コントローラの演算時間による遅れを考慮した 離散時間可変構造オブザーバの設計*

小野 貴彦^{*1}, 石原 正^{*2}, 猪岡 光^{*2}

Design of a Variable Structure Observer for Discrete-Time Systems Considering the Computation Delay

Takahiko ONO, Tadashi ISHIHARA and Hikaru INOOKA

It is well known that a discrete-time variable structure observer can be designed by reducing the design problem to an output feedback control problem. This approach, however, is valid only for a restricted class of plants. Considering the computation delay, we propose a new method for direct design of a discrete-time variable structure observer. The proposed design method reduces an observer design problem to a state feedback control problem after a coordinate transformation. A numerical example is presented to show that proposed method can be applied to a problem that cannot be designed by reducing to an output feedback control problem.

Key Words: Digital Control, Computer Control, Observer, Time Delay, Sliding Mode, Variable Structure System

1. はじめに

現在までに、連続時間可変構造オブザーバの設計法がいくつか提案されている^{(1)~(4)}。これらのオブザーバでは、出力の推定誤差、あるいはその線形結合の符号に応じてオブザーバゲインを高速に切り換えることが要求される。デジタル計算機を用いてこれらのオブザーバを実現する場合には、切り換えに遅れが生じるため、チャタリングが発生することが多い。この問題の改善法として、連続関数に基づく切り換え則によりオブザーバゲインを切り換える方法が考えられるが、どのような連続関数に置き換えるのが最適なのかは必ずしも明らかではない。デジタル計算機の使用を前提にするのであれば、離散時間系として可変構造オブザーバを直接設計することにより、この問題を解決することが考えられる。しかしながら、連続時間系に対して用いられている設計手法の多くは、連続関数に基づく切り換え則を用いない限り、離散時間系に対しては適用できない。唯一、可変構造オブザーバの

設計を出力フィードバック可変構造制御系の設計問題に帰着させる方法が適用可能であるが、この手法を適用できる制御対象のクラスは限られる。

本論文では、コントローラの演算時間による遅れを考慮した離散時間モデルに基づく新しい予測型の離散時間可変構造オブザーバの設計法を提案する。この設計法は出力フィードバック制御系の設計問題に単純に帰着させる方法を採用せず、状態フィードバックによる安定化問題のように扱うことに特徴がある。適用可能な制御対象のクラスに制約があるが、出力フィードバック制御系の設計問題に帰着させる方法を用いることができない場合でも適用可能な場合があり、離散時間可変構造オブザーバの設計における問題点を緩和する意味で有用である。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第2章では、本論文で用いるコントローラの演算時間による遅れを考慮した離散時間モデルについて述べる。第3章では、出力フィードバックによる安定化問題に帰着させる設計法の問題点を明らかにした上で、新しい設計法を提案する。第4章では、出力フィードバック制御系の安定化問題に帰着させる方法を適用できない倒立振り子・台車システムの制御問題を取り上げ、本論文で提案した設計法が有効で

* 原稿受付 1997年7月22日。

^{*1} 正員, 東北大学大学院 (☎ 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

^{*2} 正員, 東北大学大学院情報科学研究科。

あることを数値例により明らかにする。第5章はまとめである。

2. 演算時間の遅れを考慮した離散時間モデル

線形定常な連続時間系の制御対象について考える。

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \quad t \geq 0 \quad (1.a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.b)$$

ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ はそれぞれ状態、入力、出力ベクトルであり、 C は行フルランク、 (C, A_c) は可観測とする。予測型オブザーバに基づくコントローラでは、コントローラの演算時間 δ が、サンプリング周期 h に対して $\delta > h$ であるとき、制御対象入出力側のサンプリング時刻にずれが生じるため、演算時間の影響が制御特性に現れる。特に可変構造系では、このような演算時間による遅れがチャタリングを発生させる要因となるため、遅れを考慮して設計することが重要である。本論文では、演算時間が $h < \delta \leq 2h$ であるときを考える。演算時間遅れに対処する方法としては、制御系設計モデルとして、入力に遅れを伴う離散時間モデル⁽⁷⁾、あるいは歪サンプリングに基づく離散時間モデル⁽⁸⁾を用いる方法が知られている。本論文ではこのうち、入力に遅れを伴う離散時間モデルを用いてオブザーバを設計する。

