スティック・スリップの発生限界について*

高野 英 資^{*1}, 佐 伯 暢 人^{*2}
佐々本 和 也^{*3}, 久 野 武 志^{*3}

On the Occurrence Conditions of Stick-Slip Phenomena

Eisuke TAKANO, Masato SAEKI,
Kazuya SASAMOTO and Takeshi HISANO

Self-excited oscillations caused by solid friction are treated theoretically. A model, in which solid friction and spring force are applied to a block lying on a moving surface, is used to represent this class of mechanical problem. The solid friction force considered is assumed to vary with the relative sliding velocities between two solid bodies, namely the friction-velocity characteristics is given by a polygon having two straight line segments and the critical value of static friction is equal to, or different from the value of kinetic friction without slipping. Several types of limit cycles and the regions in which they occur are shown in figures according to the characteristics of the friction-velocity function.

Key Words: Vibration, Frictional Vibration, Nonlinear Vibration, Solid Friction, Mechanical Driving System, Self-excited Oscillation, Limit Cycle, Piecewise Linear System, Sliding Surface

1. 緒 言

スティック・スリップ運動の取扱いの中には、摩擦力が滑り速度のみによって一義的に定まるとして摩擦振動理論を展開しているものと、摩擦力の時間効果や履歴特性を考慮した解析を行う立場がある。Bellら、Boら、Odenらは多くの研究者が摩擦振動の解析に当たり使用して来た運動摩擦係数の速度特性モデルをまとめ、考察を行っている⁽¹⁾。杉本⁽²⁾、高野⁽³⁾は摩擦振動について総括的な記述を行い、高野ら⁽⁴⁾は最近の摩擦による振動の解析について展望を行っている。

高野らは、自由自励系の一連の摩擦振動の研究^{(5)~(10)}において、運動摩擦力を2本の折れ線で近似し、最大静止摩擦力が孤立点となるかどうか、摩擦振動の理論結果に著しい影響を与え、また同一の移動面速度において複数個の安定なリミットサイクルが生じることなどを初めて明らかにした。しかし、スティック・スリップの発生限界については必ずしも明確にしている。

本報告では、文献(5)~(8)の流れの延長線上で、当時十分に電子計算機が普及していなかったための不十分さを補う意味も加え、運動摩擦力速度特性曲線を2本の折れ線で近似した場合に、摩擦特性折れ線のもつ特性値と移動面速度によってどのような振動解が発生し、それらがどのような範囲で発生するかなど、発生条件を理論的に明らかにしたので、検討結果を報告する。

2. 運動系のモデル図と運動方程式
および解曲線式

前報^{(5)~(7)}を参照し、図1の系において、2本の折れ線で近似した運動摩擦力(図2)の作用下での運動を考えよう。質量を m 、粘性減衰係数を c 、ばね定数を k とおくと、系の運動方程式は $m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + \varphi(\dot{\xi} - v_0) + k\xi = 0$ で与えられる。 ξ はばねの自由長からの物体変位であり、 v_0 は移動面速度、 $\varphi(\dot{s})$ は運動摩擦力で $\dot{s} = \dot{\xi} - v_0$ である。 φ_s は最大静止摩擦力、後述の φ_k は $\varphi(0)$ を、 V は折れ点速度、 A_1, A_2 は折れ線の傾斜を示す。 $x = \xi + \varphi(-v_0)/k$, $\tau = \sqrt{k/m}t$ とおき、粘性減衰が働かない場合について、各折れ線の支配する速度領域ごとに運動方程式を求めると、滑り運動の場合の区間線形化された式(1)が、また付着運動を行う場

* 原稿受付 1997年4月18日。

*¹ 正員, 新潟大学工学部 (☎ 950-2181 新潟市五十嵐2の町8050)。*² 正員, 新潟工科大学 (☎ 945-1195 柏崎市藤橋1719)。*³ 准員, 新潟大学大学院。

Fig. 1 Model of oscillation system

Fig. 2 Friction-velocity function

合式(2)が得られる。

$$x'' + 2Bx' + x - u = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x' = Y_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 x はばね力と摩擦力が釣り合う点からの物体の変位であり、 $x' = dx/d\tau = y$ である。 B , u は移動面速度 Y_0 の大きさと各特性折れ線の支配する速度領域によって次式のように与えられ、各速度境界において解の接合が必要となることを示している。

