スクイズ膜圧理論と放射圧理論の統一*

(第1報, 支配方程式の導出およびスクイズ膜圧と Rayleigh 放射圧の関係)

橋 場 邦 夫^{*1}, 寺 尾 憲^{*2}, 久 納 孝 彦^{*2}A Generalization of Squeeze Film Theory and Acoustic Radiation Theory
(1st Report, Fundamental Equation and Relationship between
Squeeze Film Pressure and Rayleigh Radiation Pressure)

Kunio HASHIBA, Ken TERAOKA and Takahiko KUNOH

The theory of squeeze film pressure and the theory of acoustic radiation pressure have been generalized to a new theory in this study. When the two flat faces are separated by a compressible fluid film, a dynamic pressure is generated in their normal direction by the oscillation of the faces. One of the authors derived a fundamental equation for the phenomenon considering both the inertia and the viscosity of the fluid. In case of neglecting the inertia effects and assuming the isothermal change, the equation is reduced to the Reynolds equation used in the conventional lubrication theory. In this paper, an analytical solution of the Reynolds equation on the adiabatic squeeze film is presented. The results show that compressibility effects of the fluid are dominant at high squeeze numbers. The relationship between the squeeze film pressure and Rayleigh radiation pressure is also investigated theoretically.

Key Words: Fluid Dynamics, Lubrication, Acoustic, Squeeze Film, Radiation Pressure, Rayleigh Radiation Pressure, Adiabatic Change

1. 緒 言

二つの平行板が急接近する際、両板間の流体に圧力が発生する現象が見られる。これは古くからスクイズ膜効果として知られており、その特性はスクイズ膜軸受やスクイズ膜ダンパなどに関連して重要な問題である。このスクイズ膜圧を考える際には、慣性力を無視した Reynolds 方程式から出発し、変動圧力および粘性力の非線形成分による時間平均的な負荷容量が計算される。流体がニュートン流体の場合、この粘性力の非線形性は速度こう配の2次以上の成分に起因する。圧縮性スクイズ膜に関しては流体の状態変化を等温変化と仮定した解析が主となっており、負荷容量は Pan⁽¹⁾ および小野⁽²⁾ が解析的に求めているほか、Salbu⁽³⁾ が差分法を用いて計算している。

一方、著者らは超音波振動面近傍における物体浮揚現象に関して、音の放射圧を基にした浮揚理論を提案している⁽⁴⁾⁽⁵⁾。この浮揚現象は、物体が不導体であっても浮揚可能であるという特長を有しており、非接触

の物体搬送や非接触駆動式超音波モータなど、強力超音波の新興技術の手段として注目されている。放射圧には Langevin 放射圧と Rayleigh 放射圧とがあり、音場の境界条件によって分類されるが、別の見方をすれば、Langevin 放射圧は慣性力の非線形効果、Rayleigh 放射圧は媒質の状態変化の非線形効果として現れると考えられる。しかし、この超音波浮揚現象においては、振動面と浮揚物体間に形成される気体膜は厚さが非常に薄く、粘性力も顕著に現れると考えられるため、浮揚力発生の機構および浮揚特性を明らかにするには、放射圧理論の適用に際し、膜内に発生する粘性力の非線形性の影響を調べる必要がある。音の放射圧に関しては、現在もなお論議があるが、詳細は文献に委ねる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

さて、スクイズ膜特性においても流体膜が厚く、接近速度が大きい場合には流体慣性力の影響が顕著となり無視できない。この場合、負荷容量は慣性力と粘性力の非線形成分として現れると考えられる。この種の問題は非圧縮性流体を対象にした研究^{(8)~(12)}が多く、圧縮性流体を対象とした研究は春山ら⁽¹³⁾の研究に見られる程度である。しかし、春山らの研究においても解析は線形解を求めるにとどまっている。また、圧縮性スクイズ膜圧理論において仮定されている流体の

* 原稿受付 1997年5月19日。

^{*1} 正員, 日本学術振興会特別研究員, 慶應義塾大学大学院(☎223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*2} 正員, 慶應義塾大学理工学部。