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1 u_{k-1} + B_2 u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.a)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.b)$$

ここで、各係数行列は、

$$A = e^{A_c h}, \quad B_1 = \int_{h-\delta}^h e^{A_c \tau} d\tau B_c, \quad B_2 = \int_0^{h-\delta} e^{A_c \tau} d\tau B_c$$

であり、 $\bar{\delta} = \delta - h$ である。

3. 離散時間可変構造オブザーバの設計

離散時間モデル (2) 式を考慮して、予測式を次のように定義する場合について考える。

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B_1 u_{k-1} + B_2 u_k + H_s u_{s,k} \quad (3.a)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k \quad (3.b)$$

ここで、 $H_s \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ($p \leq l$) は設計パラメータであり、 $u_{s,k}$ は予測値を真値へ収束させるための修正項である。この修正項は、次に示す誤差方程式に対して $\tilde{x}_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となるように、測定可能な $\tilde{y}_k$ の関数として設定する。

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + H_s u_{s,k} \quad (4.a)$$

$$\tilde{y}_k = C\tilde{x}_k \quad (4.b)$$

ただし、 $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$ である。これより、予測式を (3) 式で定義すると、オブザーバの設計問題、すなわち H_s と $u_{s,k}$

の設定問題は、出力フィードバックによる安定化問題として扱うことができる。そこで、可変構造オブザーバの一設計法として出力フィードバック可変構造制御理論⁽³⁾⁽⁶⁾に基づく方法が考えられる。しかし、この理論は制約が非常に厳しいため、適用できる制御対象のクラスが限られる。本論文では、このような問題点を考慮し、出力フィードバックによる安定化問題に帰着する方法はとらず、それとは異なる新しいオブザーバ設計法を提案する。

まず、離散時間モデル (2) 式が次の形式で表されている場合について考える。

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{21} \\ \bar{B}_{22} \end{bmatrix} u_k \quad (5.a)$$

$$y_k = [0 \quad I] \begin{bmatrix} z_k^t \\ y_k^t \end{bmatrix}^t \quad (5.b)$$

ただし、ある行列 M に対して、

$$\bar{A}_{11} = M\bar{A}_{21} \quad (6)$$

の関係があるものとする。 y_k , u_{k-1} , u_k が既知であることを考慮して、予測式を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1} &= \bar{A}_{11} \hat{z}_k + \bar{A}_{12} y_k + \bar{B}_{11} u_{k-1} \\ &\quad + \bar{B}_{21} u_k + M H_s u_{s,k} \end{aligned} \quad (7.a)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} &= \bar{A}_{21} \hat{z}_k + \bar{A}_{22} y_k + \bar{B}_{12} u_{k-1} \\ &\quad + \bar{B}_{22} u_k + H_s u_{s,k} \end{aligned} \quad (7.b)$$

ここで、 $H_s \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ($p \leq l$) は設計パラメータである。 $u_{s,k}$ は予測値を真値に収束させるための修正項であり、次に示す誤差方程式に対して $\tilde{z}_k, \tilde{y}_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となるように設定する。

$$\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}_{11} \tilde{z}_k + M H_s u_{s,k} \quad (8.a)$$

$$\tilde{y}_{k+1} = \bar{A}_{21} \tilde{z}_k + H_s u_{s,k} \quad (8.b)$$

ただし、 $\tilde{z}_k = \hat{z}_k - z_k$, $\tilde{y}_k = \hat{y}_k - y_k$ である。 $u_{s,k}$ は測定可能な $\tilde{y}_k$ の関数でなければならないことを考えると、(8) 式から $\tilde{z}_k, \tilde{y}_k \rightarrow 0$ とする $u_{s,k}$ を求めることは困難である。しかし、(6) 式を考慮すると、 $\tilde{z}_{k+1} = M\tilde{y}_{k+1}$ の関係が成立するので、 $k \geq 1$ に対しては、誤差方程式 (8) 式を次のように低次元化して表すことができる。