[I] $0 < Y_0 \leq Y$ のとき

$$B = B_1, u = 0 \quad (y_{II} \leq y \leq y_I) \dots\dots (3)$$

$$B = B_2, u = -2(B_2 - B_1)(Y - Y_0) \quad (y < y_{II}) \dots\dots (4)$$

$$B = B_1, u = -X_v \quad (y_I < y \leq y_V) \dots\dots (5)$$

$$B = B_2, u = -X_v + 2(B_2 - B_1)(Y + Y_0) \quad (y_V < y) \dots\dots (6)$$

[II] $Y < Y_0$ のとき

$$B = B_1, u = -2(B_2 - B_1)(Y_0 - Y) \quad (y_{II} \leq y \leq y_I) \dots\dots (7)$$

$$B = B_2, u = 0 \quad (y < y_{II}) \dots\dots (8)$$

$$B = B_1, u = -X_v - 2(B_2 - B_1)(Y_0 - Y) \quad (y_I < y \leq y_V) \dots\dots (9)$$

$$B = B_2, u = -X_v + 4(B_2 - B_1)Y \quad (y_V < y) \dots\dots (10)$$

ここで I 点, II 点などの y 座標を y_I , y_{II} などと書いた。後述する各点の x 座標についても同様である。図 3 には $x-y$ 位相面上に描かれた特性折れ線の例と特性値が付されており、次式の関係をもつ。

$$\left. \begin{aligned} X &= 2\varphi_s/k, X_v = 2\varphi_k/k \\ Y &= \sqrt{m/k} V, Y_0 = \sqrt{m/k} v_0 \\ B_1 &= A_1/2\sqrt{km}, B_2 = A_2/2\sqrt{km} \\ y_I &= Y_0, y_{II} = Y_0 - Y, y_V = Y_0 + Y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

Table 1 Equations of trajectory

$\left. \begin{aligned} \frac{x}{Y_0} &= U + \exp\left(-\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}\phi\right) \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \sqrt{P^2 + 2BPQ + Q^2} \sin(\phi + R_z) \\ \frac{y}{Y_0} &= \exp\left(-\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}\phi\right) \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \sqrt{P^2 + 2BPQ + Q^2} \sin(\phi + R_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots (a)$							
where $\phi = \sqrt{1-B^2}\tau$							
$\tan R_z = \frac{\sqrt{1-B^2}P}{BP+Q}, \quad \tan R_y = \frac{-\sqrt{1-B^2}Q}{P+BQ}$							
$\exp\left(-\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}\phi_{cH}\right) \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \sqrt{P^2 + 2BPQ + Q^2} \sin(\phi_{cH} + R_y) = S \quad \dots\dots (b)$							
Type	Range applied	B	P	Q	U	ϕ_{cH}	S
(i)	I ~ A	B_1	$\frac{X-X_v}{2Y} \frac{Y}{Y_0} - 2B_1$	1	0	ϕ_A	1
	A ~ B	B_1	$\frac{x_A + X_v}{Y_0}$	1	$-\frac{X_v}{Y_0}$	ϕ_B	1

Fig. 3 Characteristic polygon in the $x-y$ plane

図 3(a) の場合は式(12)の、図 3(b) の場合は式(13)の関係があることはいうまでもない。式(12), (13)において等号の成り立つときを $(X_v)_{\min}$ とおき、最低摩擦力特性と呼ぶことにする。また第 2 の特性折れ線の傾斜が負の場合には、物体が運動摩擦力の負となる相対速度範囲を運動することが起こらないよう、 X_v が十分に大きい値をもつ場合について解析を行うものとする。

$$X_v \geq 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$X_v \geq -4B_1Y \quad \dots\dots\dots (13)$$

表 1 には、断片線形化された式(1)の変位 x/Y_0 と速度 y/Y_0 に関する解曲線式(a)が示されている。式(b)は速度境界における超越方程式を示す。 B , P , Q , U は位相面上の解軌道のうち、各折れ線が支配する適用速度領域を考慮し、下表に示した後述する(i)形の例のように各値がとられる。ここで、 $U = u/Y_0$, $P = x_0/Y_0 - U$, $Q = y_0/Y_0$ であり、 x_0 , y_0 は各適用速度領域内での運動開始点の位相面上の初期座標を示す[詳細は文献(5)~(7)を参照]。

3. 位相面上のリミットサイクルの分類

表 2 は前報での分類法と命名の考え方を示したもので、図 4 には $x/Y_0 - y/Y_0$ 位相面上に示したリミットサイクルの発生例とそれらの名称が付されている。前報では、座標原点の位置や、I 点を通る解軌道の最小

Table 2 Classification of types of limit cycles

Position of the origin of the coordinates			On segment H-II		On segment II-III
Existence of limit cycle			$y_{min} \leq y_{II}$	$y_{min} < y_{II}$	
Existent	Segment I-IV is a portion of the trajectory of closed limit cycle	$y_{max} = y_I$	Type (i)-(α)	Type (ii)-(α)	Type (iii)-(α)
		$y_{max} > y_I$	Type (i)-(β)	Type (ii)-(β)	Type (iii)-(β)
	Segment I-IV is inside or outside the trajectory of limit cycle	$y_{max} > y_I$	—	Type (ii)-(γ)	Type (iii)-(γ)
		$y_{max} < y_I$	—	Type (ii)-(δ)	Type (iii)-(δ)
Nonexistent			Type (i)-(ε)	Type (ii)-(ε)	Type (iii)-(ε)

