \frac{\partial T_f^*}{\partial x_i} T_{f+1}^L d\Gamma_L \\
& - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_D} (-1)^f \frac{\partial T_f^*}{\partial x_i \partial n} T_{f+1}^D d\Gamma_D - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_s} (-1)^f \frac{\partial T_{fA}^*}{\partial x_i} T_{f+1A}^S d\Gamma_s - \sum_{j=1}^J \sum_{f=1}^F (-1)^f \frac{\partial T_{fA}^*}{\partial x_i} T_{f+1Aj}^P \\
& - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_L} (-1)^f \frac{\partial T_{fA}^*}{\partial x_i} T_{f+1A}^L d\Gamma_L - \sum_{f=1}^F \int_{\Gamma_D} (-1)^f \frac{\partial T_{fA}^*}{\partial x_i \partial n} T_{f+1A}^D d\Gamma_D \dots \dots \dots (14)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\frac{\partial T_f^*}{\partial x_i} = \frac{(2f-3)r_i r^{2f-4}}{4\pi(2f-2)!} \dots \dots \dots (15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T_f^*}{\partial x_i \partial n} = & \frac{r_i r^{2f-5}}{4\pi(2f-2)!} \\
& \times \left[n_i + r_i (2f-5) \frac{\partial r}{\partial n} \right] \dots \dots \dots (16)
\end{aligned}$$

また, T_{fA}^* に関する項 $\partial T_{fA}^*/\partial x_i$ は以下のようになる.

$$\frac{\partial T_{1A}^*}{\partial x_i} = -\frac{A^3}{3r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i}, r > A \dots \dots \dots (17)$$

$$\frac{\partial T_{1A}^*}{\partial x_i} = -\frac{r}{3} \frac{\partial r}{\partial x_i}, r \leq A \dots \dots \dots (18)$$

$$\frac{\partial T_{2A}^*}{\partial x_i} = -\frac{A^3(r^2-5A^2)}{30r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i}, r > A \dots \dots \dots (19)$$

$$\frac{\partial T_{2A}^*}{\partial x_i} = -\frac{r^3-5rA^2}{30} \frac{\partial r}{\partial x_i}, r \leq A \dots \dots \dots (20)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{3A}^*}{\partial x_i} = & \frac{A^3(105r^4+42r^2A^2-3A^4)}{2520r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\
& r > A \dots \dots \dots (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{3A}^*}{\partial x_i} = & \frac{96r^7+21r^4A^3+42r^2A^5-15A^7}{2520r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\
& r \leq A \dots \dots \dots (22)
\end{aligned}$$

表面の単位法線方向の i 方向成分 N_i は次式で与えられる.

$$N_i = \frac{\frac{\partial T_1^V(P)}{\partial x_i}}{\left[\frac{\partial T_1^V(P)}{\partial x_j} \times \frac{\partial T_1^V(P)}{\partial x_j} \right]^{1/2}} \dots \dots \dots (23)$$

3. 活用法

立体表面上の任意の点または線より立体を作成するが³, 本論文では点を用いて形状を定義する. 表面の点の $T_1(P)$ の値を零とする. 立体の内部と外部を区別するために立体の内部の任意点を指定し, その値を-1に設定する. また, 立体の外部を大きな立方体の容器で囲み, その容器の面の値を+1に設定する. この容器が本手法での境界となる.

積分方程式(13)を離散化し数値的に使用する. 内挿関数を用いるべきであるが, 理解しやすくするために, 一定要素を用いて境界を離散化する. 離散化後の値 T_f および $\partial T_f/\partial n$ をベクトル $\mathbf{T}_f$ および $\mathbf{V}_f$ で示し, $F=2$ とし, 表面点に T_{2A}^* を用いる場合, 次式が得ら

れる.