$$\tilde{z}_k = M\tilde{y}_k \quad (9.a)$$

$$\tilde{y}_{k+1} = A_s \tilde{y}_k + H_s u_{s,k} \quad (9.b)$$

ただし、 $A_s = \bar{A}_{21} M$ である。(9.a) 式より、 $\tilde{y}_k \rightarrow 0$ であれば $\tilde{z}_k \rightarrow 0$ となる。したがって、修正項 $u_{s,k}$ は (9.b) 式に対して、 $\tilde{y}_k \rightarrow 0$ となるように設定すればよい。これより、離散時間モデルが (5)(6) 式の形式で与えられるとき、予

測式を(7)式で定義すれば、オブザーバの設計問題を状態フィードバックによる安定化問題のように扱うことができる。この場合、出力フィードバック理論を適用するときに問題となる制約は受けない。

離散時間モデル(2)式が、(5)(6)式の形式で表されていない場合は、変数変換を行うことにより(5)(6)式の形式で表すことができる。この変数変換を命題1に示す。

[命題1] (2)式の離散時間モデルに対して、次の変換を行う。

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MC + NCA^{-1} \\ C \end{bmatrix} x = Tx \quad (10)$$

ただし、 M, N は $\text{rank } T = n$ とするものである。このとき、離散時間モデルは(5)式の形式で表され、かつこの M に対して(6)式の関係が成立する。

(証明) (10)式の変数変換により、離散時間モデルが(5)式の形式になることは明らか。そこで、(6)式が成立することを示す。 T および A を次のように表す。

$$T = \begin{bmatrix} W \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$W = MC + NCA^{-1}$ より、 $WA = MCA + NC$ が成立する。これを分割して表すと次のようになる。

$$WA = [M(C_1A_{11} + C_2A_{21}) + NC_1 \quad M(C_1A_{12} + C_2A_{22}) + NC_2] \quad (12)$$

ここで、 $\bar{A}T = TA$ を分割することにより得られる

$$\bar{A}_{21}W_1 + \bar{A}_{22}C_1 = C_1A_{11} + C_2A_{21} \quad (13-a)$$

$$\bar{A}_{21}W_2 + \bar{A}_{22}C_2 = C_1A_{12} + C_2A_{22} \quad (13-b)$$

を(12)式に代入し整理すると、

$$WA = [M\bar{A}_{21} \quad M\bar{A}_{22} + N]T \quad (14)$$

となる。 CA についても同様な手順により、

$$CA = [\bar{A}_{21} \quad \bar{A}_{22}]T \quad (15)$$

として表すことができるので、(14)(15)式と $\bar{A} = TAT^{-1}$ の関係を考慮して $\bar{A}$ を求めると次のようになる。

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} M\bar{A}_{21} & M\bar{A}_{22} + N \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

したがって、(6)式が成立する。□

(10)式の変数変換が可能であるためには、 $\text{rank } T = n$ を満たすように M, N を選ぶ必要がある。しかし、すべての制御対象に対して、 $\text{rank } T = n$ を保証する M, N が存在するとは限らない。そこで、この変数変換が可能であるための必要十分条件を補題1に示す。

[補題1] 離散時間モデル(2)式に対して、(10)式の変数変換が可能であるための必要十分条件は、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = n \quad (17)$$

が成立することである。

(証明) (必要性の証明) (10)式より変換行列 T は、

$$T = \begin{bmatrix} M & N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

と表すことができる。 C は行フルランクであるから、

$$\text{rank } T \leq \min \left\{ \text{rank} \begin{bmatrix} M & N \\ I & 0 \end{bmatrix}, 2l, n \right\} \quad (19)$$

である。 $2l < n$ の場合は $\text{rank } T < n$ であるため、 $\text{rank } T = n$ の条件に反する。これより、少なくとも $2l \geq n$ である必要がある。このとき、(17)式が成立する。

