ウェーブレット変換を用いた時系列信号のディコンボリューション* (ウェーブレットパケットおよびしきい値処理の導入と 最適化ウェーブレットの生成)

増田 新^{*1}, 山本 鎮男^{*1}, 曾根 彰^{*1}

Deconvolution of Time Series Using Wavelet Transform (Introduction of Wavelet Packets with Soft-Thresholding and Generation of Optimized Wavelets)

Arata MASUDA, Shizuo YAMAMOTO and Akira SONE

A new discrete deconvolution procedure is developed that uses the wavelet packet based system decomposition. The system is decomposed into subsystems using the wavelet packet transform and the inversion of each subsystem is derived approximately. We show how to select the wavelet packet bases to mitigate the effects of ill-posedness due to the narrow bandwidth of the system. A new wavelet bases family with the optimal transition band performance is generated to suppress the approximation error. Furthermore we introduce the soft thresholding into our procedure to reconstruct temporal inhomogeneous signals more efficiently.

Key Words: Information Processing and Signal Analysis, Inverse Problem, Deconvolution, Health Monitoring, Diagnosis, Wavelet Packets, Orthonormal Wavelets

1. 緒 言

稼働中の機械の「健康状態」を常時連続監視するヘルスマニタリングにおいては、故障や劣化に伴う異常信号のオンライン検出が重要な課題である。背景雑音に埋もれた微小な異常信号を検出するためには、感度の高い共振形のセンサを用いることが多いが、観測された信号はセンサ特性の影響を強く含んでいる。そのため異常信号の特性を分析するためには、観測された波形からセンサ特性の影響を取除き、センサに入力される前の真の波形を復元すること、すなわちディコンボリューションすることが必要である。

著者らは前報⁽¹⁾で、離散ウェーブレット変換を用いてシステムを帯域分割し、帯域ごとに逆システムを構成することによって、ディコンボリューションの際に問題となる解の不安定性を取除き、かつ効率よくディコンボリューションを行う手法を提案した。しかしウェーブレット変換による帯域分割はオクターブ特性をもつため、ローパス特性をもつシステム以外はうまく処理できないという欠点があった。また、使用するウ

ェーブレットによって演算の性能が左右されることが考えられるが、最適なウェーブレットの選択基準や生成法は示していなかった。

本研究では、離散ウェーブレット変換を拡張したウェーブレットパケットを用いることにより、任意の周波数特性をもつシステムについて安定に inputs を推定することができるディコンボリューション手法を提案する。

まず、ウェーブレットパケットを用いたシステムの分割方法を示し、ディコンボリューション演算を行う安定な逆フィルタを導出する。ウェーブレットパケットを用いるとシステムを任意の帯域に分割できるため、対象に応じた柔軟な帯域分割が可能となり、システムの伝達特性をうまく平滑化できる。また、前報では信号と雑音に関する先験情報に基づいて帯域ごとのSN比を評価し、SN比の悪い帯域を切り捨てることによって雑音を除去していたが、本研究では信号に関する先験情報を必要としない適応的なしきい値処理⁽²⁾⁻⁽⁴⁾を導入することによって、極めて良好な雑音除去を実現する。

また本手法では、使用するウェーブレットとして周波数局在性のよいものを選ぶ必要がある。そこで、直交ウェーブレットの生成条件に帯域分割特性の最適化

* 原稿受付 1997年3月13日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学工学部(☎606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

条件を加えることにより、帯域分割特性を最適化した直交ウェーブレットを新たに生成する。生成される直交ウェーブレットは、例えば Daubechies のものに比べてはるかに良好な周波数局在性を有する。

最後に、生成したウェーブレットを用いていくつかの数値実験を行い、提案する手法の有効性を確認する。

2. ウェーブレットパケットを用いたディコンボリューション

2.1 手法の概要 線形離散システム G に対して次のような入出力関係を考える。

$$y(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g(t-i)x(i) + e(t), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合、 $g(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $e(t)$ はそれぞれ、システムのインパルス応答、未知入力信号、出力の観測信号、雑音である。本研究において $g(t)$ はセンサのインパルス応答に相当し、既知であるとする。 $x(t)$ は検出するべき異常信号に相当する。 $e(t)$ はガウス性白色雑音とする。ディコンボリューションとは、式(1)を解いて観測信号 $y(t)$ から入力信号 $x(t)$ を推定する逆問題である。

式(1)をベクトル形式で表記すると、

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ は、それぞれ $y(t)$, $x(t)$, $e(t)$ を時間順に並べた無限次元列ベクトル、 $\mathbf{G}$ は $g(t-i)$ を t 行 i 列の要素とする無限次元 Toeplitz 行列である。以下、記号 $\{\cdot\}^T$ は行列の転置を表すものとする。

いま、

$$\Psi := \text{col}\{\Psi_1, \dots, \Psi_m\}, \quad \Psi\Psi^T = \Psi^T\Psi = \mathbf{I}$$