等温変化は、スクイーズ速度が低・中速というあいまいな条件から適用されており、その適用条件あるいは圧縮性スクイーズ膜特性に対する流体の状態変化の影響について調べたものはない。さらに、圧縮性スクイーズ膜に対する流体慣性力および状態変化の影響は、それらの物理的意味から Langevin 放射圧および Rayleigh 放射圧にそれぞれ関係づけられると思われるが、これらを放射圧の観点から論じたものはない。

そこで本研究では、急接近する平行な二平面間の圧縮性流体の圧力を対象として、スクイーズ膜圧理論と放射圧理論の関係を調べ、両理論を統一した、より一般的な理論の構築を試みる。これによって、振動面近傍における超音波浮揚力の発生機構や圧縮性スクイーズ膜における流体慣性力および状態変化の影響などに関して、基礎的な知見が得られると考えられる。本報では、まず慣性、粘性、圧縮性および断熱変化をすべて考慮したスクイーズ膜の支配方程式を導出する。また、流体の状態変化として断熱変化を仮定した Reynolds 方程式を用い、圧縮性スクイーズ膜特性に及ぼす流体の状態変化の影響について理論的に明らかにする。さらに、この状態変化の影響と Rayleigh 放射圧との関係について理論的に調べ、Rayleigh 放射圧の観点から圧縮性スクイーズ膜特性を考察する。

2. 記 号

- f : 負荷容量
 F : 無次元負荷容量 $= f/\pi r_0^2 p_0$
 h : 膜厚 $= h_0 - h_1 e^{i\omega t}$
 h_0 : 平均膜厚
 h_1 : 振動面の変位振幅
 H : 無次元膜厚 $= h/h_0 = 1 - \varepsilon e^{i\tau}$
 p : 圧力
 p_0 : 大気圧
 p_a : 時間平均的な圧力
 P : 無次元圧力 $= p/p_0$
 P_a : 無次元時間平均圧力 $= p_a/p_0$
 r : 半径方向座標
 r_0 : 膜半径
 R : 無次元半径方向座標 $= r/r_0$
 Re : Reynolds 数 $= \rho_0 \omega h_0^2 / \mu$
 t : 時間
 u : 半径方向粒子速度
 U : 無次元半径方向粒子速度 $= u/\varepsilon \omega r_0$
 w : 膜厚方向粒子速度
 W : 無次元膜厚方向粒子速度 $= w/\varepsilon \omega h_0$
 z : 膜厚方向座標

- Z : 無次元膜厚方向座標 $= z/h_0$
 α_t : 対流項の厚さ方向の平均値
 α_t : 非定常項の厚さ方向の平均値
 $\chi = \sqrt{-i\sigma_c/\gamma}$
 ε : 振動面の無次元振幅 $= h_1/h_0$
 γ : 比熱比
 μ : 粘性係数
 ρ : 密度
 ρ_0 : 基準状態の密度
 σ_c : スクイーズ数 $= 12\mu\omega r_0^2/p_0 h_0^2$
 τ : 無次元時間
 ω : 角振動数
 Ψ : 無次元変動圧力
 $\bar{\quad}$: 時間平均
 $\langle \quad \rangle$: 厚さ平均

3. 支配方程式の導出

図1に示されるような、平行二円板間に形成される軸対称の圧縮性流体膜について考える。円板の表面は平坦であり、下面は固定され、上面が面外方向に一樣に正弦振動するものとする。円形流体膜下面の中心を原点とし、これより上面の方向に z 軸をとった円筒座標系を考える。このとき、流体膜の軸対称性から円周方向の粒子の運動はない。また、膜厚は非常に薄いので膜厚方向の圧力分布は一樣であるとする。この種の問題を考えるとき、従来の圧縮性スクイーズ膜圧理論では流体慣性力を無視し、流体の状態変化としておもに等温変化を仮定している。しかしここでは、流体慣