(十分性の証明) T がフルランクであるとき、 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して次の関係が成立する。

$$\text{rank } T = n$$

$$\iff \begin{bmatrix} M & N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \end{bmatrix} a = 0 \text{ ならば, } a = 0.$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \end{bmatrix} a = 0 \text{ ならば, } a = 0.$$

$$\iff \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \end{bmatrix} = n$$

ところで、(17)式が成立するとき、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \end{bmatrix} = n \quad (20)$$

であるから、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & N \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & N \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

ここで、 $l \geq n/2$ であることを考慮すると、 N は正方形行列、あるいは横長の行列である。したがって、行フルランクとなるように N を選ぶことによって、 $\text{rank } T = n$ が成立する。これより、(17)式が成立するとき、 $\text{rank } T = n$ とする M, N が存在する。□

補題1とその証明から次の結果が得られる。i) (10)式の変数変換が可能であるためには、少なくとも $l \geq n/2$ でなければならない。ii) 変換行列 T のフルランク性を決定づけるのは、 N であり M には依存しない。制御対象の出力数 l と状態数 n との関係を表しているi)は、特に重要な結果であり、この変数変換が可能であるための目安を表している。

(注意1) (5)式に対して、オブザーバを設計する方法は、最小次元オブザーバの導出手順と似ている。最小次元オブザーバでは出力の推定値 $\hat{y}$ は不要であるが、可変構造オブザーバでは、 $\hat{y}$ に応じてオブザーバゲインを切り換

えるため、 $\hat{y}$ が必要である。この点が大きく異なる。このような $\hat{y}$ の必要性から、 z の予測式のほかに、 y の予測式を定義する必要がある。本論文では $\hat{x}_k = T^{-1}[\hat{z}_k^t \hat{y}_k^t]^t$ とおくことにより、可変構造オブザーバを全状態オブザーバとして導出している。

(注意 2) (17) 式は可観測指数が 2 であることを意味している。このような制御対象に対しては、高々 1 ステップで状態を予測する有限整定オブザーバを構成できる。実際、 M は変換行列 T のランクを決定づける行列ではないため、 $M = 0$ とおくことができ、また $H_s = 0$ とすれば、 $k = 1$ のときに $\hat{z}_2 = 0$ 、 $\hat{y}_2 = 0$ にすることができる。

低次元化された誤差方程式 (9-b) 式に対して、可変構造制御理論に基づき、 $\tilde{y}_k \rightarrow 0$ とする $u_{s,k}$ を求める。切り換え関数 S_k は $\tilde{y}_k$ の関数として定義する。

$$S_k = G \tilde{y}_k \quad (22)$$

ただし、 $G \in \mathbb{R}^{p \times l}$ は、誤差システム (9-b) 式が $S_k = S_{k+1} = \dots = 0$ の状態にあるとき、安定であるように、すなわち $\tilde{y}_k \rightarrow 0$ となるように設定する。等価制御法によれば、次のシステムを安定にするものとして決定される⁽⁵⁾。

$$\tilde{y}_{k+1} = [A_s - H_s(GH_s)^{-1}G(A_s - I)] \tilde{y}_k \quad (23-a)$$

$$G \tilde{y}_k = 0 \quad (23-b)$$

ここで、 (A_s, H_s) が可制御性となるように H_s を選べば、このシステムを安定にする G は存在する。 G の設定では、これまでに提案された切り換え関数の設定法がそのまま適用できるので、その設定は非常に容易である。

(23) 式を安定にする G に対して、修正項を

$$u_{s,k} = -(GH_s)^{-1}G(A_s - I)\tilde{y}_k - (GH_s)^{-1}F_s S_k - (GH_s)^{-1}F_{sw} \tilde{y}_k \quad (24)$$

と与える。(24) 式の第一項は等価入力に相当する部分である。また、 F_s は 1 以下の正数を対角要素にもつ対角行列であり、この値を適切に選べば、 S_k を漸近収束させることができる。

$$F_s = \text{diag}\{f_{s1}, \dots, f_{sp}\}, \quad 0 < f_{si} \leq 1 \quad (25)$$

