支点の鉛直変動による単振子の振動制御*

川 辺 尚 志^{*1}, 飯 田 哲 徳^{*2}, 吉 田 和 信^{*3}Vibration Control of a Single Pendulum by Vertical Movement
of a Pivot Attached to a Cart

Hisashi KAWABE, Tetsunori IIDA and Kazunobu YOSHIDA

The vibration control problem of a single pendulum system has been investigated by the vertical movement of a pivot attached to a cart. Since the dynamic equation of the pendulum mounted on a cart is generally a nonlinear time-variant system including the angular acceleration $\ddot{\theta}(t)$ in the system parameter, a VSS control scheme having a 4 type switching logic is presented using the Lyapunov's method. By optimally designing the switching plane ($s=0$) and by linearly approximating the discontinuous function $\text{sgs}(s)$ characterizing the VSS near the plane $s=0$ (i. e., in the optimal range $|s| \leq 0.3$), satisfactory active damping effects can be obtained both from simulating and practical points of view. Furthermore, in addition to the robust damping effect related to the VSS control, there exists the amplitude-dependent damping that is effective even at larger amplitude.

Key Words: Pendulum, VSS, Vibration Control, Vertical Movement, Robustness

1. 緒 言

線形あるいは非線形プラントに対する能動的制振制御技術の研究がロバスト制御理論の発展とともに盛んである⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。これらの多くは線形化近似系での制振制御技術であり、非線形振動系まで踏み込んだロバスト制振制御技術に関するものは少ないように思われる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

非線形振動系の身近な例として振り子系がある。この制振制御法として振り子の重心を移動させる方法⁽⁸⁾とその支点を水平または鉛直に⁽⁹⁾変動させる方法等が挙げられる。特に後者の系に関しては、これまで谷ら⁽⁹⁾の双線形化法(2次形式安定化法)に基づいた制振制御法が紹介されている。しかし元来、支点変動型振り子系のダイナミクスはシステムパラメータに角加速度 $\ddot{\theta}(t)$ を含む時変系であるので、従来の線形化近似系に立脚した安定化設計法では十分な制振制御性能が得られているとは考えがたい。また振り子系でのロバスト制振性能に関する報告も非常に少ないように思われる。

本研究は、プラントの非線形性やパラメータ変動に対して不感な VSS (variable structure system) 制御則

を振り子系に適用して、支点変動による単振子の制振制御の有効性を数値シミュレーションおよび実機実験の両面から検討するものである。

結果として、実験条件は多少異なるが谷らの線形制御法に比べてかなり優れた制振性能が得られた。またパラメータを変動させても制振性の劣化はあまりみられなかった。

2. モデリングと制御則

2.1 制御対象のモデリング 図1の支点鉛直変動の振り子系の振動制御を考える。制御目的は、支点を鉛直に変動させて振り子を制振させることである。モデリングに必要な各パラメータは以下の通りである。

振り子系について

$J[\text{kgm}^2]$: 振り子の重心回りの慣性モーメント

$m[\text{kg}]$: 振り子の質量

$\ell_g[\text{m}]$: 支点から重心までの距離

$C[\text{Nms}]$: 軸の等価粘性係数

$\theta(t)[\text{rad}]$: 振り子の角変位

$\dot{\theta}(t)[\text{rad/s}]$: 振り子の角速度

$g[\text{m/s}^2]$: 重力加速度

台車系について

$J_M[\text{kgm}^2]$: モータ軸回りの慣性モーメント

$M_t[\text{kg}]$: 台車の質量

$M_c[\text{kg}]$: カウンターバランス質量

* 原稿受付 1997年8月6日。

^{*1} 正員, 広島工業大学工学部(〒731-5143 広島市佐伯区三宅2-1-1)。

^{*2} 学生員, 広島工業大学大学院。

^{*3} 正員, 島根大学総合理工学部(〒690-8504 松江市西川津町1060)。

F [Ns/m] : 駆動系の等価粘性係数

$x(t)$ [m] : 平衡点からの台車の鉛直変位

$\dot{x}(t)$ [m/s] : 台車の速度

$a(t)$ [V] : 入力電圧

次にこれらに基づいた Lagrange 法による振り子系のモデリングについて述べる。

系の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [(\ell_G \dot{\theta})^2 + \dot{x}^2 - 2\ell_G \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta] + \frac{1}{2} \frac{J_M}{r^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (M_t + M_c) \dot{x}^2 \quad (1)$$