なる直交行列 Ψ で表される直交交換を使って、

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \Psi_i^T \xi_i, \quad \xi_i := \Psi_i \mathbf{x} \quad (3)$$

と展開すると、システムを次のように m 個のサブシステムに分解することができる。

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_{\Psi_i} \xi_i + \mathbf{e}, \quad \mathbf{G}_{\Psi_i} := \mathbf{G}\Psi_i^T \quad (4)$$

前報⁽¹⁾では、式(3)の直交変換として離散ウェーブレット変換を用いてシステムを複数の帯域に分割し、ゲインの小さい帯域を切り捨てることによって安定なディコンボリューション表現を得た。しかし、ウェーブレット変換による帯域分割はオクターブ特性をもつため、中～高周波帯域にピークをもつようなシステムをうまく表現できないという欠点があった。そこで本研究では、システムの特性に合せて高周波帯域をも細かく分割することのできるウェーブレットパケット(付録参照)を用いる。すなわち、式(3)の Ψ とし

て、

$$\Psi = \text{col}\{\Psi_n^j : (j, n) \in \mathcal{B}\} = \text{col}\{\Psi_1, \dots, \Psi_m\} \quad (5)$$

とする。ウェーブレットパケット変換が信号の帯域分割を与える変換であることに注意すると、式(4)のサブシステム $\mathbf{G}_{\Psi_1}, \dots, \mathbf{G}_{\Psi_m}$ は $\mathbf{G}$ を m 個の帯域に分割したものと考えることができる。

$$\mathbf{G}_{\Psi} := \mathbf{G}\Psi = \text{row}\{\mathbf{G}_{\Psi_1}, \dots, \mathbf{G}_{\Psi_m}\},$$

$$\xi := \Psi\mathbf{x} = \text{col}\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$$

として、式(4)を次のように書く。

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{\Psi}\xi + \mathbf{e} \quad (6)$$

式(6)を ξ について最小二乗法で解くことにより、展開係数列の推定値 $\tilde{\xi}$ を得る。

$$\tilde{\xi} = (\mathbf{G}_{\Psi}^T \mathbf{G}_{\Psi})^{-1} \mathbf{G}_{\Psi}^T \mathbf{y} \quad (7)$$

ここで、式(7)の括弧内の $\mathbf{G}_{\Psi}^T \mathbf{G}_{\Psi}$ は、帯域間の相互作用を表す行列で、次のようなブロック行列になる。

$$\mathbf{G}_{\Psi}^T \mathbf{G}_{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\Psi_1}^T \mathbf{G}_{\Psi_1} & \cdots & \mathbf{G}_{\Psi_1}^T \mathbf{G}_{\Psi_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{\Psi_m}^T \mathbf{G}_{\Psi_1} & \cdots & \mathbf{G}_{\Psi_m}^T \mathbf{G}_{\Psi_m} \end{bmatrix} \quad (8)$$

いま、 $m=2$, すなわちシステムが低周波側 $\mathbf{G}\Psi_0^{1T}$ と高周波側 $\mathbf{G}\Psi_1^{1T}$ の二つのサブシステムに分割されている場合を考えよう。このとき式(8)の左辺を z 変換したものを $\mathbf{R}_G(z)$ とすると、 $\mathbf{R}_G(z)$ は次のように計算できる。

$$\mathbf{R}_G(z) = \begin{bmatrix} G_{00}(z^2) & G_{01}(z^2) \\ G_{10}(z^2) & G_{11}(z^2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$G_{00}(z^2) := F(z)P(z) + F(-z)P(-z)$$

$$G_{01}(z^2) := H_0(z)H_0(-z)z^{L-1}\{F(-z) - F(z)\}$$

$$G_{10}(z^2) := H_0(z^{-1})H_0(-z^{-1})z^{-L+1}\{F(-z) - F(z)\}$$

$$G_{11}(z^2) := F(z)P(-z) + F(-z)P(z)$$

ここで、

$$F(z) := G(z)G(z^{-1})$$

$$P(z) := H_0(z)H_0(z^{-1})$$

L はフィルタ $H_0(z)$, $H_1(z)$ (付録参照)の長さである。

いま、 H_0 が理想的な帯域2分割フィルタであるとする、 $H_0(z)H_0(-z) = 0$ が成立し、 $\mathbf{R}_G(z)$ は対角行列となる。実際に有限長さの H_0 が理想フィルタになることはできないが、ここでは $|H_0(e^{i\omega})H_0(-e^{i\omega})|$ が十分小さく、式(9)の非対角項が対角項に比べて $|z|=1$ 上で十分小さいとする。このとき、

$$\mathbf{R}_G(z) \approx \begin{bmatrix} G_{00}(z^2) & 0 \\ 0 & G_{11}(z^2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