F_{sw} は $\tilde{y}_k$ に応じて要素 f_{ij} ($i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, l$) が変化する時変型の行列である。ただし、 f_{ij} は正数 f_i^o ($i = 1, \dots, p$) に対して $-f_i^o, 0, f_i^o$ のいずれかの値をとるものとする。この $u_{s,k}$ に対して、 F_{sw} の要素 f_{ij} を適切に切り換えると、予測値は真値に収束する。この切り換え則を次に示す。

[命題 2] (23) 式のシステムを安定にする G に対して、 F_{sw} の要素 f_{ij} を次のように決定する。このとき、予測値は真値に収束する。

$$f_{ij} = \begin{cases} f_i^o & \text{for } (1 - f_{si})S_{i,k} \text{sgn}(\tilde{y}_{j,k}) > J_{i,k} \\ 0 & \text{for } (1 - f_{si})|S_{i,k}| \leq J_{i,k} \\ -f_i^o & \text{for } (1 - f_{si})S_{i,k} \text{sgn}(\tilde{y}_{j,k}) < -J_{i,k} \end{cases} \quad (26)$$

ただし、

$$J_{i,k} = \frac{1}{2} f_i^o \|\tilde{y}_k\|_1 \quad (27)$$

であり、 $\|\cdot\|_1$ は 1-ノルムを表す。

(証明) $\tilde{y}_k \rightarrow 0$ であれば推定誤差は 0 になる。そこで、この必要十分条件である $S_k \rightarrow 0$ を示す。正定関数 V_k を

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^t S_k \quad (28)$$

と定義する。 $S_k \rightarrow 0$ の条件は、 $V_{k+1} < V_k$ である。

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \frac{1}{2} S_{k+1}^t S_{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left\{ \left(\sum_{j=1}^l f_{ij} \tilde{y}_{j,k} \right)^2 - 2(1 - f_{si})S_{i,k} \sum_{j=1}^l f_{ij} \tilde{y}_{j,k} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (1 - f_{si})^2 S_{i,k}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left\{ \left(\sum_{j=1}^l |f_{ij}| |\tilde{y}_{j,k}| \right)^2 - 2(1 - f_{si})S_{i,k} \sum_{j=1}^l f_{ij} \tilde{y}_{j,k} \right\} \\ &\quad + \max\{(1 - f_{si})^2 : i = 1, \dots, p\} V_k \\ &= \sum_{i=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^l J_{i,k} |f_{ij}| |\tilde{y}_{j,k}| - \sum_{j=1}^l (1 - f_{si})S_{i,k} f_{ij} \tilde{y}_{j,k} \right\} \\ &\quad + \max\{(1 - f_{si})^2 : i = 1, \dots, p\} V_k \\ &\leq \max\{(1 - f_{si})^2 : i = 1, \dots, p\} V_k \\ &< V_k \end{aligned} \quad (29)$$

これより、予測値は真値に収束する。 $\square$

任意の正数 f_i^o に対して、 $S_k \rightarrow 0$ が達成されるが、この条件だけでは、全てのサンプリングステップで $F_{sw} = 0$ となり、オブザーバが線形構造となる場合がある。オブザーバが可変構造となるためには、 $(1 - f_{si})|S_{i,k}| > J_{i,k}$ を満たすように f_i^o の値を設定する必要がある。ここで、 G の要素を g_{ij} で表すと、 $|S_{i,k}|$ について次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} |S_{i,k}| &\leq \sum_{j=1}^l |g_{ij}| |\tilde{y}_{j,k}| \\ &\leq \max\{|g_{ij}| : j = 1, \dots, l\} \|\tilde{y}_k\|_1 \end{aligned} \quad (30)$$

これより、 $(1 - f_{si})|S_{i,k}| > J_{i,k}$ とするためには、 f_i^o は少なくとも次の範囲のものでなければならない。

$$0 < f_i^o < 2(1 - f_{si}) \max\{|g_{ij}| : j = 1, \dots, l\} \quad (31)$$

予測値を $\hat{x}_k = T^{-1} [\hat{z}_k^t \hat{y}_k^t]^t$ と定義する. (24) 式を (7) 式に代入し整理すると, 可変構造オブザーバは次のように与えられる.