Fig. 4 Several types of limit cycles

速度 y_{min} と折れ点速度 y_{II} の大小関係により, (i)形, (ii)形, (iii)形の区別を行っていた. また解軌道の最大速度 y_{max} と I 点の速度 y_I の大小関係のほかに, 解軌道が付着と滑りを繰返す定常振動解となるか, 滑り運動のみからなる定常振動解となるか, あるいは閉軌道とならずに減衰してしまうことになるかなど, 主として I 点を通る定常振動解によって (α) 形から (ε) 形までの区別を行い, これらを組合せて, Type(iii)-(α) などと命名していた. しかし, 例えば Type(α) とひとくくりにして呼んでも, 図 5 の上段に示されているように I 点を通る解のほかに複数のリミットサイクルが同時に発生するなど, いくとおりもの場合があり, このような考え方のみでは今後の取扱いに不便なので, 本報告では例えば Type(iii)-(α) に続いて図 5 中の S, T, TU など付記して, 発生するリミットサイクルの種類を明確にするものとした. T, U は I 点

Fig. 5 Additional symbols

を時間 τ の正方向にたどる解軌道および H 点を τ の負の方向にたどる解軌道が, それぞれ付着運動を示す I-IV 線分の一部を含む場合の閉じた定常振動解を意味し, また S, s, u は滑り運動のみから成る閉軌道を表す. このうち s, u はそれら閉軌道が I-IV 線分の内側にあり, s 形は安定で (δ) 形や TUs 形で生ずる. また, u 形は不安定なリミットサイクルで, Tu 形において生ずる. なお, 図 4 において C, D, A, B の各点および後述の C_0 , D_0 点は, それぞれ I 点および H 点を時間の正方向にたどる解軌道が特性折れ線の速度境界を通過するときに通過する各点に対して付した名称であり, 後述の D_u , C_u , I_u は H 点を時間の負の方向にたどる解軌道が同様に速度境界を通過する点に付した名称である. したがって, 例えば I 点を出発する解曲線が C, D 点を通り A 点において付着運動に入り I 点に達して閉軌道を完成する場合には解曲線を $I \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow I$ と表すことにする. この定常振動解は, 座標原点が H-II 折れ線上にあるとき, 前報では Type(ii)-(α) と呼んでいたものである.

4. 発生形態の判別予測図と関係因子

次にこれら各種リミットサイクルはどのような条件下で発生するのだろうか. 摩擦特性折れ線の特性値と移動面速度が与えられると, リミットサイクルの発生形態は図 6 の形態判別予測図例から知ることができ

る。

II点を時間の負の方向にたどる解曲線の速度が最初に $y=y_1$ となる点を I_{cr} とするとき、図6(a)は $B_1 > 0$ の一例であるが、図6において最大静止摩擦力が孤立点となる $G=(X-X_v)/2Y \neq 0$ の場合、滑り運動の開始点Iが I_u 点と I_{cr} 点との間にある場合、すなわち $Z = \overline{HI} = G(Y/Y_0)$ の値が $Z_u < Z < Z_{cr}$ を満たす場合 (以下簡単に $I_u < I < I_{cr}$ と略記することがある) には (i)-(a)-T形となり、 $I > I_{cr}$ ならば(ii)-(a)-T形、 $H < I < I_u$ ならば(i)-(ε)形となることが予測できる。ここで $Z_{cr} = \overline{HI}_{cr}$ 、 $Z_u = \overline{HI}_u$ である。また $I = I_u$ のときにはI点を出発する解曲線は丁度H点を通ることになる。

図6中のa点、b点はH点を τ の正、および負の方向にたどる解曲線が第1の特性折れ線またはその延長線と交わる点で、それらに対応する Y/Y_0 の値はそれぞれ $Y_1/Y_0 = 1 + \exp(-B_1\pi/\sqrt{1-B_1^2})$ 、 $(Y/Y_0)_u = 1 + \exp(B_1\pi/\sqrt{1-B_1^2})$ となる。 $Y_1/Y_0 < Y/Y_0 < (Y/Y_0)_u$ の場合には I_u 点と I_{cr} 点の大小関係は逆転し、 Y/Y_0 および B_2 の値によって、 I_u 点や I_{cr} 点が存在しない場合も起こり得る。 $B_1 = 0$ のとき $Y_1/Y_0 = (Y/Y_0)_u$ である。