この対角化近似により、

$$(\mathbf{R}_G(z))^{-1} \approx \begin{bmatrix} G_{00}(z^2)^{-1} & 0 \\ 0 & G_{11}(z^2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

m が3以上の場合も式(9)～(11)を再帰的に用いる

ことにより、同様の対角化近似を考えることができる。

以上の近似操作により式(8)はブロック対角化され、式(7)はサブシステムごとに独立に分解される。

$$\tilde{\xi}_i = (G_{\psi_i}^T G_{\psi_i})^{-1} G_{\psi_i}^T y, \quad i=1, \dots, m \quad \dots (12)$$

式(12)が本手法におけるディコンボリューションの式である。式(12)により各帯域における入力信号のウェーブレットパケット展開係数の推定値 $\{\tilde{\xi}_i: i=1, \dots, m\}$ を得ることができ、さらにこれらを再構成して、入力信号の推定値を得ることができる。

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^m \psi_i^T \tilde{\xi}_i \quad \dots (13)$$

2.2 対角化近似による誤差 ウェーブレットパケット展開係数の推定式(12)に式(6)を代入すると、

$$\tilde{\xi}_i = \xi_i + (G_{\psi_i}^T G_{\psi_i})^{-1} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m G_{\psi_i}^T G_{\psi_j} \xi_j + G_{\psi_i}^T e \right\} \quad \dots (14)$$

ここでは、 $x(t)$ は $e(t)$ と無相関な白色過程であるとする。また推定誤差にも白色性を仮定すると、推定誤差の分散は次式ようになる。

$$E[\|\tilde{\xi}_i - \xi_i\|^2] = \|G_{\psi_i}^T G_{\psi_i}\|_2^{-2} \{ (\|G_{\psi_i}^T G\|_2^2 - \|G_{\psi_i}^T G_{\psi_i}\|_2^2) E[\xi_i^2] + \|G_{\psi_i}^T\|_2^2 E[e^2] \} \quad \dots (15)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値演算、 $\|\cdot\|_2$ は行列の行ベクトルのユークリッドノルムとする。

式(15)右辺の $\{\cdot\}$ 内第1項は対角化近似に起因する誤差、第2項は雑音に起因する誤差である。したがって、対角化近似による誤差の大きさは次のパラメータで評価することができる。

$$\varepsilon_d := \frac{\|G_{\psi_i}^T G\|_2^2 - \|G_{\psi_i}^T G_{\psi_i}\|_2^2}{\|G_{\psi_i}^T G_{\psi_i}\|_2^2} \quad \dots (16)$$

2.3 システム伝達特性の平滑化 ディコンボリューション問題は、しばしば不適切問題である⁽¹⁾。極端な例はシステム $G(z)$ が $|z|=1$ 上に零点をもつ場合、逆システム $G(z)^{-1}$ は $|z|=1$ 上で有界にならず、解が数値的に発散してしまう。

解の数値的安定性はシステムの条件数で評価できる。システム A の条件数は方程式 $Ax=b$ の解に含まれる誤差の拡大率の上限を表す指標で、次式で定義される。

$$\text{cond}(A) := \frac{\|A\|}{\|A\|_-} \quad \dots (17)$$

$\|A\|, \|A\|_-$ は次式で定義される伝達ノルム、逆伝達ノルム⁽¹⁾である。

$$\|A\| := \sup_{\omega} \sigma_{\max}\{A_p(e^{i\omega})\},$$

$$\|A\|_- := \inf_{\omega} \sigma_{\min}\{A_p(e^{i\omega})\} \quad \dots (18)$$

ただし、 $A_p(z)$ は A と等価なポリフェーズ行列、 $\sigma_{\max},$

Fig. 1 Regularization by decomposing system. Letters $a, \dots, j$ denote gain magnitudes at each frequency

$\sigma_{\min}$ は行列の最大、最小特異値を表す。条件数が大きいほど雑音が拡大され、正しい解を得ることができない。例えば $|z|=1$ 上に零点をもつシステムの条件数は無限大となる。

直観的には条件数とは伝達関数のゲインの最大値と最小値の比である。例えば図1に示すシステムは $|z|=1$ 上に零点をもつため、システム全体の条件数は無限大である。本手法ではウェーブレットパケットを用いてシステムを複数の帯域に分割し、式(12)により帯域ごとに逆問題を解く。そこで、ウェーブレットパケット基底の組合せ [式(5)] をうまく選んで、帯域全体を零点近傍の帯域とそれ以外の帯域に分割すれば、システムを不適切なサブシステムと適切なサブシステムに分離できる。このような分割のようすを図1に模式的に示す。零点近傍の G_3, G_6 以外のサブシステムでは伝達特性が平滑化され、条件数が小さくなっていることがわかる。