Fig. 1 Squeeze of compressible fluid disc

性力の非線形性および状態変化の非線形性により生じる放射圧も考慮するため、基礎方程式として以下のような Navier-Stokes 方程式、連続の式および状態方程式を考える。

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (4)$$

なお、圧縮性流体の熱伝導率が非常に小さいことと振動面の振動速度が非常に速い場合には、流体膜と外部との熱の出入りがほとんど生じないことから、流体媒質の状態変化は断熱変化を仮定しているが、 $\gamma = n(n$ はポリトロプ指数)とすれば式(4)はポリトロプ変化を仮定した際の状態方程式になり、圧縮性流体のさまざまな状態変化に対応できる。また境界条件は以下のようなになる。

$$z=0 \text{ のとき } u=0, w=0$$

$$z=h \text{ のとき } u=0, w=dh/dt$$

$$r=0 \text{ のとき } \partial p/\partial r=0$$

$$r=r_0 \text{ のとき } p=p_0$$

無次元量 $U = u/\varepsilon\omega r_0$, $P = p/p_0$, $\tau = \omega t$, $R = r/r_0$, $W = w/\varepsilon\omega h_0$, $Z = z/h_0$ および式(4)を用いて式(1)～(3)を無次元化すると

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \frac{12}{\varepsilon\sigma_c} \frac{\partial P}{\partial R} + ReP^{1/\gamma} \left\{ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \varepsilon \left(U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (1)'$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial Z} \quad \dots\dots\dots (2)'$$

$$\frac{\partial P^{1/\gamma}}{\partial \tau} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial R}(RP^{1/\gamma}U) + \frac{\partial}{\partial Z}(P^{1/\gamma}W) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)'$$

のようなになる。ここで σ_c はスクイーズ数, Re は Reynolds 数, γ は比熱比, ε は無次元化された振幅である。また境界条件は無次元量を用いて次のように表される。

$$Z=0 \text{ のとき } U=0, W=0$$

$$Z=H \text{ のとき } U=0, W=\frac{1}{\varepsilon} \frac{dH}{d\tau}$$

$$R=0 \text{ のとき } \partial P/\partial R=0$$

$$R=1 \text{ のとき } P=1$$

ここで、膜厚が非常に薄いことから式(1)'の慣性項は厚さ方向の平均で考え、非定常項および対流項を

$$a_t \equiv \left\langle \frac{\partial U}{\partial \tau} \right\rangle = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial U}{\partial \tau} dZ$$

$$a_i \equiv \left\langle U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right\rangle = \frac{1}{H} \int_0^H \left(U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right) dZ$$

のように表すと式(1)'は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = \frac{12}{\varepsilon\sigma_c} \frac{\partial P}{\partial R} + ReP^{1/\gamma}(a_t + \varepsilon a_i) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となり、右辺はもはや Z の関数ではなくなる。両辺を Z で積分し、 U の境界条件を用いると U は次式のように表される。

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{12}{\varepsilon\sigma_c} \frac{\partial P}{\partial R} + ReP^{1/\gamma}(a_t + \varepsilon a_i) \right\} (Z^2 - HZ)$$

さらに上式より U の厚さ方向の平均 $\langle U \rangle$ は

$$\langle U \rangle = -\frac{H^2}{12} \left\{ \frac{12}{\varepsilon\sigma_c} \frac{\partial P}{\partial R} + ReP^{1/\gamma}(a_t + \varepsilon a_i) \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。

同様に式(3)'についても厚さ方向の平均をとり、これに式(2)'を代入すると

$$\frac{\partial P^{1/\gamma}}{\partial \tau} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial R}(RP^{1/\gamma}\langle U \rangle) + P^{1/\gamma} \left\langle \frac{\partial W}{\partial Z} \right\rangle \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

のようなになる。上式左辺の第三項は境界条件から

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial Z} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon H} \frac{dH}{d\tau}$$

と表せるので、式(7)は次のようになる。

$$\frac{\partial P^{1/\gamma}}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial R}(RP^{1/\gamma}\langle U \rangle) + \frac{P^{1/\gamma}}{H} \frac{dH}{d\tau} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