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B_1 u_{k-1} + B_2 u_k + (H + H_{sw})[y_k - \hat{y}_k] \quad (32\cdot a)$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k \quad (32\cdot b)$$

ただし,

$$H = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} + MH_s(GH_s)^{-1}[G(A_s - I) + F_s G] \\ \bar{A}_{22} + H_s(GH_s)^{-1}[G(A_s - I) + F_s G] \end{bmatrix},$$

$$H_{sw} = T^{-1} \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} H_s(GH_s)^{-1} F_{sw}$$

であり, F_{sw} の要素 f_{ij} は (26) 式で決定される.

(32) 式に示す可変構造オブザーバは, $\hat{z}_k = M\hat{y}_k$ の関係が成立する $k \geq 1$ に対して有効である. そのため, (32) 式により計算される $\hat{x}_1$ を予測値として適用すると, システムの過渡応答が悪化する場合がある. その場合には, $\hat{z}_1 = M\hat{y}_1$ を満たす $\hat{x}_1$ を何らかの方法で求めることが望ましい. このような $\hat{x}_1$ は, 次式により与えられる.

$$\hat{x}_1 = A_o \hat{x}_0 + B_1 u_{-1} + B_2 u_0 + H_o y_0 \quad (33)$$

ただし,

$$A_o = A - H_o C, \quad H_o = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} + MF \\ \bar{A}_{22} + F \end{bmatrix}$$

であり, F は A_o を安定にするものである.

(注意 3) 本論文で提案した設計法が適用可能であるための条件は, 離散時間モデルが (5)(6) 式の形式で記述できることである. この条件は, 誤差方程式が (9) 式のように低次元化できるための条件であり, 可変構造系を実現可能にするための条件ではない. 出力フィードバック理論による設計法の適用条件が, 可変構造系を実現可能するための条件であることを考えると, 本論文で提案した設計法と出力フィードバック理論に基づく設計法とは異なるものであることがわかる. したがって, 適用できる制御対象のクラスも異なる.

4. 数 値 例

倒立振り子・台車システムの安定化について考える. 台車の位置及び振り子の傾き角を $z[m]$, $\theta[rad]$ とすると, システムの運動方程式は次のように記述できる.

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{z}(t) + ml \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) \\ = -\eta \dot{z}(t) + ml \sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t)^2 + Gu(t) \end{aligned} \quad (34\cdot a)$$

$$\begin{aligned} ml \cos \theta(t) \cdot \ddot{z}(t) + (J + ml^2)\ddot{\theta}(t) \\ = -\xi \dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) \end{aligned} \quad (34\cdot b)$$

各パラメータの値を次に示す.

$$G = 3.180 [N/V], \quad g = 9.807 [m/s^2]$$

$$M = 6.280 \times 10^{-1} [kg], \quad J = 1.155 \times 10^{-3} [kg \cdot m^2]$$

$$\eta = 4.010 [kg/s], \quad \xi = 1.003 \times 10^{-4} [kg \cdot m^2/s]$$

$$m = 4.735 \times 10^{-2} [kg], \quad l = 2.465 \times 10^{-1} [m]$$

設計対象とする離散時間モデル (2) 式は, 運動方程式 (34) 式を $\theta = 0$ 近傍で線形化し, 状態ベクトルを

$$x(t) = [z(t) \ \theta(t) \ \dot{z}(t) \ \dot{\theta}(t)]^t \quad (35)$$

と定義して得られる線形定常な連続時間モデルに対して, サンプル周期を $h = 0.01[s]$, 演算時間による遅れを $\bar{\delta} = 0.008[s]$ として離散化して求める. システムの出力は, $(y_1, y_2) = (z, \theta)$ とする. 制御入力, 離散時間モデル (2) 式を u_{k-1} の項を含まない拡大系のモデルに変換してから決定する. 予測値 $\hat{x}$ を用いると, 次のようになる.

$$u_k = -L_1 \hat{x}_k - L_2 u_{k-1} \quad (36)$$

ただし, L_1, L_2 は拡大系モデルに対し, 閉ループ系の極が $0.996 \pm j0.071, 0.936, 0.943, 0$ となるように設定する.