2.4 ウェーブレットパケットの選択 各サブシステムにおける対角化近似誤差が ε 以下、条件数が α 以下になるようなウェーブレットパケットの組合せを次の手順で決定する。ただし、 $\mathcal{G}$ はサブシステムの集合、 $\mathcal{B}_R$ は添字 (j, n) の集合、 ϕ は空集合、 $G_n^j := G\psi_n^j$ とする。

手順1 パラメータ ε, α , 最大スケール J を決定する。

$$G_0^0 := G, \mathcal{G} := \{G_0^0\}, \mathcal{B}_R = \phi \text{ とする。}$$

手順2 $G_n^j \in \mathcal{G}$ について、

if $\varepsilon_d \leq \varepsilon$ and $\text{cond}(G_n^j) \leq \alpha$ then

$$\mathcal{B}_R := \mathcal{B}_R + \{(j, n)\},$$

$$\mathcal{G} := \mathcal{G} - \{G_n^j\};$$

elseif $j \leq J-1$ then G_n^j を低周波側と高周波側のサブシステムに分解する。

$$G_n^j = G_{2n}^{j+1} + G_{2n+1}^{j+1},$$

$$\mathcal{G} := \mathcal{G} - \{G_n^j\} + \{G_{2n}^{j+1}\} + \{G_{2n+1}^{j+1}\};$$

else $\mathcal{G} := \mathcal{G} - \{G_n^j\};$

手順3 $\mathcal{G} = \phi$ となるまで、手順2を繰り返す。

以上の手順により、 $\{\psi_n^j: (j, n) \in \mathcal{B}_R\}$ の各サブシステムについて、対角化近似誤差を ε 以下に、条件数

を α 以下に抑えられる。これらのサブシステムについて式(12)の計算を行い、次式で再構成することにより、安定に入力を推定することができる。

$$\tilde{x} = \sum_{(j,n) \in \mathcal{B}_R} \Psi_n^T \tilde{\xi}_n^j \dots \dots \dots (19)$$

2.5 周波数原点に零点をもつシステム 一般に、信号を表現するうえで低周波数成分は重要である。ところがシステムが周波数原点 $\omega=0$ に零点をもつ場合(微分特性をもつシステム)、2.4節の手順で基底の選択を行うと、 $\omega=0$ を含む帯域 G'_0 は条件数が無限大となるため $\mathcal{B}_R$ から除外されてしまう。したがって、この帯域に含まれる低周波数成分は再現できないことになり、信号の特徴が損なわれる。理論的には J を十分に大きくとって周波数原点付近の帯域を十分細かく分割すればよいのだが、基底の時間局在性が悪くなり現実的でない。そこでこの場合、 $\mathcal{B}_R := \mathcal{B}_R + \{(J, 0)\}$ とし、 G'_0 については例外的に Tikhonov の方法⁽⁷⁾ による正則化解を用いることにする。

$$\tilde{\xi}_i = (G_0^T G_0 + \lambda^2 I)^{-1} G_0^T y \dots \dots \dots (20)$$

ここで λ は正則化パラメータであり、食違い量原理⁽⁸⁾ に基づいて決定する。

2.6 計算コスト⁽¹⁾ スケール j のウェーブレット packets 展開係数のサンプリング間隔は元の信号の 2^j 倍になることに注意すると、区間 $[0, N-1]$ の入力信号に対する式(12)の計算に必要な乗算量は次のようになる。

$$(p+L_j-1)N/2^j + q_i N/2^j \approx LN + \frac{p+q_i}{2^j} N \dots \dots \dots (21)$$

ただし、 p はシステムのインパルス応答長さ、 L はウェーブレットのフィルタ係数列の長さ、 L_j はスケール j のウェーブレット packets 基底のサポート長さで、 $L_j \approx 2^j L$ である。また、 q_i は $(G_{\Psi_i}^T G_{\Psi_i})^{-1}$ のインパルス応答長さである。式(21)より、サブシステムのスケールを一つ大きくすると右辺第2項が約 $1/2$ になることがわかる。すなわち入力の推定計算の帯域幅を制限することにより、計算コストを低減できる。

2.7 しきい値処理による異常信号抽出 前報⁽¹⁾ では、信号と雑音に関する先験情報に基づいてサブシステムごとに SN 比を評価し、SN 比が一定値以下の帯域を切り捨てることによって雑音を除去していた。これは、ある帯域の成分を一律に零にするという線形フィルタリング処理になっている。この手法は信号と雑音がともに定常である場合には有効だが、信号がパルスなどの時間的に局在した過渡的信号である場合は必ずしも有効でない。信号の振幅や形状に関する合理