図6(b)はH点を τ の正、負の方向に出発する解曲線が、第2の折れ線の支配する速度領域に入り込む場合で、折れ点IIを通る境界速度 $y_{II}/Y_0 = 1 - Y/Y_0$ においてそれぞれ C_0 点、 D_0 点並びに C_u 点、 D_u 点を有し、それらの x 座標の間に $x_{D_0}/Y_0 > x_{D_u}/Y_0$ が成り立つ場合である。したがって、 $I > I_u$ の場合には閉軌道 $I_u \rightarrow C_u \rightarrow D_u \rightarrow H \rightarrow I_u$ は付着と滑りを交互に繰返す不安定なリミットサイクルとなり、I点を出発する解軌道 $I \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow I$ とともに、(ii)-(a)-TU形となることが予測できる。 $H < I < I_u$ では(ii)-(ε)形となる。

図6(c)は $B_1 < 0$ 、 $B_2 > 0$ かつ $x_{D_u}/Y_0 > x_{D_0}/Y_0$ となる場合で、 B_1 と B_2 が異符号となる場合には座標原点を囲む滑り運動のみからなる定常振動解 $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$

Fig. 6 Prescience diagrams of types of limit cycles

の発生が有り得ることが推察できる。したがって、I点を出発する閉軌道 $I \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow I$ とともに (iii)-(a)-TU 形のリミットサイクルを生ずることになる。

$x_{D_0}/Y_0 = x_{D_u}/Y_0$ は、後述するように、 $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$ 形のリミットサイクルの発生境界条件を与える。

このように、折れ点IIおよびH点から時間 τ の負の方向にたどる解曲線がI点を通る速度に達したときの I_{cr} 点および I_u 点の存在の有無、並びにI点との大小関係、さらに Y/Y_0 と Y_1/Y_0 並びに $(Y_1/Y_0)_u$ との大小関係、 D_0 点と D_u 点の存在およびそれらの大小関係は、 B_1 、 B_2 の値とともに、リミットサイクルの発生形態に密接な関係をもつことがわかる。本報告では特性値 B_1 、 B_2 、 Y/Y_0 、 X_v/Y_0 、 G などが与えられると、これら形態判別予測図を基に発生する定常振動解を求めた。

5. 各種形態の発生境界曲線

5.1 (i)形、(ii)形、(iii)形の境界 図7には $G=(X-X_v)/2Y$ を副変数とし、 B_1-Y/Y_0 平面における(i)形～(iii)形の発生境界を示した。任意に与えたI点を出発する解曲線がII点を通る条件を満たす B_1 と Y/Y_0 の関係を与えるもので、 G =一定の曲線より上側が(i)形、下側が(ii)形の領域で、 $Y/Y_0 < 1$ の範囲は G の値に無関係にすべて(iii)形の領域となる。

図8, 9は $Z = \overline{HI} = G(Y/Y_0)$ とおくと、 Y/Y_0 に対する $Z_{cr} = \overline{HI}_{cr}$ 、 $Z_u = \overline{HI}_u$ の変化のようすを、 B_1 の値の正負の場合の例について描いたもので、 Z_{cr} 曲線の右下側は(i)形の、また Z_{cr} 曲線の左上側が(ii)形の領域を示し、 $Y/Y_0 < 1$ の範囲は(iii)形の領域である。また、 Z_u 曲線は $B_1 = 0$ のとき、 $B_2 \geq 0$ に対して存在し、 $B_1 > 0$ のとき $B_2 \geq 0$ に対して存在するが、 $Y/Y_0 < (Y_1/Y_0)_u$ では B_2 の値によって異なる曲線となる。

Fig. 7 Boundary curves among the types of [i], [ii] and [iii]

Fig. 8 Z_{cr} -curves and Z_u -curves for $B_1 > 0$ Fig. 9 Z_{cr} -curves and Z_u -curves for $B_1 < 0$

$B_1 < 0$ のときには $B_2 > 0$ に対して Z_u 曲線が存在するが、 $B_1 > 0$ の場合も含め、 B_1 と B_2 が異符号のとき $Z = 0$ となる Y/Y_0 の値は後述の条件 $x_{D0}/Y_0 = x_{Du}/Y_0$ を満たす。なお、図中の座標原点を通る破線で示した直線は $G = \text{一定}$ の直線を表し、ある一定の摩擦特性が与えられたとき、移動面速度 Y_0 のみを変化させたときの定常振動解の形態変化はこの直線上で行われることを示す。

5・2 (α)形の発生範囲と発生境界曲線 I点を出発する解軌道がC点、D点を経由し、あるいは直接にI-IV線分上でA点に達し付着運動を行い、再びI点で閉軌道を完成する定常振動解を含む(α)形は、 $x_H/Y_0 \geq x_A/Y_0 \geq x_{IV}/Y_0$ なる条件下で得られる。 $x_H/Y_0 = x_A/Y_0$ は(α)形と(ε)形または(α)形と(δ)形の発生境界条件を与え、 $x_{IV}/Y_0 = x_A/Y_0$ は(α)形と(β)形の発生境界条件を与える。