これに式(6)を代入し、整理すると

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(P^{1/\gamma}H) = \frac{\partial}{\partial R} \left[RP^{1/\gamma}H^3 \left\{ \frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\varepsilon Re}{12} P^{1/\gamma}(a_t + \varepsilon a_i) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。通常は $\varepsilon \ll 1$ となる場合が多いので、 $\varepsilon^2 Re$ の項は省略し、式(9)は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(P^{1/\gamma}H) = \frac{\partial}{\partial R} \left\{ RP^{1/\gamma}H^3 \left(\frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\varepsilon Re}{12} P^{1/\gamma} a_t \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)は粘性と慣性を考慮した圧縮性流体膜に関する支配方程式である。

ここで εRe の値が非常に小さく、 εRe を含む項が省略できる場合は、流体の慣性力を無視できる場合に相当する。このとき式(10)は

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(P^{1/\gamma}H) = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\partial}{\partial R} \left(RP^{1/\gamma}H^3 \frac{\partial P}{\partial R} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。式(11)は、断熱変化を仮定した圧縮性スクイ

ーズ膜に関する Reynolds 方程式であり, $\gamma=1$ とした場合には等温変化を仮定した圧縮性スクイーズ膜に関する Reynolds 方程式に帰着する^{(1)~(3)}.

4. 圧縮性スクイーズ膜圧の理論解析

4.1 概要 従来の圧縮性スクイーズ膜に関する研究は, 小野の研究⁽²⁾に見られるように等温変化を仮定しているものがほとんどである. しかし, この仮定はスクイーズ面の速度が低速あるいは中速のときに成り立つ仮定であり, 超音波振動などを用いた場合には断熱変化を仮定するのが妥当であると思われる⁽¹⁴⁾.

そこで本章では, 式(11)をもとに流体の状態変化として断熱変化を仮定した場合の時間平均的に発生する負荷容量を求め, 流体の状態変化が圧縮性スクイーズ膜特性に及ぼす影響について考察する.

4.2 負荷容量の計算 式(11)をもとに負荷容量を求める. まず式(11)を

$$\frac{\gamma+1}{\gamma} \sigma_c \frac{\partial}{\partial \tau} (P^{1/\gamma} H) = \frac{\partial}{R \partial R} \left\{ R \frac{\partial}{\partial R} (P^{(\gamma+1)/\gamma} H^3) \right\} \quad \dots\dots\dots (11)'$$

のように変形し, 両辺の時間平均をとる. このとき圧力および膜厚の変化が周期的であることから, 左辺は

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} (P^{1/\gamma} H) d\tau = (P^{1/\gamma} H)_{\tau=2\pi} - (P^{1/\gamma} H)_{\tau=0} = 0$$

となり, 結局次式のようになる.

$$\frac{d}{RdR} \left\{ R \frac{d}{dR} (\overline{P^{(\gamma+1)/\gamma} H^3}) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

上式を $R=0$ のとき $P<\infty$, また $R=1$ のとき $P=0$ といった境界条件を用いて積分すると

$$\overline{P^{(\gamma+1)/\gamma} H^3} = \overline{H^3} \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる. ここで無次元圧力 P が

$$P = 1 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

のように表せるものとし, 無次元膜厚 H を $H=1+H_1$ とする. これらを式(13)に代入し, P および H に関して4次以下の項を省略し, 整理すると

$$\overline{P_2} + \frac{1}{2\gamma} \overline{P_1^2} + 3\overline{P_1 H_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

のようになる. したがって, 時間平均的に発生する圧力 p_a を大気圧 p_0 で無次元化した無次元時間平均圧力 P_a は

$$P_a = \frac{p_a}{p_0} = \overline{P} - 1 = \overline{P_2} = -\frac{1}{2\gamma} \overline{P_1^2} - 3\overline{P_1 H_1} \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる. ここで P_1 は変動圧力の線形解である. また, H_1 が比較的大きいときには P_a は近似的に

$$P_a = -\frac{\frac{1}{2\gamma} \overline{P_1^2} - 3\overline{P_1 H_1}}{1 + 3\overline{H_1^2}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表される.