Fig. 2 Soft-thresholding

的な先験情報を得ることが難しく、そのため SN 比の評価が困難であり、切り捨てた帯域の中に有用な情報が含まれている可能性があるからである。

これに対して、Donoho らはウェーブレットを用いた雑音除去に関する一連の研究⁽²⁾⁻⁽⁴⁾ の中で、雑音を含む信号のウェーブレット展開係数に対して soft-thresholding と称するしきい値操作による非線形処理を施すことによって、時間的に局在した特徴を持つ信号を極めて効果的に抽出できることを示した。本研究ではこの考え方を取り入れ、信号は過渡的だが雑音は定常であるという前提のもとに、次のような手順で異常信号の抽出を行う。ただし以下で、 K_n^j , T_n^j は信号 $x(t)$ のサポート $\mathcal{T}$ とその展開係数 $\xi_n^j(k)$ のサポート $\mathcal{K}_n^j$ を対応づける関数で、 $K_n^j(\mathcal{T}) := \mathcal{K}_n^j$, $T_n^j(\mathcal{K}_n^j) := \mathcal{T}$ で定義される。

手順 1 伝達ノルムが最大のサブシステム G_{Ψ_c} を選んで連続監視帯域とする。

手順 2 G_{Ψ_c} に対するディコンボリューション [式(12)] をオンラインで実行し、ウェーブレット packets 展開係数の推定値 $\tilde{\xi}_c(k)$ を連続監視する。

手順 3 時間区間 $\mathcal{T} := T_c(\mathcal{K}_c)$, $\mathcal{K}_c := \{k : |\tilde{\xi}_c(k)| > \theta_c\}$ (θ_c は異常検知レベル) で異常信号が発生しているとみなして、この区間でのみ、残りの帯域のウェーブレット packets 展開係数の推定値 $\{\tilde{\xi}_n^j(k) : (j, n) \in \mathcal{B}_R, k \in K_n^j(\mathcal{T})\}$ を計算する。

手順 4 $\{\tilde{\xi}_n^j(k) : (j, n) \in \mathcal{B}_R, k \in K_n^j(\mathcal{T})\}$ に対して、図 2 のしきい値関数 Θ_n^j を作用させる。

手順 5 しきい値処理を施した展開係数 $\{\Theta_n^j(\tilde{\xi}_n^j(k)) : (j, n) \in \mathcal{B}_R, k \in K_n^j(\mathcal{T})\}$ を再構成して、入力信号の推定値 $\tilde{x}$ を得る。

手順 4 で用いるしきい値 θ_n^j については次のように考える。異常信号の常時監視への応用を考えると、雑音に関する先験情報をシステムの正常時に取得できる場合が多い。そこで、各帯域のしきい値をシステムの正常時の雑音レベルに合せて決定することが考えられ

る。すなわち次式によりしきい値を決定する。

$$\theta_k^j = \sqrt{2 \ln(m)} SD(\tilde{\xi}_k^j(k)), \quad k \in K_k^j(\mathcal{T}_{\text{normal}}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 m は区間 $\mathcal{T}$ に含まれるデータの個数、 SD は標準偏差、 $\mathcal{T}_{\text{normal}}$ はシステムが正常であることが既知な時間区間である。

3. 最適な帯域分割特性をもつ 直交ウェーブレットの生成

3.1 最適ウェーブレットの生成条件 2.1 節で述べたように、式(10)の対角化近似が良い近似となるためには、 $|H_0(e^{i\omega})H_0(-e^{i\omega})|$ が十分小さくなくてはならない。同時に、 $H_0(e^{i\omega})$ は阻止帯域 $[\omega_s, 2\pi - \omega_s]$ において十分な減衰特性をもつ必要がある。そこで、次の意味で最適なウェーブレットの生成を行う。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \int_0^{2\pi} |H_0(e^{i\omega})H_0(-e^{i\omega})|^2 d\omega \\ & \text{subject to: } |H_0(e^{i\omega})| \leq \delta, \quad \omega \in [\omega_s, 2\pi - \omega_s], \\ & \quad \quad \quad \pi/2 < \omega_s < \pi \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

一般に、正規直交ウェーブレット $\phi(t)$ およびスケールリング関数 $\phi(t)$ の生成条件は以下のようにまとめられる。

$$\left. \begin{aligned} & \text{正規直交条件} \\ & \left. \begin{aligned} \langle \phi(t-k), \phi(t-l) \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle \phi(t-k), \phi(t-l) \rangle &= \delta_{kl} \\ \langle \phi(t-k), \phi(t-l) \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24) \\ & \text{消失モーメント条件} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} t^n \phi(t) dt = 0, \quad n=0, \dots, N-1 \end{aligned} \right\}$$

(a) $N=2, M=4, \omega_s=0.75, \delta=-40 \text{ dB}$

(b) $N=4, M=6, \omega_s=0.65, \delta=-40 \text{ dB}$

Fig. 3 Optimal wavelets. Scaling function $\phi(x)$ and mother wavelet $\psi(x)$

ここで、 δ_{kl} はクロネッカのデルタである。

これらの条件を満足するウェーブレットを生成するためには、フィルタ $H_0(z), H_1(z)$ に対して次の条件を課せばよいことが知られている。ただし、 L はフィルタの長さとする。

$$H_0 = H(z), \quad H_1 = -z^{-L+1} H(-z^{-1}) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$H(z)H(z^{-1}) = P(z), \quad P(z) + P(-z) = 2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^N \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^N |L(z)|^2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