ポテンシャルエネルギー U は

$$U = mg \ell_G (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

また損失エネルギー D は

$$D = \frac{1}{2} (F \dot{x}^2 + C \dot{\theta}^2) \quad (3)$$

従って、一般化座標 q_i , 外力 u_i に関する Lagrange 式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = u_i \quad (4)$$

より, $|\theta| \ll 1$ の条件で次の運動方程式が得られる。

θ 方向に関しては

$$(J + m \ell_G^2) \ddot{\theta} + mg \ell_G (1 - \ddot{x}/g) \theta + C \dot{\theta} = u_\theta = 0 \quad (5)$$

また x 方向に関しては

$$(M_t + M_c + m + \frac{J_M}{r^2}) \ddot{x} + F \dot{x} \approx u_x = \frac{\tau}{r} a(t) \quad (6)$$

となる。ここで τ はモータ入力電圧 $a(t)$ に対するトルク変換係数を, r はプーリの半径を示す。さらに

$$M = M_t + M_c + m + \frac{J_M}{r^2}, F = \frac{C_M}{r^2} + C_t \quad (7)$$

$$2\zeta\omega_p = \frac{C_p \ell_G}{J + m \ell_G^2}, \omega_p^2 = \frac{mg \ell_G}{J + m \ell_G^2} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{g} \ddot{x}, f_1 = \frac{F}{M}, f_2 = \frac{\tau}{Mgr} \quad (9)$$

の関係を用いると, 式(5),(6)は, 結局以下のようになる。

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_p \dot{\theta} + \omega_p^2 (1 - \ddot{y}) \theta = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{y} + f_1 \dot{y} = f_2 a(t) \quad (11)$$

式(9),(10)より,

$$\ddot{\theta} = -2\zeta\omega_p \dot{\theta} - \omega_p^2 \{1 + f_1 \dot{y}(t)\} \theta + \omega_p^2 f_2 \theta(t) a(t) \quad (12)$$

いま状態ベクトルを

$$x = [y, \dot{y}, \dot{\theta}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \quad (13)$$

とおくと, この振り子系ダイナミクスは結局次の時変系状態方程式として与えられる。

$$\dot{x} = A(x, t)x + b(x, t)a(t), \quad y_0 = C_0 x \quad (14)$$

但し

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -f_1 & 0 \\ 0 & -\omega_p^2 & -f_1 \omega_p^2 \theta(t) & -2\zeta\omega_p \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$b(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_2 & \omega_p^2 f_2 \theta(t) \end{bmatrix}^T, C_0 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Fig.1 Motion model of a pendulum attached to a cart M_t

2.2 1 ゲイン切り換え VSS 制御則 従来, 谷らにより双線形化法による振り子の安定化則が求められているが, ここでは特にロバスト制振性の検証を考慮してリアプノフ法に基づく 1 ゲイン切り換え VSS 制御則を適用する。切り換え関数 s を