膜全体による負荷容量 f はこれらの P_a を次式に代入すれば得られる.

$$\left. \begin{aligned} f &= \pi r_0^2 p_0 F \\ F &\equiv 2 \int_0^1 P_a R dR \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで, $F(=f/\pi r_0^2 p_0)$ は時間平均的に現れる無次元化された負荷容量である.

4.3 変動圧力の計算 式(15)および(16)からわかるように, スクイーズ膜効果から発生する時間平均的な負荷容量は変動圧力の線形解を用いて表される. そこで, 本節では式(11)をもとに変動圧力の線形解を求める. まず式(11)に

$$\begin{aligned} P &= 1 + \phi(R) e^{i\tau} \\ H &= 1 - \varepsilon e^{i\tau} \end{aligned}$$

を代入し, 2次以下の項を省略すると次式が導かれる.

$$\frac{d}{RdR} \left(R \frac{d\phi}{dR} \right) - \frac{i\sigma_c}{\gamma} \phi = -i\varepsilon\sigma_c \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式の解は $R=0$ のとき $\Psi<\infty$ の条件から, 積分定数 C を用いて

$$\phi = C J_0(\chi R) + \varepsilon \gamma \quad \dots\dots\dots (19)$$

と書かれる. ここで χ は

$$\chi = \sqrt{-\frac{i\sigma_c}{\gamma}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と表される無次元量であり, 波数と膜半径の積に相当する因子である. $R=1$ のとき $\phi=0$ の条件から C を決定すると, 無次元変動圧力は次式のようになる.

$$\phi = \varepsilon \gamma \left\{ 1 - \frac{J_0(\chi R)}{J_0(\chi)} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また, 式(15)および(16)はそれぞれ

$$P_a = \frac{3}{2} \varepsilon |\phi| - \frac{1}{4\gamma} |\phi|^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$P_a = \frac{\frac{3}{2} \varepsilon |\phi| - \frac{1}{4\gamma} |\phi|^2}{1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

のようになる.

4.4 解析結果および考察 流体の慣性力を無視した場合, スクイーズ膜特性は式(11)からもわかるようにスクイーズ数 σ_c , 無次元化された振幅 ε および比熱比 γ によって決定される. ε は圧力振幅に比例し, σ_c と γ によって圧力分布が決定される. そこでまず, 圧縮性流体として空気 ($\gamma=1.4$) を仮定し, さまざまなスクイーズ数における変動圧力の分布を示すと図2のようになる. この図から, σ_c が大きくなるにつれ, 圧縮性の影響が顕著となり, 圧力分布は膜全体にわたり $|\phi|/\varepsilon\gamma=1$ となるようすがわかる. $\sigma_c > 3000$ では膜

Fig. 2 Radial distribution of squeeze film pressure for various squeeze number (In the case of adiabatic change $\gamma=1.4$)

Fig. 5 Radial distribution of time average value of pressure ($\varepsilon=0.5$)

Fig. 3 Radial distribution of squeeze film pressure for various squeeze number (In the case of isothermal change $\gamma=1.0$)

Fig. 6 Squeeze film force and squeeze number relations for various driving amplitude of the wall

Fig. 4 Central pressure and squeeze number relations for adiabatic change and isothermal one

の総面積の約8割以上が圧力一様となっており、この場合、圧縮性流体膜は近似的に膜厚方向の一次元空間として取扱うことができる。したがって、この場合膜の形状はスクイーズ膜特性に無関係になることが予測される。また、 σ_c が比較的小さいときは非圧縮性流体を用いた場合の圧力分布に近くなり、変動圧力はおもに粘性の効果によって現れる。

