柔軟構造物の振動制御系の設計法*

(Riccati 方程式の厳密解表現に基づくセンサ/アクチュエータの最適配置)

土 岐 仁^{*1}, 平 元 和 彦^{*1}, 秋 元 文 男^{*2}

A Design Method of a Vibration Control System for Flexible Structures (Optimal Sensor/Actuator Placement Using Explicit Solution of Riccati Equation)

Hitoshi DOKI, Kazuhiko HIRAMOTO and Fumio AKIMOTO

This paper deals with an optimal placement problem of sensors and actuators for active vibration control of flexible structures. For undamped flexible structures with collocated sensors and actuators, each solution of two generalized algebraic Riccati equations are obtained explicitly. Using these two solutions, it is shown that the stabilizing H_∞ suboptimal controller based on the normalized left coprime factorization approach can be synthesized directly for all candidates of the placement. The sensor/actuator placement problem which optimizes other closed-loop performance can be formulated easily by applying this H_∞ controller. As a design example, a placement problem which minimizes H_2 norm of the closed-loop transfer matrix using this H_∞ controller is considered for a cantilevered beam. The experimental results show the effectiveness of the sensor/actuator placement method stated in this paper.

Key Words: Flexible Structure, Vibration Control, Sensor/Actuator Placement, H_∞ Control, Normalized Coprime Factorization

1. 緒 言

柔軟構造物の振動を制御する手法として、構造物にセンサとアクチュエータを設置し、適当な制御則を用いて外部からエネルギーを投入することにより振動を抑制するアクティブ振動制御に関する研究が活発に行われている。

アクティブ振動制御系を設計する場合に問題となることの一つに、センサ/アクチュエータの最適な設置数や設置位置の決定法が未だ完全に確立されていないことが挙げられる。一般に、アクティブ振動制御を行うコントローラは、センサ/アクチュエータ配置を含む制御対象のモデルが定められた後に初めて設計可能であるため、最適な配置とコントローラを同時に決定することは不可能である。

本論文では、柔軟構造物のアクティブ振動制御系を設計する際のセンサ/アクチュエータの最適配置問題を考察する。近藤ら⁽¹⁾は、最適配置問題を LQ 制御における二次形式評価関数の最小化問題と定式化し、数理計量的手法を用いた配置決定法を提案している。Devasia ら⁽²⁾は、圧電センサ/アクチュエータの配置と、幅を設計パラメータとして閉ループ系の極の位置や、二次形式評価等の評価関数を最適化している。大日方ら⁽³⁾は、本来分布定数系である弾性振動系の有限次元近似モデルがセンサ配置の関数となることに着目し、周波数領域で近似誤差の小さくなる配置法を考察している。木澤ら⁽⁴⁾は、制御則を静的な出力フィードバックとし、感度解析的手法を用いて制御出力と操作量の二次形式評価関数を最適化するセンサ

/アクチュエータ配置とフィードバックコントローラの決定法を提案している。

以上挙げた研究報告例では、最初に配置候補を定めて制御対象のモデルを決定し、そのモデルに対してコントローラを設計してから閉ループ系を評価することを繰り返して最適な配置を求めているため、最適配置を決定する際の計算負荷は小さくない。

本論文では、センサ/アクチュエータ配置の最適化の下で、モード座標表現された不減衰系に対する最適配置問題を検討する。このような系に対する二つの一般化代数 Riccati 方程式(GCARE: Generalized Control Algebraic Riccati Equation, GFARE: Generalized Filtering Algebraic Riccati Equation)⁽⁵⁾の解が厳密に求められることに着目し、閉ループ系を安定化し、かつセンサ/アクチュエータ設置位置におけるある閉ループ伝達行列の H_∞ ノルムを準最適化するコントローラが、設置位置を決めると数値計算を行うことなく直接求められることを示す。この結果を用いると、閉ループ系の他の設計仕様を満足する配置を求める問題が容易に定式化可能となる。