$$s = Cx \quad (17)$$

$$C = [c_1, c_2, c_3, c_4] = [c_1, c_2, c_3, 1] \quad (18)$$

とする。リアプノフ関数候補を

$$V = s^2 / 2 \quad (19)$$

とするとき, $\dot{V} < 0$ の条件, すなわち

$$\lim_{s \rightarrow 0} \dot{V} = s \dot{s} < 0 \quad (20)$$

より, $s \rightarrow 0$ の切り換え面への漸近安定条件を求める。

$$\dot{s} = [-\omega_p^2, c_1 - c_3 f_1 - f_1 \omega_p^2 x_2, c_2 - 2\zeta\omega_p] [x_2, x_3, x_4]^T + (c_3 f_2 + \omega_p^2 f_2 x_2) a(t) = C_r x_r + da(t) \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} C_r &= [-\omega_p^2, c_1 + c_3 f_1 \omega_p^2 x_2, c_2 - 2\zeta\omega_p] \\ x_r &= [x_2, x_3, x_4]^T \\ d &= (c_3 f_2 + \omega_p^2 f_2 x_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

とおけるので結局次の 4 切り換え条件が得られる。

(i) まず, $s > 0, \dot{s} < 0$ すなわち $da(t) < -C_r x_r$ より

① $d > 0 : x_2 = \theta > -c_3 / \omega_p^2$ のとき

$$a(t) < \frac{-1}{d} C_r x_r = a_{\min} \quad (23)$$

② $d < 0 : x_2 = \theta < -c_3 / \omega_p^2$ のとき

$$a(t) > \frac{-1}{d} C_r x_r = a_{\max} \quad (24)$$

(ii) また $s < 0, \dot{s} > 0$ すなわち $da(t) > -C_r x_r$ より

① $d > 0 : x_2 = \theta > -c_3 / \omega_p^2$ のとき

$$a(t) > \frac{-1}{d} C_r x_r = a_{\max} \quad (25)$$

② $d < 0 : x_2 = \theta < -c_3 / \omega_p^2$ のとき

$$a(t) < \frac{-1}{d} C_r x_r = a_{\min} \quad (26)$$

で与えられる。さらに入力ゲイン U を

$$\left| \frac{-1}{d} C_r x_r(t) \right|_{\max} < U \quad (27)$$

のように選ぶと、上の4切り換え条件を満たす制御入力
は符号関数を用いると

$$a(t) = -U \operatorname{sgn}(s) \operatorname{sgn}\left(\theta + \frac{c_3}{\omega_p^2}\right) \quad (28)$$

で与えられる。ここに

$$\operatorname{sgn}(*) = \begin{cases} 1: * > 0 \\ 0: * = 0 \\ -1: * < 0 \end{cases} \quad (29)$$

この VSS 制御則による制振制御の位相面状態軌道は図2のようになるものと考えられる。 $\theta = \pi/6$ 振った状態からの減衰挙動を示すが、振動系の場合滑り面 ($s=0$) に到達後はゲイン U を相当大きくとらないと状態を滑り面に完全に拘束するのは難しく、 $s=0$ 面から一旦はなれた状態軌道は領域IVからIIIへと切り変わり、領域II到達時に一時的に滑り面に巻き付いて後再度離脱し、こうした挙動を繰り返しながら原点収束するものと考えられる (θ 軸上での切り換え面が $-c_3/\omega_p^2$ だけ原点からシフトしているが、 $c_3 \ll \omega_p^2$ に条件設定することで原点収束性が得られる)。ハイゲインフィードバック系は、高周波チャタリングの励起をはじめ特に操作量飽和が問題となる実機系では実現が難しい。従ってゲイン U はかなり抑制して設定するのが現実的である。そのため滑り面からの拘束力は多少弱くなり、状態軌道は $s=0$ 面から一時的には外れるが VSS 制御則により再度滑り面に巻き付きながら漸近安定収束するものと考えられる。なお振り子の安定収束性は当然切り換え面係数 $[c_1, c_2, c_3, 1]$ に依存するが、これらはシミュレーションより最適設定する。

なお実システムには図3に示すように、チャタリン

Fig.2 Switching gain and phase trajectory

Fig.3 Saturation function $\operatorname{sat}(s, L)$ with L being continuous extent