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{T}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{T}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_2^P \mathbf{T}_3^P \dots \dots (24)$$

ただし, $\mathbf{G}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{H}_2$ および $\mathbf{G}_2^P$ は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T_1^*(P, Q) d\Gamma_j \dots \dots \dots (25)$$

$$H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1^*(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (26)$$

$$G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T_2^*(P, Q) d\Gamma_j \dots \dots \dots (27)$$

$$H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2^*(P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (28)$$

$$G_{2i}^P = T_{2A}^*(P, Q^P) \dots \dots \dots (29)$$

$F=2$ の場合を考えているので, 式(13)より次式が得られる.

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{T}_2 = \mathbf{G}_1 \mathbf{V}_2 + \mathbf{G}_1^P \mathbf{T}_3^P \dots \dots \dots (30)$$

ただし, $\mathbf{G}_1^P$ は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$G_{2ik}^P = T_{1A}^*(P, Q^P) \dots \dots \dots (31)$$

また, 値 $T(P^P)$ の点を活用すると次式が得られる.

$$\mathbf{T}(P^P) = -\mathbf{H}_3 \mathbf{T}_1 + \mathbf{G}_3 \mathbf{V}_1 + \mathbf{H}_4 \mathbf{T}_2 - \mathbf{G}_4 \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_3^P \mathbf{T}_3^P \dots \dots \dots (32)$$

ただし, $\mathbf{G}_3, \mathbf{H}_3, \mathbf{G}_4, \mathbf{H}_4$ および $\mathbf{G}_3^P$ は, 次式の成分を持つマトリックスである.

$$G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T_1^*(P^P, Q) d\Gamma_j \dots \dots \dots (33)$$

$$H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1^*(P^P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (34)$$

$$G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T_2^*(P^P, Q) d\Gamma_j \dots \dots \dots (35)$$

$$H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2^*(P^P, Q)}{\partial n} d\Gamma_j \dots \dots \dots (36)$$

$$G_{3ik}^P = T_{2A}^*(P^P, Q^P) \dots \dots \dots (37)$$

$\mathbf{T}_2=0$ の場合, 式(20), (26), (32)より次式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2^P \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^P \\ \mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_4 & -\mathbf{G}_3^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{T}_3^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_3 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}(P^P) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

上式より $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ および $\mathbf{T}_3^P$ を求めることができる.

以上の方法で立体形状を得ることができるが, 立体

の表示方法を考察する必要がある。境界内部の空間をスキャンさせ、立体部分の値は零より小さいので、零より小さい点にボクセルを表示する方法がある。この方法は、光造形法に活用することができる。また、図2のように与えられた点で三角形の面を定義して置き、三角形の各辺の中点から、式(23)を用いて法線を作成し、表面である T_1 の値が零の点を検索し、新たな面を4面作成する。この操作を繰返すことにより、滑らかな自由曲面を作成する。

4. 活 用 例

本手法では定義する立体が入る大きな容器を考え、この容器の値を +1 としている。一辺 10 mm の立方体の容器を図3(a)に示すように 216 の要素に分割し、計算に用いる。簡単な応用例として、図3(b)に示す