本論文の構成は以下のようである。二章では、本論文で取り扱う制御対象を記述する。三章では、二章で求められた系に対して前述したコントローラが簡単に求められることを示し、最適配置問題の定式化とその解法について検討する。四章では、設計例として、片持はりに対してシミュレーションによって最適な配置を決定し、五章で実験的検証を行う。六章でまとめを行う。

2. 制御対象の記述

本論文で考える制御対象は、領域 $0 \leq \xi \leq L$ で定義される

* 原稿受付 1997 年 5 月 19 日。

^{*1} 正員, 秋田大学工学資源学部(〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1)。

^{*2} 准員, NEC 秋田(株)(〒010-1412 秋田市御所野下堤 3-1-1)。

一様なはり状構造物である。時刻を t 、はりのたわみを ψ とし、 E, I, ρ, S をそれぞれはりの縦弾性係数、断面二次モーメント、密度、断面積とする。構造物には nu 個のアクチュエータが $\xi = \xi_a^i$ ($i=1, \dots, nu$) に取り付けられ、それぞれのアクチュエータは制御のために集中力 $f_a^i(t)$ を発生する。外乱として $\xi = \xi_w^j$ ($j=1, \dots, nw$) に集中力 $f_w^j(t)$ が作用している。以下、後の理論展開のため、構造物の内部減衰は考慮しない。系の運動方程式、境界条件および振動数方程式はそれぞれ次式となる。

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + \rho S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{nu} f_a^i(t) \delta(\xi - \xi_a^i) + \sum_{j=1}^{nw} f_w^j(t) \delta(\xi - \xi_w^j) \quad (1)$$

$$F_1(\xi) = 0 \quad (2)$$

$$f_2(\alpha_k) = 0 \quad k = 1, \dots, \infty \quad (3)$$

$\delta(\xi)$ は Dirac のデルタ関数であり、 α_k は k 次の固有値である。式(1)を低次の N 次モードで近似してモード座標系で表す。 $\psi(\xi, t)$ を次式のような級数で近似する。

$$\psi(\xi, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(\xi) \quad (4)$$

$q_i(t)$ は t に関する未知関数であり、 $\phi_i(\xi)$ は、境界条件式(2)を満足する正規化された固有関数である。式(4)を式(1)に代入すると、次式を得る。

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{q} = \mathbf{E} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{w} \quad (5)$$

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_N]^T, \mathbf{u} = [f_a^1, \dots, f_a^N]^T,$$

$$\mathbf{w} = [f_w^1, \dots, f_w^N]^T, \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N),$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \Phi_a^1 \\ \vdots \\ \Phi_a^N \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Phi_w^1 \\ \vdots \\ \Phi_w^N \end{bmatrix}$$

$$\Phi_a^i = [\phi_i(\xi_a^1), \dots, \phi_i(\xi_a^{nu})],$$

$$\Phi_w^i = [\phi_i(\xi_w^1), \dots, \phi_i(\xi_w^{nw})] \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\omega_l = \alpha_l^2 \sqrt{EI / \rho S L^4} \quad (l = 1, \dots, N)$$

状態ベクトルを $\mathbf{x} = [q_1 \quad \dot{q}_1 / \omega_1 \quad \dots \quad q_N \quad \dot{q}_N / \omega_N]^T$ と定義する。センサ/アクチュエータコロケーションが成立しており、アクチュエータ取付位置での絶対速度をセンサで検出する。このとき、系の状態方程式は $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N}$ を評価出力ベクトルと定義すると、次式のように与えられる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_w \mathbf{w} + \mathbf{B}_u \mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z \mathbf{x} + \mathbf{D}_z \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = \text{block diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & \omega_N \\ -\omega_N & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nw \times 1} & \Phi_w^{1T} / \omega_1 & \dots & \mathbf{0}_{nw \times 1} & \Phi_w^{NT} / \omega_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nu \times 1} & \Phi_a^{1T} / \omega_1 & \dots & \mathbf{0}_{nu \times 1} & \Phi_a^{NT} / \omega_N \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times nu} & \omega_1 \Phi_a^1 & \dots & \mathbf{0}_{1 \times nu} & \omega_N \Phi_a^N \end{bmatrix}^T$$