Fig.4 Scheme for the experimental apparatus

グ除去のため符号関数 $\operatorname{sgn}(*)$ を飽和関数 $\operatorname{sat}(*, L)$ に置き換えてその線形化勾配 $(1/L)$ を最適化 $^{(12)}$ したものを用いた。

$$a(t) = U \operatorname{sat}(s, L) \operatorname{sgn}\left(\theta + \frac{c_3}{\omega_p^2}\right) \quad (30)$$

ただし

$$\operatorname{sat}(s, L) = \begin{cases} 1 & : s > +L \\ (1/L)s & : |s| < L \\ -1 & : s < -L \end{cases} \quad (31)$$

3. 実験装置および方法

図4はJAPAN-EM製の倒立振り子を改造した支点移動型単振子制振制御システムの構成図を示す。振り子の振れ角 $\theta(t)$ および支点(台車)の鉛直方向変位 $x(t)$ はポテンシオメータ (b), (a) により検出する。鉛直方向の移動を円滑化するためカウンター重をベルトに取り付けた。この実機システムの各パラメータを同定すると表1のようになる。なお実機システムでの演算処理は PC-9801RX を用い、主プログラミングは Turbo C で、A/D

Table 1 Parameters used in the pendulum system

M_c	Equivalent mass of cart	4.4[kg]
τ	Torque vs voltage-exchanging coefficient	20.1[N/V]
F	Viscous damping factor in cart movement	19.2[Ns/m]
C	Viscous damping factor in pivot	4.9×10^{-4} [kgm ² /s]
J	Mass moment of inertia	2.14×10^{-3} [kgm ²]
ℓ_g	Distance from rotation axis to the center of gravity in pendulum	0.115[m]
$C_p \ell_g$	Viscous damping factor in axis rotation	4.9×10^{-4} [Nms]
m	Mass of pendulum	0.1[kg]
C_1	Voltage vs displacement-exchanging coefficient	21.7[V/m]
C_2	Voltage vs rotation-exchanging coefficient	3.34[V/rad]
r	Radius of pulley	0.375[m]
J_M	Mass moment of inertia in motor	3.463×10^{-3} [kgm ²]
$C_i + \frac{C_M}{r^2}$	Viscous damping factor in rotation axis	19.2[Ns/m]
M_C	Mass of counter-balance	5.32[kg]
ℓ	Length of pendulum	0.393[m]
g	Acceleration of gravity	9.8[m/s ²]

および D/A 変換はコンテック製を用いてマシン語で行った。サンプリング周期は $T=0.0044\text{sec}$ で、 $\dot{\theta}, \dot{x}$ の推定には(時系列的に 3 回平均した)差分法*を用いた。

4. 実験結果および考察

4.1 振り子の自由減衰振動 図 5 は振り子のみの自由減衰振動特性を示し、クーロン減衰が支配的である。従ってシミュレーションでは乾性摩擦力

$$f_c = -0.3 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (32)$$

を考慮して解析した。

Fig. 6 Simulation control of the pendulum θ under the design condition $c_2 = 5$.

Fig. 5 Free oscillation curve of the pendulum

4.2 制振シミュレーションおよび実機実験結果 図 6 は数値シミュレーション解析結果で、(a)は開回路特性を、(b)以下は制御入力 $U=3$ で切り換え係数を $C=[10,5,1,1]$ に設定した場合の開回路特性を示す。(a)、(b)を対比すると、振り子の振幅角 $\theta(t)$ は比較的良好に制振されていることが分かる。(b)、(c)における $x, \dot{x}$ は制御のための支点変動特性を示す。(d)は制御入力 $u(t)$ を示し、この場合には非連続入力関数特有の特性となっている。(e)は閉回路特性の位相面軌道特性を示し、図 2 で述べた傾向となっている。

図 7 は、実機制御面より支点変動範囲をある程度抑制する必要上 θ の係数を $c_2=5 \rightarrow 6$ に調整した場合である。VSS 特有の急激な入力切り換えに起因するモータ・

Fig. 7 Simulation control of the pendulum θ under the design condition $c_2 = 6$.