流体の状態変化を等温変化、すなわち $\gamma=1$ とみなした場合には、圧力分布は図3のようになる。図2お

よび3を比較すると圧力分布そのものに大きな相違はみられない。そこで、それぞれの状態変化における膜中心部の圧力を σ_c に対して示すと図4のようになる。この図から、 σ_c が小さい場合には両者に差はほとんどないことがわかる。しかし、 σ_c の増加に伴って断熱変化を仮定した場合の圧力の方が等温変化を仮定した場合のそれよりも大きくなり、 $\sigma_c \rightarrow \infty$ では比熱比に比例する。このことから、スクイーズ面の速度が高速の場合でも σ_c が小さければ等温変化を仮定してもよいと考えられる。しかし、通常はスクイーズ面の速度が高速になれば σ_c も大きくなるので、定量的な評価の際には注意が必要である。

一方、時間平均的に発生する負荷容量は式(17)および(23)を用いて計算される。まず $\varepsilon=0.5$ のときの無次元時間平均圧力 P_a の分布を図5に示す。これを見ると、 P_a の分布は圧力分布とほぼ等しいことがわかる。 $\sigma_c \rightarrow \infty$ では圧縮性のみが支配的であり、 P_a の分布は膜全体に一様になることが予想される。このことから負荷容量は σ_c が小さいときは粘性力の非線形性から生じ、 σ_c が十分大きいときは流体の圧縮性の非線形効果から生じるといえる。

次に ε をパラメータにとり、無次元負荷容量 F を

σ_c に対して示すと図6のようになる。この図から、 σ_c の増加に伴い F の値は大きくなり、その傾向はどの ε に対しても同様であること、また、 $\sigma_c \rightarrow \infty$ では F の値は一定値に収束することなどがわかる。さらに、 σ_c に対する F の変化率は $\sigma_c=10$ 付近で大きく変化している。このような傾向も前述したように、 σ_c の増加に伴い、負荷容量の発生原因が粘性力の非線形性から圧縮性の非線形効果へ移り変わっていくためと考えられる。

5. 圧縮性スクイーズ膜圧と

Rayleigh 放射圧の関係

4章から、スクイーズ数が非常に大きい場合の圧縮性スクイーズ膜特性は流体の圧縮性あるいは状態変化の非線形性が支配的になることが明らかになった。また Salbu は、スクイーズ数が非常に大きいときのスクイーズ膜内の流体の挙動は同相ピストン運動を受ける密閉空間内のそれと同等になるとしている⁽³⁾。これらを放射圧理論に立脚して考えれば、状態変化の非線形性によって生じる放射圧は Rayleigh 放射圧であり、スクイーズ膜特性における流体の圧縮性の影響は Rayleigh 放射圧と関連づけられると考えられる。そこで本章では、まず放射圧に関する基礎的な概要を簡単に述べ、次いで Salbu の提案した圧縮性スクイーズ膜の近似モデルの妥当性について理論的に考察する。さらにこれらを通して、圧縮性スクイーズ膜圧と Rayleigh 放射圧の関係について考える。

音場内に置かれた物体には一方向の力が働く。これは音の放射圧による現象であり、古くから音響非線形現象として知られている。放射圧は音場の境界条件によって2種類に分類される。図7(a)に示すように音波の存在する領域と存在しない領域が接触しているような、いわゆる開放空間においては Langevin 放射圧

が発生する。一方、図7(b)のように密閉空間内に音波が満ちているような場合には、Rayleigh 放射圧が発生する。このように両者の違いは音場の境界条件によって示され、一般に開放空間では周囲の大気圧と平衡をとるため、密閉空間において側壁に作用する圧力、いわゆる側圧分だけ Langevin 放射圧は Rayleigh 放射圧よりも小さくなる。また、それぞれの放射圧の導出過程をみると、Langevin 放射圧は慣性力の非線形効果として、また Rayleigh 放射圧は音響媒質の状態変化の非線形効果として現れるとも考えられる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

一方 Salbu⁽³⁾ によれば、スクイーズ数が非常に大きい場合、スクイーズ膜内に流体の流れは生じず、流体の挙動は図8に示すような一次元密閉シリンダ内でピストン振動を受け、単に圧縮・膨張を繰り返す流体の挙動に近くなるとしている。また、このときの流体の挙動は Boyle の法則に従うとして、 $PH=1$ の条件から負荷容量が求められている。