ここで、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nu}$ は観測出力ベクトルである。以下、式(6)で与えられたシステムの $\mathbf{u}$ から $\mathbf{y}$ までの伝達関数行列を $\mathbf{P}(s)$ と定義する。

3. コントローラの設計法と問題の定式化

3.1 コントローラの設計法 式(6)で表された制御対象に対して、以下の補題が成立している。

【補題】⁽⁶⁾

$\varepsilon > 0$ とする。このとき $\mathbf{P}_\varepsilon(s) = \varepsilon \mathbf{P}(s)$ に対して定義される二つの一般化代数 Riccati 方程式⁽⁵⁾

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} - \varepsilon^2 \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{X} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}^T - \mathbf{Z} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{Z} + \varepsilon^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (8)$$

の解 $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ は、それぞれ以下のように厳密に求められる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Omega} / \varepsilon \quad (9)$$

$$\mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (10)$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2, \omega_N^2)$$

【証明】

$\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ をともに対角行列と仮定する。式(6), (7), (8)に対して、次式が成立していることが容易にわかる。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}^T = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{\Omega} \quad (12)$$

式(11), (12)を式(7), (8)に代入すると、以下ようになる。

$$\varepsilon^2 \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{X} = \mathbf{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{\Omega} \quad (13)$$

$$\mathbf{Z} \mathbf{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Z} = \varepsilon^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (14)$$

式(13), (14)よりそれぞれ式(9), (10)が得られる。

【証明終わり】

補題の結果を用いると、式(6)に対して、以下の定理が成立する。

【定理】

$\mathbf{P}_\varepsilon(s)$ に対して、次式の H_∞ ノルムに関する等式が成立する。

$$\gamma_{\min} = \inf_{\mathbf{K} \in \Omega_{ph}} J_\infty = \sqrt{2} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (15)$$

$$J_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_\varepsilon \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{K}_\varepsilon)^{-1} [\mathbf{I} \quad \mathbf{P}_\varepsilon] \right\|_\infty$$

ただし、 $\mathbf{K}_\varepsilon(s)$ は $\mathbf{P}_\varepsilon(s) = \varepsilon \mathbf{P}(s)$ に対するフィードバックコントローラであり、 Ω_{ph} は、 $\mathbf{P}_\varepsilon(s)$ を安定化するコントローラのクラスを表す。

また、図1の閉ループ系に対して、 $J_\infty < \beta \gamma_{\min}$ ($\beta > 1$) とするコントローラ $\mathbf{K}_\varepsilon(s)$ の状態空間表現は、次式のように与えられる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{K\varepsilon} = \mathbf{A}_{K\varepsilon} \mathbf{x}_{K\varepsilon} + \mathbf{B}_{K\varepsilon} \mathbf{y} \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{C}_{K\varepsilon} \mathbf{x}_{K\varepsilon} \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_{K\varepsilon} = \mathbf{A} + \frac{(2\beta^2 - 1)\varepsilon}{1 - \beta^2} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{\Omega}$$

$$\mathbf{B}_{K\varepsilon} = \frac{\beta^2 \varepsilon}{1 - \beta^2} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}_{K\varepsilon} = \mathbf{B}^T \mathbf{\Omega}$$

【証明】

文献(5)より、式(15) J_∞ の最小値は、次式で与えられる。

$$\gamma_{\min} = \inf_{K \in \Omega_{\gamma_0}} J_{\infty} = \left(1 - \left\| \begin{bmatrix} N & M \end{bmatrix} \right\|_H^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$= \left(1 + \lambda_{\max}(XZ)\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