* 推定精度の良い VSS 観測器か非線形観測器⁽⁸⁾も考えられるが、短処理時間さからこの方法を用いた。

ジョイント部への負担を軽減するためである。

図 8 は $U=1.5$ に抑制し、非連続入力関数を滑り面近傍で連続化した場合（最適線形化幅⁽¹²⁾ $L=0.3$ ）のシミュレーション結果を示す。(d)の制御入力形状は線形化により平衡点近傍で滑らかになり、図 6、7 と比べてチャタリングも抑制されている。(e)を見ると線形化の影響で位相面軌道が図 7 に比べて多少ゆるやかになっているが、(b)から制振性は依然良好である。

この図 8 の制御条件を実機に適用した結果を図 9 に示す。初期振幅 $\theta=\pi/6$ からの結果で、図 8 のシミュレーション特性とほぼ同様の制御応答である（ x 特性に関しては極性が逆である）。また図説は略すが、振り子の先端に 30g の分銅を付加してもほぼ同程度の制振効果が維持された。(b)の多少歪んだ制振波形状からは非線形系にも有効な VSS 制御の特徴が現れており、大振幅領域からの制振が可能な振幅依存性制振効果を示すものと考えられる。これらは谷らの線形制御法にはない特徴であり、実際、VSS の方が大振幅域からのより効果的制振系となっている（SDC**方式で減衰能 $Q^{-1}=0.14\sim 0.15$ の振幅依存性を示す）。なお位相切り換えの関係から振り子の固有周期の約 2 倍の早さで制御力が切り換えられているが、これは振り子系の制振の特徴と考えられ、谷らの線形制御法にも見られる。

4.3 ゲイン切り換えと原点収束性 ここでの制御方式の特徴は、自由階層制御法⁽¹³⁾のように状態を最初から $s=0$ 面へ完全拘束を図るのではなく、絶えず安定

Fig.8 Simulation control of the pendulum θ by introducing the sat function

Fig.9 Real system-controlled response

化状態の方向にゲインを切り換えて原点に収束させることにある。図 10 は、切り換えゲイン $C=[10,6,1,1]$ に関して、リアプノフ関数 $V(s)$ の時変特性と位相面切り換え特性との関係を示す。同図(a)の時間軸上の記号①～⑥は同図(b)におけるゲイン切り換え位置に対応する。①で $s=0$ に完全拘束されれば以後 $V(s)=0$ となるが、状態は滑り面に一旦巻き付いた後(ゲインを抑えているため)すぐ離れて不安定モードとなり、②のゲイン切り換えで安定化モードに軌道修正され、③で滑り面に一旦拘束されるが再度離脱する。以後この繰り返しで原点に収束する。同図(a)に、 $V(s)$ のうち $\theta, \dot{\theta}$ 成分のみを抽出した V_θ 特性と、 $y, \dot{y}$ 成分のみを抽出した V_y 特性も示すが、これらのピーク量はゲイン切り換え毎に収束しており、状態の原点($\theta=\dot{\theta}=0, y=\dot{y}=0$)への収束が行われているものと考えられる。この点につき切り換え面上の極配置面よりさらに考察する。

図 10 のゲイン切り換え点①,③,⑤・・・では状態が一時的に滑り面に巻き付いた低次元化系

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (c_1+d_{33})c_1 & (c_1+d_{33})c_2 & c_1-c_2+d_{33} & 0 \\ 0 & -d_{32} & 0 & -d_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

** $n, n+1$ 番目目の振幅をそれぞれ A_n, A_{n+1} とする時、

$$SDC(\text{specific damping capacity})^{(14)} \text{では減衰能は} \quad Q^{-1} = (1/2\pi)(A_n^2 - A_{n+1}^2)/A_n^2 \quad (A-1)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{32} &= \frac{\omega_p^2}{1 + \omega_p^2 f_2 \theta}, d_{33} = -f_1 - \frac{c_1 - f_1 - f_1 \omega_p^2 \theta}{1 + \omega_p^2 f_2 \theta}, \\ d_{34} &= -\frac{c_2 - 2\zeta \omega_p}{1 + \omega_p^2 f_2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