次にこれらの発生境界をいくつかの線図に示そう。図10および11は、 $\Delta X_v/Y_0$ が十分に大きい場合(図中には $\Delta X_v/Y_0 = X_v/Y_0 - (X_v/Y_0)_{\min} = \infty$ と表記)に、最大静止摩擦力が孤立点にならない $G=0$ の場合(図

Fig. 10 Boundary curves between types of (α) and (ε) or between types of (α) and (δ) for $G=0$ Fig. 11 Boundary curves between types of (α) and (ε) or between types of (α) and (δ) for $G \neq 0$

10)と孤立点になる $G=0.5$ の場合(図11)の(α)形と(ε)形、または(α)形と(δ)形の発生境界曲線を示す。両図とも B_2 を副変数として横軸には B_1 が、縦軸には Y/Y_0 が取られている。これらの境界曲線の上側が(α)形の範囲であり、下側は(ii)形の領域内で(δ)形、(iii)形の領域内で(ε)形となる。ここで、点線の曲線は(i)形と(ii)形の境界を、同じく点線の $Y/Y_0=1$ は(ii)形と(iii)形の境界を示す。 $G=0$ のとき、(α)形の発生境界曲線は、 B_1 と B_2 が異符号の場合に存在し、 $B_1=0$ では $Y/Y_0=2$ となる。一方 $G \neq 0$ の場合には、この境界曲線は $B_2 \geq 0$ の場合でも B_1 の正領域に入り込み、その度合いは G が大きくなるほど大きい。そして $B_2 < 0$ の場合には Y/Y_0 の減少とともにいったん $B_1=0$ の縦軸に接近するが、 Y/Y_0 がさらに小さくなると次第に縦軸から離れ、 B_1 軸に漸近していくようすが推察される。これらの図は、 B_1 を横軸に取った以下の図においても同様であるが、 $B_1 < 0$ の範囲を左半分に、 $B_1 > 0$ に範囲を右半分に、少し間隔をあけ

て示すようにしており、左右の図の間に $B_1=0$ の場合の発生境界曲線を描いている。図10の $G=0$ のときの境界曲線は後述する $x_{D0}/Y_0=x_{Du}/Y_0$ を満たす発生境界でもある。(β)形の発生境界条件については後で述べる。

5.3 $x_{D0}/Y_0=x_{Du}/Y_0$ を満たす境界曲線 B_1 と B_2 が異符号のとき、H点から C_0 点を経て D_0 点に達する解軌道が、H点を τ の負の方向にたどる解軌道の D_u 点と一致する場合に得られる閉軌道は、前述の滑り運動のみから成る s 形または u 形の定常振動解の発生境界を与える。

いま図4(C), (G)の場合のように、折れ点速度上のE点から時間 τ の負および正方向にたどる解軌道が滑り運動のみを行い、再び折れ点速度に達する点をS点、F点とし、それぞれの所要時間を $\phi_s = \sqrt{1-B_1^2}\tau_s$, $\phi_E = \sqrt{1-B_2^2}\tau_E$ とおくと、S点とF点が一致する場合の ϕ_s と ϕ_E は、(ii)形、(iii)形とも同じ

Fig. 12 $(Y/Y_0)_s$ -curves under the condition of $x_{D0}/Y_0=x_{Du}/Y_0$ in the B_1-Y/Y_0 plane

Fig. 13 $(Y/Y_0)_s$ -curves under the condition of $x_{D0}/Y_0=x_{Du}/Y_0$ in the B_1-B_2 plane

次式(14)の連立超越方程式の根として与えられ、 B_1 および B_2 のみの関数となる [既報⁽⁶⁾の $\sqrt{1-B_1^2}\tau_s + \sqrt{1-B_2^2}\tau_E = 2\pi$ は誤りであり、式(14), (34)および表2の式(c)は本報告の式(14)のように訂正してお詫びする]。

$$\left. \begin{aligned} &(\sqrt{1-B_1^2}/\sin \phi_s) \{ \cosh(B_1 \phi_s / \sqrt{1-B_1^2}) \\ &\quad - \cos \phi_s \} = -(\sqrt{1-B_2^2}/\sin \phi_E) \\ &\quad \times \{ \cosh(B_2 \phi_E / \sqrt{1-B_2^2}) - \cos \phi_E \} \\ &(\sqrt{1-B_1^2}/\sin \phi_s) \sinh(B_1 \phi_s / \sqrt{1-B_1^2}) \\ &\quad - B_1 = -(\sqrt{1-B_2^2}/\sin \phi_E) \sinh(B_2 \phi_E \\ &\quad \quad \quad / \sqrt{1-B_2^2}) - B_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