ここで、 N, M は $P_a(s) = M^T N$ で表される $P_a(s)$ の正規化左既約因子であり、 $\|A\|_H$ はハンケルノルム、 $\lambda_{\max}(A)$ は行列 A の最大固有値をあらわす。式(18)に式(9), (10)を代入することにより、式(15)が得られる。また、コントローラは

$$\begin{aligned} A_{K_{\varepsilon}} &= A - \varepsilon^2 B B^T X + (\beta \gamma_{\min})^2 W^{-T} Z C^T C \\ B_{K_{\varepsilon}} &= (\beta \gamma_{\min})^2 W^{-T} Z C^T \\ C_{K_{\varepsilon}} &= \varepsilon B^T X \\ W &= \left\{1 - (\beta \gamma_{\min})^2\right\} I + XZ \end{aligned} \quad (19)$$

に式(9), (10), (12), (15)を代入して得られる。

【証明終わり】

Fig. 1 Closed-loop control system

$P(s)$ に対するコントローラ（以下 $K(s)$ と定義する。）は、以下の手順で求められる。

1. スカラパラメータ $\varepsilon > 0$ を決定し、拡大系 $P_a(s) = \varepsilon P(s)$ （図1の一点鎖線で囲まれた部分）を構成する。
2. $P_a(s)$ に対してコントローラ $K_{\varepsilon}(s)$ （式(16)でその状態空間表現が与えられる。）を求める。
3. $K(s) = \varepsilon K_{\varepsilon}(s)$ とする。（図1の点線で囲まれた部分）

ここで、スカラパラメータ ε を決定する方法について考える。式(16)より、 $P(s)$ と $K(s) = \varepsilon K_{\varepsilon}(s)$ からなる閉ループ系に関して、次式が成立していることが容易に確かめられる。

$$\bar{\sigma}\left((I - P(j\omega)K(j\omega))^{-1}\right) < \sqrt{2}\beta \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}\left((I - P(j\omega)K(j\omega))^{-1}P(j\omega)\right) < \frac{\sqrt{2}\beta}{\varepsilon} \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}\left(K(j\omega)(I - P(j\omega)K(j\omega))^{-1}\right) < \sqrt{2}\beta\varepsilon \quad (22)$$

$$\bar{\sigma}\left(K(j\omega)(I - P(j\omega)K(j\omega))^{-1}P(j\omega)\right) < \sqrt{2}\beta \quad (23)$$

$\forall \omega \geq 0$ ($\bar{\sigma}(A)$ は行列 A の最大特異値)

式(22)左辺は $P(s)$ の加法的摂動に対するロバスト安定性を評価する指標である。式(21)左辺は図1の u から y までの閉ループ伝達特性を表し、 $P(s)$ の入力端から出力端

までの外乱抑制特性を評価する指標である。よって、不等式(21), (22)の間には、閉ループ系のロバスト安定性と外乱抑制特性との間に ε を介したトレードオフが存在しており、 ε は制御性能に関する要求と不確かさに関する情報から決定できる。

3.2 問題の定式化 本論文では、前節のコントローラ $K(s)$ を用いてセンサ/アクチュエータの最適配置問題を以下のように定式化する。

【問題】

式(6)の制御対象 $P(s)$ と、式(16)から求められるコントローラ $K(s)$ からなる閉ループ系に対して、次式で定義される J を最適化または $\eta > 0$ 以下にするセンサ/アクチュエータ設置位置 $\xi_a^{i,opt}$ ($i=1, \dots, nu$) を求めよ。

$$J = \|G_{zw}(s)\| \quad (24)$$

ここで、 $G_{zw}(s)$ は $P(s)$ と $K(s)$ からなる閉ループ系の w から z までの伝達行列である。 $\|A\|$ は行列 A の何らかのノルムである。

定式化した問題は、本質的には文献(1)から(4)と同様である。これらの報告例は、いずれも一つないしは二つのセンサ/アクチュエータ配置問題に対して次のような手順で最適配置を求めている。