になるものと考えられる ($s=0$ と等価入力を考慮)。
この場合の y, θ モードに関する極配置図を調べると、①では図 11(a)に示すように y は収束モードであるが(極 $= -4.293$)、 θ は発散モードとなっている(極 $= 2.389 \pm j2.544$)。また、同図(b)に示すように③に巻き付く時には θ は収束モードであるが(極 $= -2.105 \pm j2.947$)、 y は逆に発散モードである(極 $= +3.829$)。⑤では再び①と同様のモード (y 極 $= -8.263$, θ 極 $= 0.955 \pm j4.761$) となる。これは、どちらかが一方の目標に近づくとき他方が逆に遠ざかる挙動の繰り返しの中で全体としては収束トラジェクトリーである事を示す。これらの極の動きは図 10(a)の V_θ, V_y の時間的変動特性ともよく対応する。なお原点近傍では、 $y = -10, \theta = -0.1357 \pm j5.7042$ の安定化極になる。

5. 結 論

振り子の支点変動型制振制御を VSS 制御則で行った結果以下の結論と課題を得た。

- (1) 制御入力 $u(t) = -U \operatorname{sgn}(s) \operatorname{sgn}(\theta + c_3 / \omega_p^2)$ にお切り換えゲイン U をある程度抑制し、非連続関数 $\operatorname{sgn}(s)$ を切り換え面 ($s=0$) 近傍で線形化した飽和関数 $\operatorname{sat}(s, L)$ に置き換えることで良好な制振性が得られる。この場合線形化幅 $L=0.3$ に最適設定する必要がある。
- (2) ((1)の制振性に関連して)切り換え関数 s の係数を最適に調節する必要がある(本例では $C=[10, 6, 1, 1]$)。
- (3) ロバスト制振性(非線形(大)振幅領域からの制振やパラメータ変動に対する制振)は VSS の特徴と考えられ、制振効果も双線形化法より良い。
- (4) 振り子の角速度 $\dot{\theta}$ や支点速度 $\dot{x}$ の推定には処理時間の短い差分法を用いたが、精度の良い VSS オブザーバか非線形オブザーバの構築も検討中である。

文 献

- (1) 背戸, 計測と制御, 32-4(1993), 269-275.
- (2) 安田・池田, 機論, 59-562, C(1993), 1694-1701.
- (3) 王・野波・三平・美多, 機論, 57-533, C(1991), 196-202.
- (4) 吉田, 計測と制御, 32-4(1993), 276-283.
- (5) 川辺・吉田・池田, シミュレーション, 14-9(1995), 144-150.
- (6) 山浦・小野・長瀬, 機論, 58-549, C(1992), 1399-1405.
- (7) 野波・山口, 機論, 58-545(1992), 106-111.
- (8) Yoshida, K., Kawanishi, Kawabe, H., Proc. 1997 ACC, (1997), 3405-3410.
- (9) 谷・越後屋, 機論, 59- 564, C(1993), 2439-2443.
- (10) Slotine, J. J. Sastry, S. S., Int. J. Control, 382(1983), 465-492.
- (11) Slotine, J. J., Int. J. Robotics Research 2 (1985), 49-64.
- (12) 川辺・吉田・藤岡, シミュレーション, 14-4(1995) 300-310.
- (13) 例えば野波・田, スライディングモード制

Fig. 10 Relation between (a) Lyapunov function $V(s)$ and (b) phase trajectory

Fig. 11 Pole placements on the gain switching state ① (a) and ③ (b)

御, (1994), 83, コロナ.

- (14) Kawabe, H., Kuwahara, K., Bull. Jap. Soc. of Prec. Engg., 14-1(1980), 31-36.