このときE点の座標と折れ点速度との間に(ii)形、(iii)形の場合、それぞれ式(15), (16)の関係が成り立つ。

$$(x_E/Y_0)/(1-Y/Y_0) = (\sqrt{1-B_1^2}/\sin \phi_s) \{ \exp \times (-B_1 \phi_s / \sqrt{1-B_1^2}) - \cos \phi_s \} - B_1 \dots\dots (15)$$

$$(x_E/Y_0)/(1-Y/Y_0) = (\sqrt{1-B_1^2}/\sin \phi_s) \{ \exp \times (-B_1 \phi_s / \sqrt{1-B_1^2}) - \cos \phi_s \} - (2B_2 - B_1) \dots\dots\dots (16)$$

これらの式は x_E/Y_0 と $y_E/Y_0=y_{II}/Y_0=1-Y/Y_0$ との比の値を定めるものである。しかるに閉軌道が滑り運動のみから成る場合には $x_E/Y_0 \leq x_{C0}/Y_0$ なる条件を満たすことが必要となる。式(15), (16)の右辺の値をそれぞれ E_{02} , E_{03} とおくと、この等号が成り立つ $x_{D0}/Y_0=x_{Du}/Y_0$ の場合の Y/Y_0 の値 $(Y/Y_0)_{s2}$ および $(Y/Y_0)_{s3}$ は次式(17)から求めることができる。

$$(Y/Y_0)_{s2, s3} = 1 - \exp(-B_1 \phi_{C0} / \sqrt{1-B_1^2}) \{ \cos \phi_{C0} + (B_1 / \sqrt{1-B_1^2}) \sin \phi_{C0} \} \dots\dots\dots (17)$$

$$\tan \phi_{C0} = \sqrt{1-B_1^2}(E_0 + 2B) / \{ 1 - B_1(E_0 + 2B) \} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $\phi_{C0}(0 < \phi_{C0} < \pi)$ は式(18)において E_0 , B を、(ii)形の場合 E_{02} , B_1 に、(iii)形の場合 E_{03} , B_2 においてやればよい。S点とF点が一致するときのE点を改めて C_s 点、S点を改めて D_s 点を書くとき、 s 形または u 形のリミットサイクル $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$ が発生する範囲は B_1 , B_2 が与えられると、(ii)形の場合 $(Y/Y_0)_{s2} \geq Y/Y_0 \geq 1$ の速度領域で、また(iii)形の場合 $1 > Y/Y_0 \geq (Y/Y_0)_{s3}$ を満たす Y/Y_0 の速度領域内ということになる。また、 Y/Y_0 の値が $(Y/Y_0)_{s2}$ および $(Y/Y_0)_{s3}$ と等しくなる場合には、定常振動解は半安定なリミットサイクルとなる。 $|B_1|=|B_2|$ かつ $Y/Y_0=1$ の場合は定常振動解は分離枝であり、座標原点は渦心点となる。図12, 13は $x_{D0}/Y_0=x_{Du}/Y_0$ を満たす発生

境界曲線を示す。図12は B_2 を副変数として $B_1 - Y/Y_0$ 平面に $(Y/Y_0)_s$ 曲線を描いたもので、 $B_1=0$ に関して左右対称な曲線が得られる。また、図13は B_1, B_2 を両軸に選び、 $(Y/Y_0)_s$ を副変数として表したもので、これら境界曲線は B_1 と B_2 が異符号の領域においてのみ生ずる。しかし、定常振動解 $C_s \rightarrow D_s \rightarrow C_s$ は(ii)形($1 \leq Y/Y_0 < Y_1/Y_0$)および(iii)形($0 < Y/Y_0 < 1$)の領域の中でも $(Y/Y_0)_s$ 曲線と $Y/Y_0=1$ の直線とに挟まれた範囲の領域でのみ発生することになる。

5.4 (β)形および(γ)形の発生境界 X_v/Y_0 が小さくなるとI点を出発する解軌道は $x_{IV}/Y_0 > x_A/Y_0$ においてA点を生じ、さらに逆方向の摩擦力を受けながら滑り運動を行った後、 $x_I/Y_0 > x_B/Y_0 > x_{IV}/Y_0$ を満たすB点で付着運動に移行し、I点に復帰して閉軌道を完成する。しかし、 $x_B/Y_0 > x_I/Y_0$ となると付着運動は起こらず、I-IV線分を内部に含み、移動面速度より小さい範囲と大きい範囲での滑り運動を交互に繰返

す大振幅振動となる。前者の運動を(β)形、後者の運動を(γ)形と呼んで区別している。このとき $x_{IV}/Y_0 = x_A/Y_0$ は(α)形と(β)形の、また $x_I/Y_0 = x_B/Y_0$ は(β)形と(γ)形の発生境界を与える。