本研究では、流体の状態変化として断熱変化を仮定しているため、 $PH=1$ の条件は

$$PH^\gamma = 1 \quad \dots\dots\dots (24)$$

と書き改められる。いま $H=1+H_1$ として上式に代入し、 P を H_1 で Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} P &= (1+H_1)^{-\gamma} \\ &= 1 - \gamma H_1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} H_1^2 \\ &\quad - \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{6} H_1^3 + \dots \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。したがって、時間平均的に発生する圧力は4次以下の項を省略して

$$P_a = \bar{P} - 1 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \overline{H_1^2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

のようになる。ここで $H_1 = -\varepsilon e^{it}$ とすると、 P_a は

$$P_a = \frac{\gamma+1}{4} \varepsilon^2 \gamma \quad \dots\dots\dots (27)$$

と表される。上式中の $\varepsilon^2 \gamma$ はポテンシャルエネルギー

(a) Langevin radiation pressure (b) Rayleigh radiation pressure

Fig. 7 Classification of radiation pressure

Fig. 8 Salbu's model of squeeze film at high squeeze numbers

一密度を大気圧で無次元化したものに等しい。

以上のような時間平均的に発生する圧力の導出過程は、密閉空間という仮定および計算過程が Rayleigh 放射圧を導く際のもものと全く同じであり、流体の状態変化の非線形性を考慮したものである。したがって Salbu の考えに従えば、スクイーズ数が非常に大きい場合、負荷容量は近似的に Rayleigh 放射圧によるものと見なしでもよい。

ここで、 $\sigma_c \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 1$ として式(16)から時間平均的に発生する圧力を求めると、 $|\phi| \rightarrow \epsilon \gamma$ となるので

$$P_a = \frac{1}{2} \epsilon^2 \gamma \dots\dots\dots (28)$$

となる。式(27)と(28)を比較すると、 $\epsilon^2 \gamma$ にかかる係数が異なる。この違いは式(27)および(28)を導く際のそれぞれの境界条件の違いによるものと考えられる。放射圧の立場からみると、開放空間で生じる Langevin 放射圧には媒質の非線形性を表すパラメータである比熱比 γ がその係数に含まれてこない。これは媒質の非線形性によって生じる圧力は静圧の増加のみに寄与し、周囲が開放されている場合には、この静圧は周囲圧力と平衡をとるために消滅するためと説明される⁽⁶⁾。式(27)と(28)からそれぞれ求められる P_a の差は

$$\frac{\gamma+1}{4} \epsilon^2 \gamma - \frac{1}{2} \epsilon^2 \gamma = \frac{\gamma-1}{4} \epsilon^2 \gamma$$

であり、この値は Rayleigh 放射圧によって側壁に作用する側圧の値に等しい⁽¹⁵⁾。このことから、周囲が開放されているスクイーズ膜に関して負荷容量を求める際には、膜厚が非常に薄くても完全な密閉空間とみなすことはできず、膜境界における圧力平衡を考慮する必要がある。以上のことから、圧縮性スクイーズ膜圧における圧縮力の非線形成分と Rayleigh 放射圧は、それらの結果および物理的意味からして、根本的に異なるものであるといえる。

6. 結 言

本研究では、圧縮性流体を対象とした平行二面の急接近問題に関して、スクイーズ膜圧理論と放射圧理論の統一を試みた。すなわち、流体の断熱変化を仮定し、慣性と粘性をもとに考慮して支配方程式を導いた。この支配方程式は Reynolds 数が無視できるほど小さい場合には Reynolds 方程式に帰着する。