Fig. 2 Generation of new surfaces

(a) Boundary

(b) Given points

Fig. 3 Boundary and given points

(a) $T_1^*, A=1.5$

(b) $T_1^*, A=2$

(c) $T_2^*, A=0.1$

(d) $T_2^*, A=1$

(e) T_3^*

Fig. 4 Example of obtained shapes

Fig. 5 Shape with two projections

Fig. 6 Obtained voxel shape

(a) $T_{2A}^*, A=0.3$ (b) T_3^*

Fig. 7 Obtained shape

(a) Given surface points

(b) Given patches

Fig. 8 Given surface points and patches

Fig. 9 Obtained shape

ような表面の点を9点と内部を示す1点で定義される立体形状を作成する。これらの点は一辺4mmの立方体の頂点と立方体の中心および立方体の面の中心にある。図4(a)～(e)に示すように、関数 T_f^* の f が増加するにつれて滑らかな立体となり、関数 T_f^* を使用する場合より関数 T_{fA}^* を使用すると滑らかになる。また、 A の値が大きくなるに従い滑らかな立体となり、図4(c)の A を大きくした図4(d)は、図4(e)に近い形状になる。境界を N 分割し、内点を M 点使用すると $FN+M$ の行列を解かなければならないので、 T_{fA}^* を使用して、 A の値を大きくすると、 T_f^* を使用する場合に比べて計算量を少なくすることができる。つまり、図4(a)、(b)は $F=1$ であり、225行のマトリックスを解く必要があり、図4(c)、(d)では $F=2$ であり441行、(e)は $F=3$ であり657行のマトリックスを解く必要がある。

突起を有する形状の例として、図5に示すような表面点から、形状を作成した。図5の場合、突起が二つ存在するので、突起がつかないように、中央に+1の点を定義している。本手法では点のみから形状が作成でき、これらの点から作成された形状をボクセルで表現した立体を図6に示す。表面点のみで立体を定義することができ、光造形法に活用できる可能性があると思われる。ボクセルで表現した場合、立体形状を理解しがたいので、図5のように点に三角形の面を貼り、これらの面を活用して、図2の方法で立体を作成したものが図7であり、使用する T_f^* および A の値により形状を変化させることができる。

次に、表面点から人の顔を作成する。図8(a)に正面から見た表面点を示す。図8(a)の頭の上や側面には点を与えられていない部分があるが、本手法では与えられていない部分には滑らかな面が作成される。また、与えられた点をすべて使用して面をあらかじめ作成するには時間がかかるので、図8(b)に示すように12点にのみ面を作成し、式(38)の計算を行った後、図2の操作を4回繰返し、図9の立体形状を表現し

た。ただし、 T_{fA}^* を使い、 $A=0.05$ とした。この例のように表面点で定義する本手法は自由曲面で定義された滑らかな立体形状を少ない労力で作成できることがわかる。なお、指定した741点は式(38)を解くために使用しており、図2の操作で作成された点とは異なる。

5. 結 言

三次元の多重調和関数を用いた境界積分方程式を用いることにより、容易に滑らかな立体が作成できることが示された。また、多重調和関数を分布させた新たな関数を使用することにより、計算量を少なくできることが示された。本理論では点のデータ入力のみで滑らかな立体が定義されているので、与えられた点の幾つかを選び、簡単に立体を定義しておくと、計算により、滑らかな立体が作成できることがわかった。また、隅角半径を与えなくても滑らかな形状が得られ、滑らかな立体の定義が容易に行えることが示された。

文 献

- (1) Foley, J. D. and Van Dam, A. (今宮淳美訳), コンピュータ・グラフィックス, (1984), 519, 日本コンピュータ協会.
- (2) 鳥谷浩志・千代倉弘明編著, 3次元CADの基礎と応用, (1991), 41-92, 共立出版.
- (3) 西村仁志・平井誠・河合利幸, 分布関数による物体モデリングと画像生成の一手法, 電子通信学会論文集, J 68-D, No.4(1985), 718-725.
- (4) 先田和宏・井越昌紀, 濃度空間モデルによる意匠形状設計, 精密工学会誌, 61-6(1995), 794-798.
- (5) 鈴木宏正・山本徹也・金井崇・木村文彦, Welch/Witkinの薄板曲面近似を用いた三角形メッシュモデリング, 精密工学会誌, 63-1(1997), 45-49.
- (6) 落合芳博, 積分方程式による自由曲面の創成法, 機論, 60-570, C(1994), 709-714.
- (7) 落合芳博, 三次元多重調和関数を用いた立体形状モデリング, 機論, 60-579, C(1994), 3984-3989.
- (8) 関谷壮・落合芳博・石田良平, 境界要素法による熱応力解析, (1992), 16-20, 森北出版.
- (9) 落合芳博, 積分方程式による自由曲面の創成法の改良, 機論, 61-591, C(1995), 4549-4554.