1. センサ/アクチュエータ配置候補を決定した後、確定した制御対象の数学モデルに対して、代数 Riccati 方程式を数値的に解いたり^{(1),(3)}、繰り返し計算を行って⁽⁴⁾フィードバックコントローラを設計する。
2. 制御対象と1で得られたコントローラから閉ループ系を構成し、式(24) J を計算する。
3. 何らかの数値計画的手法を用いて J がより小さくなるような配置候補を探索する。 J が収束すれば設計終了。そうでないときは1に戻って新たに得られた配置に対してフィードバックコントローラを再設計する。

ここで述べた手法では、最適化の過程で対象となる配置候補のすべてに対して数値計算によりコントローラを求めなければならない。上記報告例のように、最適配置問題の規模が比較的小さい場合は、すべての配置候補に対する手続き1の適用は大きな問題にはならない。しかし、構造物が大規模になり多数のセンサやアクチュエータ配置の決定を要するとき、比較すべき対象となる配置候補数は爆発的に増加する。この場合、手続き1の計算負荷は最適化アルゴリズムの実現にあたって問題になると予想される。

また手続き3において、 J がより小さくなるような配置候補を探索する際、手続き1で設計されたコントローラは固定せざるを得ないため、探索の過程で閉ループ系の安定性を常にチェックしなければならない。よって上記アルゴリズムの計算負荷はさらに大きくなる。

これに対し、前節で述べたコントローラ $K(s)$ は、センサ/アクチュエータの配置を定めるだけで、何ら数値計算を要せず式(16)から確定する。閉ループ系の安定性はすべての配置候補で保証されるから、上で述べた従来のアルゴリズムの有する二つの計算負荷の問題は生じず、最適配置問題は著しく単純化される。また、閉ループ系の特異値が式(20)~(23)となることが保証されている。式(20)~(23)はすべての配置候補で成立するから、配置候補間の比較を行う上での一つの基準となり、定式化した問題の

物理的意味は明確である。

4. シミュレーション

3章で設定した問題を図2に示すような片持りの振動制御系のモデルに適用する。はり幅 B [m], 厚さ H [m] の長方形断面であるとする。 $\xi=\xi_a$ にばね定数 K_s のばねを取り付け、ばねの他端にラムを設置する。ラムに鉛直方向変位 u を与えると、 $\xi=\xi_a$ に集中力 $f=K_s(u-\psi(\xi_a))$ が作用する。また、 $\xi=\xi_a$ には $\psi(\xi_a)$ を検出するセンサが取り付けられている。シミュレーションに用いたはりの諸元を表1に示す。

Fig. 2 Cantilevered beam system

Table 1 Physical properties of the cantilevered-beam

Length L [m]	5.00×10^{-1}
Width B [m]	3.08×10^{-2}
Thickness H [m]	1.01×10^{-3}
Mass M [kg]	4.11×10^{-2}
Density ρ [kg/m ³]	2.65×10^3
Young's modulus E [Pa]	6.41×10^{10}
Spring constant K_s [N/m]	4.59×10^1

制御性能を評価する評価関数 J として、 $\xi_a=0.15$ [m] に、平均ゼロ、インテンシティが1の白色雑音が外乱として作用する場合の、 w からはりの先端のたわみ $\psi(0.5, t)$ までの閉ループ伝達関数 $G_{zw}(s)$ の H_2 ノルムの二乗を採用する。 $G_{zw}(s)$ の状態空間表示が次式で与えられるとすると、

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c w \\ z = C_c x_c \end{cases} \quad (25)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B C_{K\varepsilon} \\ B_{K\varepsilon} C & A_{K\varepsilon} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} C_z & D_z C_{K\varepsilon} \end{bmatrix}$$

J は、次式で求めることができる。

$$J = \|G_{zw}\|_2^2 = \text{trace}(C_c^T L_c C_c) \quad (26)$$

L_c は次式の Lyapunov 方程式の正定対称解である。

$$A_c L_c + L_c A_c^T + B_c B_c^T = 0 \quad (27)$$

コントローラを求めるにあたって、スカラーパラメータ ε は、各配置候補の間の制御性能を公平に比較するため、 $\xi_a=0.15$ [m] に平均ゼロでインテンシティ1の白色雑音が作用した場合の $E(u^2)$ (E : 期待値演算子) がすべての配置候補で一定値 $\mu_d (>0)$ になるように決定した⁽⁷⁾。以下にその決定アルゴリズムを述べる。