すなわち、正規直交ウェーブレットの生成は式(26), (27)を満足するフィルタ $H(z)$ の設計問題に帰着する。Daubechies⁽⁵⁾によれば、式(26), (27)を満足する $H(z)$ を与える $P(z)$ の一般解は、式(27)において、

$$\begin{aligned} |L(e^{i\omega})|^2 &= Q \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right), \\ Q(y) &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k + y^N R \left(\frac{1}{2} - y \right) \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

とすることで得られる。ここで、 $R(y)$ は $Q(y)$ が $Q(y) \geq 0, y \in [0, 1]$ を満足する範囲で選ばれる任意の奇対称多項式である。 $R(y)=0$ とすると、Daubechies の直交ウェーブレットが得られる。Daubechies のウェーブレットは、同じ長さの直交ウェーブレットの中で消失モーメントの次数が最大になるウェーブレットであるが、帯域分割特性はあまり良くないことが知られている。

$R(y)$ の自由度を利用して、式(23)を満足する最適ウェーブレットを設計する。式(23)を $P(z)$ を使って表すと、

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \int_0^{2\pi} P(e^{i\omega}) \{2 - P(e^{i\omega})\} d\omega \\ & \text{subject to: } P(e^{i\omega}) \geq 0, \quad \omega \in [0, 2\pi] \\ & \quad \quad \quad P(e^{i\omega}) \leq \delta^2, \quad \omega \in [\omega_s, 2\pi - \omega_s], \\ & \quad \quad \quad \pi/2 < \omega_s < \pi \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

多項式 $R(y)$ の係数を M 個の未知パラメータとした

(a) $N=2, M=4, \omega_s=0.75, \delta=-40 \text{ dB}$ (b) $N=4, M=6, \omega_s=0.65, \delta=-40 \text{ dB}$

Fig. 4 Frequency response of optimal filter $H(z)$

Table 1 Coefficients of optimal filter $H(z)$ (a) $N=2, M=4, \omega_s=0.75, \delta=-40$ dB

$h(0)$	3.8786447×10^{-2}	$h(6)$	3.7025482×10^{-1}
$h(1)$	6.1929854×10^{-3}	$h(7)$	$-4.4561130 \times 10^{-2}$
$h(2)$	$-1.6140121 \times 10^{-1}$	$h(8)$	$-2.8520300 \times 10^{-2}$
$h(3)$	$-5.9548904 \times 10^{-2}$	$h(9)$	5.8692216×10^{-2}
$h(4)$	4.8447619×10^{-1}	$h(10)$	3.5108295×10^{-3}
$h(5)$	7.6831981×10^{-1}	$h(11)$	$-2.1988200 \times 10^{-2}$

(b) $N=4, M=6, \omega_s=0.65, \delta=-40$ dB

$h(0)$	1.0964162×10^{-2}	$h(10)$	4.3729042×10^{-1}
$h(1)$	6.8438598×10^{-4}	$h(11)$	1.6112813×10^{-2}
$h(2)$	$-4.3397523 \times 10^{-2}$	$h(12)$	$-4.6680534 \times 10^{-2}$
$h(3)$	$-5.2769686 \times 10^{-3}$	$h(13)$	4.2925040×10^{-2}
$h(4)$	9.7140285×10^{-2}	$h(14)$	1.2868357×10^{-2}
$h(5)$	2.3350342×10^{-2}	$h(15)$	$-3.6672382 \times 10^{-2}$
$h(6)$	$-1.9778154 \times 10^{-1}$	$h(16)$	$-3.2853874 \times 10^{-3}$
$h(7)$	$-9.1770252 \times 10^{-2}$	$h(17)$	2.4018966×10^{-2}
$h(8)$	4.3951254×10^{-1}	$h(18)$	4.7599444×10^{-4}
$h(9)$	7.4136047×10^{-1}	$h(19)$	$-7.6256387 \times 10^{-3}$

上で、式(29)の最適化問題を解く。求めた $P(z)$ をスペクトル分解⁽⁶⁾して長さ $2(N+M)$ のフィルタ $H(z)$ を得る。スペクトル分解は一意ではないので、 $H(z)$ が時間領域でできるだけ左右対称になるように分解の方法を決定⁽⁵⁾する。

以上の手順により、消失モーメントの次数が N で $H(z)$ のフィルタ長が $2(N+M)$ という制約条件のもとで、最適な帯域分割特性をもつウェーブレットを生成することができる。設計パラメータ (N, M) は自由に選ぶことができるが、同じ N でも M を大きくとるほど帯域分割特性のよいウェーブレットが得られる反面、ウェーブレットのサポートは長くなるという trade-off がある。