図14および15はこれらの発生境界曲線の例を示したもので、図14では上から順に(α)形、(β)形、(γ)形が生ずる。また図15では(α)形が(β)形を、(β)形が(γ)形の領域を包み込むように生ずる。図14は $G=0$ かつ $B_2=0$ の場合の例で、 $\Delta X_v/Y = (\Delta X_v/Y_0)/(Y/Y_0)$ が副変数に取られている。図15は $G=0$ かつ $\Delta X_v/Y=0$ の場合で、 B_2 を副変数に選んでいる。いずれも Y/Y_0 が小さい値の範囲でこれらの領域が発生し、 $\Delta X_v/Y$ や B_2 の増加とともにそれらの発生領域は急速に狭められるようすがわかる。両図とも破線の曲線は(i)形と(ii)形の境界を、また $Y/Y_0=1$ の直線は(ii)形と(iii)形の境界を示す。

6. 発生形態変化図

次に五つの特性因子がどのような値をもつときに、どのような定常振動解が発生し得るのか、5章までの結果をもとにいくつかの線図を用い、移動面速度等による発生形態変化と発生範囲について示す。

6.1 X_v/Y_0 が十分に大きい場合 図16~18は最大静止摩擦力の孤立度 G と第2の特性折れ線の傾斜 B_2 をそれぞれ一定とした場合の定常振動解の発生形態変化図を、横軸に B_1 を、縦軸に Y/Y_0 をとって示したものである。いうまでもなく、 X_v/Y_0 が十分に大きい場合を考えているため(β)形や(γ)形の発生はない。

図16は $G=0, B_2=0.1$ の場合の例であり、(α)形と(ε)形または(α)形と(δ)形との境界曲線は、図10

Fig. 14 Boundary curves between types of (α) and (β) and between types of (β) and (γ) for various values of X_v/Y_0

Fig. 15 Boundary curves between types of (α) and (β) and between types of (β) and (γ) for various values of B_2

Fig. 16 Occurrence regions of several types of limit cycles for $G=0, B_2>0$ and $X_v/Y_0=\infty$

Fig. 17 Occurrence regions of several types of limit cycles for $G \neq 0$, $B_2 > 0$ and $X_v/Y_0 = \infty$

Fig. 19 Occurrence regions of several types of limit cycles for $G = 0$, $B_2 > 0$ and $\Delta X_v/Y = 0$

Fig. 18 Occurrence regions of several types of limit cycles for $G \neq 0$, $B_2 > 0$ and $X_v/Y_0 = \infty$

で述べたように $B_1 < 0$ の範囲のみに存在し, $x_{D0}/Y_0 = x_{Du}/Y_0$ を満たすこの境界曲線と $Y/Y_0 = 1$ の直線の間には s 形, u 形のリミットサイクルが発生するため, 図示のように (ii) 形の範囲では (δ) 形が, (iii) 形の範囲では (α)- Tu 形が発生する領域となる。

図 17, 18 は最大静止摩擦力が孤立点となる場合の例であり, (α) 形と (ε) 形または (δ) 形の境界曲線と $x_{D0}/Y_0 = x_{Du}/Y_0$ を満たす s 形または u 形の発生境界曲線とは一致しない。 $B_2 > 0$ の図 18 の場合には (α) 形の境界曲線は, B_1 の正の範囲から負の範囲にかけて存在し, かつ $B_1 \leq 0$ では s 形または u 形の境界曲線の下側に生ずるので, (ii) 形の領域で (α)- TUs 形が, (iii) 形の領域で (α)- TU 形が新たに発生することになる。

図 18 の場合には, (α) 形と (ε) 形または (δ) 形との境界曲線並びに s 形または u 形の発生境界曲線はいずれも $B_1 > 0$ の領域内で発生する。そして前者の (α) 形の境界曲線は縦軸に平行な $B_1 = \text{一定}$ の直線と 2 点

で交わる場合が生じ得るため, この場合には Y/Y_0 のある中間速度区間では (ε) 形となり, リミットサイクルが発生しない速度領域が存在し得ることを示している。

図 16~18 において, 各図の上枠に付した矢印位置の B_1 の値を固定し, 他の摩擦特性の特性値を一定として移動面速度 Y_0 を変化させる場合には, リミットサイクルの発生形態はこの矢印位置の縦軸に平行な直線上で行われることになる。