Fig. 3 J for ξ_a ($\mu_d=10^{-3}$)

Fig. 4 Gain plots of the transfer functions from w to z (Open loop system and closed-loop systems in $\xi=\xi_{aopt}$)

step 1: $0 \leq \xi_a \leq L$ を決定する。繰り返し回数 $n=0$ とし、 $\varepsilon_0 > 0$ を定める。

step 2: 式(16)より、 $K_\varepsilon(s)$ を求め、 $K(s) = \varepsilon_n K_\varepsilon(s)$ を決定する。

step 3: 式(25) C_c を次式のように定める。

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_n C_{K\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式(26), (27)から、 J_n を求める。 $|J_n - \mu_d| < e_b$ ($0 < e_b < 1$) ならば、設計終了。そうでない場合は、

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(\frac{\mu_d}{J_n} \right) \quad (29)$$

と更新し、 $n+1$ を n と置き換えて、step 2 に戻る。

この操作により、すべての配置候補で制振のために投入するエネルギー量を一定にできるから、制御性能を比較する際の物理的意味が明確になる。この等式拘束条件の下で、 J を全配置候補 $0 \leq \xi_a \leq 0.5$ [m] で計算したものが図3である。本図より、はりの先端、すなわち $\xi_a=0.5$ [m] で J が最小になり、またモードの節付近ではそのモードが不可制御かつ不可観測に近づくため、評価関数値が急激に大きくなっていることがわかる。図3は $\mu_d=10^{-3}$ の場合の結果であるが、 μ_d を変化した場合でも最適化の結果はほぼ同様である。

図4は、(a) $\mu_d=10^{-3}$, (b) $\mu_d=10^{-2}$, (c) $\mu_d=10^{-1}$ とした場合

の w から $z=\psi(0.5,t)$ までの開ループ系と、(a), (b), (c) それぞれの場合の最適なセンサ/アクチュエータ設置位置 (いずれも $\xi_{a,opt}=0.5$) における閉ループ系のゲイン特性を示したものである。投入可能なエネルギー量の上界 μ_d を大きくなるにつれて、各モードの共振ピークがより抑制されていることが確認できる。

5. 実験

4章で得られた結果を検証するために、実験を行った。図5に実験装置を示す。実験装置は、アルミニウム合金製のはり、A/D、D/Aコンバータを装着したパーソナルコンピュータ、アクチュエータとして用いる加振器とその駆動用アンプ、およびはりのたわみを検出するレーザ変位計からなる。

Fig. 5 Experimental setup

実験を行うにあたり、アクチュエータの動特性が無視できなかったため、コントローラは、はりとアクチュエータを直列結合した拡大系を対象に、 $\xi_a=0.15, 0.25, 0.30, 0.39$ (2次モードの節)、 0.495 [m]の各配置候補に対して設計された。また、それぞれの配置候補で前章のシミュレーションで導入した操作エネルギーに関する拘束を実験的に与えるため、上記すべての配置候補で、 $\xi_w=0.15$ [m]にインパルス状の外乱を与えたとき、D/Aコンバータから出力される加振器駆動用アンプに対する指令電圧の絶対値の最大値が3 [V]となるようにスカラーパラメータ ε を調整した。制御性能を実験的に評価するため、上で述べたインパルス状外乱の下で次式を定義する。

$$J_e = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |\psi_{0.5}^c(i)|}{\sum_{i=1}^{N_e} |\psi_{0.5}^o(i)|} \quad (30)$$