3.2 生成例 例として $(N, M)=(2, 4), (4, 6)$ の場合について、生成した最適ウェーブレットのスケール関数 $\phi(x)$ とマザーウェーブレット $\psi(x)$ を図3に示す。フィルタ係数を表1に、フィルタの周波数特性を図4に示す。比較のために同じモーメント条件をもつ Daubechies のウェーブレットおよび同じサポート長さをもつ Daubechies のウェーブレットの周波数特性を破線と鎖線で示している。いずれの Daubechies ウェーブレットと比較しても、遷移域における減衰量ははるかに大きいことがわかる。

4. 数値実験

本手法の有効性を示すための数値実験を行った。以下の例ではサンプリング間隔を1として時間および周波数を正規化している。対象としたのは共振形センサの特性を模擬したシステムで、図5に示すように顕著なバンドパス特性をもつ。 $N=4, M=6$ のウェーブ

Fig. 5 Bandpass system

Fig. 6 Decomposition of system into subsystems

Fig. 7 Input signals $x(t)$ and observations $y(t)$ with SNR=5 Fig. 8 Estimate $\hat{x}(t)$ using proposed method Fig. 9 Estimate $\hat{x}(t)$ using truncated singular value decomposition (TSVD)

レットを用い、 $\varepsilon=0.25, \alpha=20, J=4$ として2.4節の手順でサブシステムへの分解を行った。分解の結果、 $\mathcal{B}_R=\{(4, 0), (4, 1), (3, 1), (3, 3), (4, 8), (4, 9)\}$ となった。帯域分割のようすを図6に模式的に示す。

まず、本手法によるディコンボリューションの基本性能を確認するため、MATLAB の Wavelet Tool-

Table 2 Mean square error ratio $E[\|\tilde{x}-x\|^2/\|x\|^2]$ for proposed method and TSVD

	SNR	Proposed	TSVD
Blocks	1	0.932	0.968
	2	0.530	0.872
	5	0.454	0.814
	10	0.391	0.534
Bumps	1	0.743	0.948
	2	0.447	0.747
	5	0.238	0.486
	10	0.255	0.413

Fig. 10 Estimation of abnormal signal.

box にて提供されている雑音除去性能評価用の信号, Blocks, Bumps を入力信号 $x(t)$ とし, 白色雑音を加えて観測信号 $y(t)$ を作成した. 図 7 に入力信号と, SN 比が 5 の場合の観測信号を示す. 得られた観測信号に対して, 2・7 節の手順 3, 4, 5 を用いてディコンボリューションを行った結果を図 8 に示す. ただし, $\mathcal{T}=[0, 599]$ としている. 比較のために, 不適切問題の適切化手法としてよく用いられる特異値分解法⁽⁷⁾を使用してディコンボリューションを行った. ただし特異値分解法で必要な特異値の打ち切り次数は試行錯誤的に選んだ.

結果を図 9 に示す. また, SN 比を 1, 2, 5, 10 としたときの推定誤差率の 10 回の試行の平均値 $E[\|\tilde{x}-x\|^2/\|x\|^2]$ を表 2 に示す. 図 8, 9, 表 2 より, 本研究で提案する手法が特異値分解法よりよい結果を与えることがわかる. 特に Bumps のように非定常性の極めて高い信号に対して, 本手法は有効に作用する. これは本手法に導入したしきい値処理のもつ優れた特性である.

Fig. 11 Two-channel perfect reconstruction filter bank

(a) Discrete wavelet transform

(b) Wavelet packet transform

Fig. 12

実際の異常信号検出への適用を考えると, 時間軸上に疎らに存在する異常信号を効率よく処理することが必要になる. そこで図 9 のようなパルス状の信号を入力として SN 比が 3.5 の白色雑音を加えて観測信号を作成し, 2・7 節の手順 1 から 5 を適用してディコンボリューションを行った. 結果を図 10 に示す. パルスが特に近接している箇所以外では, パルスの発生時刻, 符号, 振幅比が良好に検出できている. また, パルスが存在する時刻の近傍では高い解像度で, そのほかの時間区間では低い解像度でディコンボリューションが行われていることがわかる. 信号の存在する区間でのみ推定値の解像度を上げていることになり, 効率のよいディコンボリューション処理を実現できている.

5. 結 言

稼働中の機械が発生する異常信号の常時連続監視への適用を前提として, 観測された異常信号のディコンボリューション処理に関する研究を行い, 次のような成果を得た.

(1) ウェーブレットパケットを用いてシステムを複数の帯域に分割し, 帯域ごとにディコンボリューションを行う手法を構築した.