6.2 X_v/Y_0 が小さい場合 X_v/Y_0 が小さくなると $x_{IV}/Y_0 > x_A/Y_0$ を満たす場合が生じうる。図 19 は図 15 の中の一つを抜き出して発生形態変化図として示したものである。

7. 振幅変化特性

6 章の発生形態変化図から, 次に発生するリミットサイクルの振幅変化特性について考察してみよう。

図 20 は $B_1 < 0$, $B_2 > 0$ かつ X_v/Y が十分に大きいとき, 最大静止摩擦力が孤立点とならない $G = 0$ の場合と孤立点となる $G \neq 0$ の場合について, 移動面速度の増加に対する位相面上の定常振動解の変化のようすを示したものである。 B_1 が負の領域で付した図 16 の 2 個, および図 17 の 3 個の矢印を縦軸に平行に上から下にたどるときの形態変化である。図の下側には一部の振幅特性の変化のようすが摩擦特性折れ線と対比して定性的に示されている。縦軸は変位両振幅 $A_x = (x_{\max} - x_{\min})/Y_0$ を, 横軸は移動面速度 Y_0 に比例する量を示す。 Y_0 の小さいときを前報と同様に誇張的に示すために, 横軸は対数的に取られており, 摩擦速度特性とは折れ点速度位置のみを一致させて示した。

図 21 は最大静止摩擦力が孤立点となる $G \neq 0$ のとき, 特性折れ線が上に凸形の特性を示す場合 ($B_1 > 0$,

Fig. 20 Trajectories of limit cycles in the $x-y$ plane for $G=0$ and $G \neq 0$ and the amplitude-velocity curves Fig. 21 Amplitude-velocity curves of limit cycles for $B_1 > 0$, $B_2 < 0$ when $G \neq 0$

$B_2 < 0$ の振幅速度特性である。図 18 に関連して前述したように、中間速度領域で振幅が零となる場合が存在し得ることを示している。

これらの図によれば、最大静止摩擦力が孤立点となるかどうか、発生する定常振動解の形態変化に著しい影響を与えることがわかる。

8. 結 言

以上、2本の折れ線近似の摩擦特性から取られる定常振動解の発生形態について分類し、それらの発生条件と発生範囲を摩擦力の五つの特性値と移動面速度を用いて明らかにするとともに、振幅変化のようすを示した。次に結論のいくつかを要約すると、

(1) 発生する定常振動解は、(i)形～(iii)形による区別と、(a)形～(e)形による区別の組合せのほかに、 T , TU , Tu , TUs などの記号を付記することにより、発生形態をより正確に示すことができる。

(2) 各種形態の発生境界条件を求める場合、発生形態の判別予測図を用いると便利である。

(3) (i)形、(ii)形、(iii)形間の発生境界曲線が、 B_1-Y/Y_0 平面および $Z-Y/Y_0$ 平面において示された。また(a)形と(e)形または(a)形と(d)形の発生境界曲線が、最大静止摩擦力の孤立点の度合 G を考慮して、求められた。滑り運動のみからなる s 形、 u 形の定常振動解の発生境界条件式が与えられ、発生境界曲線が B_1-Y/Y_0 平面および B_1-B_2 平面で示された。さらに、(a)形と(b)形並びに(b)形と(c)形の境界曲線の一例が $\Delta X_0/Y$ や B_2 を副変数として B_1-Y/Y_0 平面に示された。

(4) 最大静止摩擦力の孤立点の度合 G と低摩擦特性か高摩擦特性かを示す $\Delta X_0/Y$ の値を考慮していくつかの定常振動発生形態変化図が B_1-Y/Y_0 平面で示された。いうまでもなく、 $\Delta X_0/Y = \infty$ では(b)形や(c)形は発生しない。

(5) 位相平面上での定常振動解の形態変化の一例が示され、それに対応する振幅変化特性が与えられた。これにより、最大静止摩擦力の孤立点の度合いによって、複数個の定常振動解をもつ移動面速度領域が存在したり、定常振動解の発生しない中間速度領域が存在しうることが明らかにされた。

文 献

- (1) Oden, J. T. and Martins, J. A. C., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **52**(1985), 527-634.
- (2) 杉本隆尚, 潤滑, **20**-10(1975), 834-842.
- (3) 高野英資・張祥永, 新潟大学工学部研究報告, No. 35(1986), 1-9.
- (4) 高野英資・佐伯暢人, トライボロジスト, **37**-12(1992), 990-996.
- (5) 高野英資, 機論, **33**-253(1967), 1352-1362.
- (6) 高野英資, 機論, **33**-253(1967), 1362-1374.
- (7) 高野英資・石橋達弥, 機論, **38**-316(1972), 3148-3157.
- (8) 高野英資・石橋達弥, 機論, **38**-316(1972), 3158-3166.
- (9) 高野英資・大矢吉仁・佐伯暢人, 機論, **57**-540, C(1991), 2539-2547.
- (8) 高野英資・大矢吉仁・佐伯暢人, 機論, **58**-547, C(1992), 910-917.
-