$\psi_{0.5}^c(i)$: 閉ループはりの先端のたわみを一定間隔でサンプリングした i サンプル目の値。

$\psi_{0.5}^o(i)$: 開ループ系の同様のサンプル値。

N_e : $\psi_{0.5}^o(i)$ が十分減衰したときのサンプル数。

各配置候補に対して J_e を計算した結果を表2に示す。はりのほぼ先端である $\xi_a=0.495$ [m] で J_e が最小となり、シミュレーションで得られた結果は、実験的な評価の下でも妥当であることがわかる。

図6, 7は、 $\xi_a=0.39$ [m] と $\xi_a=0.495$ [m] でのはりのインパルス応答である。シミュレーションと表2の結果から

Table 2 J_e vs ξ_a

ξ_a [m]	J_e
0.150	2.925
0.250	0.631
0.300	0.541
0.390	2.428
0.495	0.152

Fig. 6 Impulse response at $\xi_a=0.5$ [m] ($\xi_a=0.39$ [m])

Fig. 7 Impulse response at $\xi_a=0.5$ [m] ($\xi_a=0.495$ [m])

も予測できるように、 $\xi_a=0.39$ [m] では制御後も2次モードの振動が残留して制振されないのに対し、シミュレーションと J_e の評価両方で最適な取付位置とされた $\xi_a=0.495$ [m] では、振動が速やかに抑制されていることが確認できる。以上の結果により、本報告で提案した最適配置の手法の有効性が実験的にも確認された。

なお、本実験装置で用いたはりは、図6, 7の非制御時の応答より明らかなように振動が減衰しており、系には内部減衰が存在していることがわかる。本論文では3章において示したように、構造物の内部減衰を無視することにより、Riccati方程式の厳密解表現を用いたコントローラの設計が可能となっており、実験で設計したコント

ローラも、アクチュエータの動特性は考慮に入れているものの、はりの内部減衰は考慮していない。しかしながら、実験結果より振動は速やかに抑制されており、本コントローラの有効性を示している。一般に、柔軟構造物の内部減衰は、その構造が大規模になるほど小さくなり、かつ系の内部減衰は閉ループ系の安定性には有利に作用するため、内部減衰を無視したコントローラの設計法は問題ないものと思われる。

本論文で提案したセンサ/アクチュエータの最適配置法は、最適化のための計算負荷を減らすことが可能であり、減衰の小さい大型柔軟構造物等のセンサ/アクチュエータ配置問題にも問題なく適用可能であると考えられる。

6. 結 言

柔軟構造物のアクティブ振動制御系設計におけるセンサ/アクチュエータの配置法について検討を行った。得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) センサ/アクチュエータコロケーションの下で、モード座標表現された不減衰系に対する 2 つの一般化 Riccati 方程式の厳密解が簡単に得られることを示した。さらに、これらの解を用いて、正規化既約分解に基づく H_∞ コントローラが、センサ/アクチュエータ配置を決めるだけで数値計算を行うことなく直接求まることを示した。

- (2) (1)の結果を用いて、従来提案されてきたセンサ/アクチュエータの最適配置問題と比較し、最適化に要する計算負荷のより小さくする問題設定を行った。
- (3) (2)で定式化した問題を片持はり系に対して適用し、シミュレーションによって最適配置を求めた。得られた結果を検証するため実験を行い、シミュレーションで得られた最適配置が実験的にも妥当であることを確認した。

文 献

- (1) 近藤, 矢富, 井上, 機論, **55**-513, C (1989), 1206-1214.
- (2) Devasia, S, Meressi, T., Paden, B. and Bayo, Eduardo, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **16**-5 (1993), 859-864.
- (3) 大日方, 木澤, 土岐, 機論, C, **59**-563 (1993), 2041-2046.
- (4) 木澤, 大日方, 機論, **62**-600, C, (1996), 3108-3115.
- (5) McFarlane, D. C. and Glover, K., *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 138, Springer-Verlag (1990).
- (6) Hsiao, M., Huang, J. and Taylor Jr., L. W., *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **18**-4 (1995), 657-663.
- (7) Hsieh, C., Skelton, R. E., and Damra, F. M., *Optimal Control Application & Method*, **10** (1989), 347-366.