また、この断熱変化を仮定した際の Reynolds 方程式を用い、圧縮性スクイーズ膜圧の特性について理論的に調べた結果、以下のことが明らかとなった。

(1) スクイーズ数が増加するにつれて、膜内の変

動圧力および時間平均的に発生する圧力の分布は一樣になる。

(2) スクイーズ数が非常に小さいとき、負荷容量は粘性力の非線形性により生じ、スクイーズ数が非常に大きいとき、負荷容量は圧縮性の非線形性により生じる。

(3) 断熱変化を仮定したときの負荷容量は等温変化を仮定したときのそれより大きくなる。

さらにスクイーズ膜圧と Rayleigh 放射圧の関係について考察した結果、次のような結論を得た。すなわち、スクイーズ数が非常に大きいとき、膜内の流体の挙動はそれが密閉シリンダ内でピストン運動を受ける場合と等しいと考えるならば、負荷容量は Rayleigh 放射圧によるものと考えてよい。しかし実際には、スクイーズ数は非常に大きくなりえても、スクイーズ膜を完全な密閉空間とみなすことはできず、膜境界における圧力平衡を考慮する必要がある。この意味において、スクイーズ膜圧と Rayleigh 放射圧は根本的に異なるものである。

今後は本研究で導かれた支配方程式に基づき、流体の慣性力がスクイーズ膜圧に及ぼす影響、さらにスクイーズ膜圧と Langevin 放射圧の関係について検討する予定である。

本研究の実施にあたっては、平成8年度文部省科学研究費補助金特別研究員奨励費および萌芽的研究(課題番号:08875051)の補助を受けた。ここに謝意を表す。

文 献

- (1) Pan, C.H.T., On Asymptotic Analysis of Gaseous Squeeze-Film Bearings, *Trans. ASME, Ser. F*, **89-3** (1967), 245-253.
- (2) 小野京右, 圧縮性スクイーズ膜に関する基礎研究, 潤滑, **21-9** (1976), 589-597.
- (3) Salbu, E.O.J., Compressible Squeeze Films and Squeeze Bearings, *Trans. ASME, Ser. D*, **86-2** (1964), 355-366.
- (4) 橋場邦夫・寺尾憲・久納孝彦, 超音波浮揚に関する基礎研究, 機論, **61-590, C** (1995), 3931-3936.
- (5) 橋場邦夫・寺尾憲・久納孝彦, 超音波浮揚に関する研究(浮揚理論の構築と浮揚特性の解明), 機論, **63-614, C** (1997), 3487-3495.
- (6) 長谷川高陽, ランジュバン放射圧に関する統一理論, 日本音響学会誌, **52-3** (1996), 187-194.
- (7) 長谷川高陽, レーリー放射圧に関する新しい理論, 日本音響学会誌, **52-6** (1996), 429-435.
- (8) Terrill, R.M., The Flow Between Two Parallel Circular Disks, One of Which is Subject to a Normal Sinusoidal Oscillation, *Trans. ASME, Ser. F*, **91-1** (1969), 126-131.
- (9) Tichy, J. A. and Winer, W. O., Inertial Considerations in Parallel Circular Squeeze Film Bearings, *Trans.*

- ASME, Ser. F, **92**-4 (1970-10), 588-592.
- (10) Elkouh, A. F., Fluid Inertia Effects in Non-Newtonian Squeeze Films, *Trans. ASME, Ser. F*, **98**-3 (1976-7), 409-411.
- (11) 黒田成昭・堀幸夫, スクイズフィルムの研究—流体慣性力の影響の考察—, 潤滑, **21**-11 (1976), 740-747.
- (12) 春山義夫・森淳暢・森美郎・三上房男・風巻恒司・守田範夫, スクイーズ膜特性に及ぼす流体慣性力の影響 (正弦波状スクイーズ運動の振幅が大きい場合の近似解法の精度の検討), 機論, **54**-500, C (1987), 919-925.
- (13) 春山義夫・風巻恒司・森美郎・吉澤慎一, スクイーズ膜特性に及ぼす流体慣性力の影響, 機論, **52**-476, C (1985), 1435-1441.
- (14) 早坂壽雄・吉川昭吉郎, 音響振動論, (1974), 707-710, 丸善.
- (15) 実吉純一・菊池喜充・能本乙彦, 超音波技術便覧, (1978), 427-435, 日刊工業新聞社.
-