このシステムに対しては, 出力フィードバックによる安定化問題に帰着する方法でオブザーバを設計することはできない. しかし, (17) 式の条件を満たすので, (32) 式のオブザーバは設計可能である. そこで, $\hat{x}_k$ は (32) 式により決定する. 変数変換に必要な M, N および H_s を次のようにおく.

$$M = N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_s = [0 \ 1]^t \quad (37)$$

切り換え関数, つまり G を $G = [1 \ 1]$ と設定する. このとき, (23) 式のシステムの極の絶対値は, $0.939, 0$ となるので安定である. $F_s = 1.0 \times 10^{-10}$ とすると, f° の上限はおおよそ 2 となるので, $f^\circ = 1$ とする. $\hat{x}_1$ は (33) 式により

Fig. 1 Inverted pendulum system

 Fig. 2 Time responses of z , θ , $\dot{z}$ and $\dot{\theta}$

 Fig. 3 Time history of $S = G\tilde{y}$

求める。ただし、 F は A_o の固有値が0.20, 0.25, 0.30, 0.35となるように設定する。

可変構造オブザーバを有する制御系に対し、初期値を

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 2]^t, \quad u_{-1} = 0, \quad \hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^t \quad (38)$$

としてシミュレーションを行う。図2と図3に状態の時間応答と切り換え関数 S の変化を示す。切り換え関数 S の値は、制御対象の出力側のサンプリング時刻において評価されるので、本来は離散的に得られるものであるが、図3では直線で補間して示した。 S の値が0.1～0.2[s]の間で増加しているのは、 θ の増大に伴い、非線形成分が大きくなったことが原因であると考えられる。0.3[s]以降、 S の値はほぼ0となっており、またシステムも安定になっていることから、可変構造オブザーバにより十分な精度で状態量が予測されていることがわかる。また $F_s \approx 0$ としていることから、 S_k の収束はオブザーバゲインの切り換えにより達成されている。

5. おわりに

本論文では、コントローラの演算時間による遅れを考慮した離散時間可変構造オブザーバの新しい設計法を提

案した。出力フィードバックによる安定化問題に帰着させる方法と同様に、提案した方法でも適用可能な制御対象が限定されるが、離散時間可変構造オブザーバの構成可能な制御対象のクラスを拡大できたと言える。数値例では、出力フィードバックによる安定化問題に帰着させる方法が適用できない現実的な問題として、倒立振り子・台車システムの制御問題を取り上げ、提案した設計法が有効であることを示した。今後、より広いクラスの制御対象に対して適用可能な設計法について考察する必要がある。

文 献

- (1) B. L. Walcott and S. H. Žak, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications", *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics*, Vol. 18, No. 1, pp. 88-104, 1988.
- (2) S. H. Žak, J. D. Brehove and M. J. Corless, "Control of uncertain systems with unmodeled actuator and sensor dynamics and incomplete state information", *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics*, Vol. 19, No. 2, pp. 241-257, 1989.
- (3) S. H. Žak and S. Hui, "Output feedback variable structure controllers and state estimators for uncertain/nonlinear dynamic systems", *IEE Proc. D*, Vol. 140, No. 1, pp. 41-50, 1993.
- (4) S. Sangwongwanich, T. Yonemoto, T. Furuhashi and S. Okuma, "A sliding observer for robust flux estimation of induction motors and its characteristics", *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 27, No. 7, pp. 792-799, 1991.
- (5) K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system", *Systems & Control Letters*, 14, pp. 145-152, 1990.
- (6) C. Y. Chan, "Application of output feedback to discrete quasi-sliding mode control systems", *Control-Theory and Advanced Technology*, Vol. 10, No. 1, pp. 111-120, 1994.
- (7) G. F. Franklin, J. D. Powell and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd ed., Addison-Wesley publishing company.
- (8) D. Williamson, *Digital Control and Implementation*, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.