(2) ウェーブレットパケットをうまく選ぶことによって, 不適切なディコンボリューション問題を適切化し, 安定に解を求めることができることを示し, ウ

ウェーブレットパケットを選択するための手順を明らかにした。

(3) 推定したウェーブレットパケット係数に対して非線形なしきい値処理を適用することにより、時間的に局在した異常信号を効果的に抽出することができた。

(4) 本手法への適用に最適化されたウェーブレットを新たに生成した。

なお、本研究で新たに生成した直交ウェーブレットは優れた帯域分割特性をもつため、ディコンボリューションのほかにもサブバンド適応フィルタ、システム同定、時間周波数解析に基づく信号分離などへの応用に適していると考えられ、今後の研究が期待される。

付録 ウェーブレットパケット

図 11 のような 2 分割完全再構成フィルタバンクを考える。\$H_0(z)\$, \$H_1(z)\$ はそれぞれ、実係数のローパスフィルタ、ハイパスフィルタである。\$H_0(z)\$, \$H_1(z)\$ の設計条件は 3・1 節で与えられている。これらを図 12(a) のように低周波側を再帰的に分解するように組み合わせたものが、\$l^2(\mathbf{Z})\$ 上の離散ウェーブレット変換である。

ウェーブレットパケット変換はこのフィルタバンクの組合せを拡張したものである。すなわち図 12(b) のように、高周波側の帯域に対しても再帰的にフィルタバンクを作用させる。フィルタの組合せに自由度が生まれるので、例えば信号をより少ない個数の係数で表現できるようにフィルタの組合せを選ぶ⁽⁹⁾ など、目的に適合した帯域分割を行うことができる。

図 11 のフィルタバンクを次のように行列形式で表記する。以下、記号 \$\{\cdot\}^T\$ は行列の転置を表すものとする。

$$\mathbf{x}_0^1 = \mathbf{H}_0 \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_1^1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{x} \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_0^T \mathbf{x}_0^1 + \mathbf{H}_1^T \mathbf{x}_1^1 \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

ウェーブレットパケット変換は以下のように定義される。

$$\mathbf{x}_n^j = \Psi_n^j \mathbf{x}, \quad 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq n < 2^j \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

$$\Psi_0^0 = \mathbf{I}$$

$$\Psi_{2n+1}^{j+1} = \begin{cases} \mathbf{H}_0 \Psi_n^j & \text{if } n \text{ is even,} \\ \mathbf{H}_1 \Psi_n^j & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

$$\Psi_{2n+1}^{j+1} = \begin{cases} \mathbf{H}_1 \Psi_n^j & \text{if } n \text{ is even,} \\ \mathbf{H}_0 \Psi_n^j & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

\$j\$ はスケールパラメータ、\$n\$ は周波数を表す添字である。\$(j, n)\$ の組合せを、区間 \$\left[\frac{n}{2^j}, \frac{n+1}{2^j}\right)\$ が区間 \$[0, 1)\$ を重複なしに隙間なく覆うように選び、その集合を \$\mathcal{B}\$ とすると、\$\{\Psi_n^j : (j, n) \in \mathcal{B}\}\$ は \$l^2(\mathbf{Z})\$ の正規直交基底になる。

ウェーブレットパケット再構成(あるいは展開公式)は次式で与えられる。

$$\mathbf{x} = \sum_{(j, n) \in \mathcal{B}} \Psi_n^j \mathbf{x}_n^j \quad \cdots \cdots \cdots (33)$$

ウェーブレットパケット変換の性質のうち、次の二つは重要である。第 1 に、ウェーブレットパケット展開は信号の帯域分割表現を与える。\$n/2^j\$ が大きいほど高周波側の信号に相当する。信号の帯域幅はスケールが 1 段階大きくなるごとに \$1/2\$ になる。分割の組合せは目的にあわせて選ぶことができる。第 2 に、ウェーブレットパケット展開係数を時系列信号として見ると、スケールが大きい展開係数ほど粗いサンプリングになっている。これはウェーブレットパケット変換がダウンサンプリングを伴うためであり、スケールが 1 段階大きくなるごとにサンプリング間隔は 2 倍になる。

文 献

- (1) 増田新・山本鎮男・曾根彰, 離散ウェーブレット変換を用いた時系列信号のディコンボリューション手法, 機論, 63-605, C (1997), 105-112.
- (2) Donoho, D. L., Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 47 (1993), 173-205.
- (3) Donoho, D. L. and Johnstone, I. M., Ideal spacial adaptation via wavelet shrinkage, *Biometrika*, 81 (1994), 425-455.
- (4) Donoho, D. L., De-noising by soft-thresholding, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-41-3 (1995), 613-627.
- (5) Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*, (1992), 167-287, SIAM.
- (6) Strang, G. and Nguyen, T., *Wavelets and filter banks*, (1996), 157-164, Wellesley-Cambridge Press.
- (7) チャールズ W. グロエツチュ, 数理科学における逆問題, (1996), 82-99, サイエンス社.
- (8) 久保司郎, 逆問題, (1992), 50-51, 培風館.
- (9) Wickerhauser, M. V., *Adapted wavelet analysis from theory to software*, (1994), 237-272, A K Peters.