閉ループ機構の動力学解析の計算手順*

杉 本 浩 一^{*1}, 松 本 義 雄^{*1}

Computational Scheme for Dynamic Analysis of Closed Loop Mechanisms

Koichi SUGIMOTO and Yoshio MATSUMOTO

In this paper, derivation of equations for the dynamic analysis of closed loop mechanisms is described. The unified method which is applicable to any types of mechanism is obtained as a result. The condition of non-singular matrix which expresses the equilibrium of forces and moments on links and joints shows that the procedure of the derivation is a kind of conventional loop cut method. However, in this method, the forces and moments at cut points can be described by the explicit functions of the forces and moments acting on the links without introducing extra parameters such as the Lagrange's multiplier. It is also shown that the procedure of the derivation can be expressed by linear functions formed by matrices and vectors which helps to develop a computer program with less cost.

Key Words: Robot, Dynamics, Kinematics, Mechanism, Screw Theory, Motor Algebra

1. 緒言

閉ループ機構の動力学解析では、リンクに作用する力は、そのリンクから開放端にあるリンクに作用する静的および動的力の合力であり、この合力と対偶を介して受ける力との釣り合いから、力解析や運動方程式の導出が容易に行える。これに対し、閉ループを持つ機構の動力学解析は、ループ内での力の釣り合い条件から、対偶作用力を求め、これから力解析や運動方程式の導出を行わなければならない。また閉ループ機構にはアクチュエータで駆動されない受動対偶が多く存在し、受動対偶での仮想仕事の条件を、力の釣り合い式に加えなければならない。このように閉ループ機構の動力学解析は閉ループ機構のそれに比べ非常に複雑なものとなる。

従来の閉ループ機構の動力学解析ではループの中の1つの対偶を取り去り、ループを切断した仮想木構造を考え、ラグランジュ乗数を用いる方法や、機構全体の仮想仕事の原理から、力解析や加速度解析を行う手法が提案されている^{(1)~(3)}。これに対し筆者はリンクの速度、加速度、力を6次元ベクトルであるモータ(スクリュー座標)で表し、力の釣り合い式と、受動対偶の

仮想仕事の条件から、力解析や運動方程式の導出を行う手法を開発した⁽⁶⁾。この手法では、モータを用いることにより、閉ループ機構での力の釣り合い式がモータの線形結合で表され、また仮想仕事の条件が2つのモータである6次元ベクトルの双線形形式で表されるため、線形演算のみで動力学解析を行うことが可能であり、そのためラグランジュ乗数のような新たなパラメータを導入することなしに、解析手順を閉じた形で導くことができた。

本論文ではこの解析手順の詳細検討に基づき、この手法が仮想木構造の切断点に作用する力を解析的に求め、アクチュエータで駆動される能動対偶の作用力を切断点での力の線形関数として表すことであることを明らかにする。さらに多自由度対偶への対応、運動方程式導出の詳細手順を示し、本手法が計算機プログラム化に適したものであることを示す。

2. 解析手順

機構の変位解析結果は既知であるとする。すなわちすべてのリンク、対偶の位置・姿勢は数値的に計算されているものとする。対偶軸の位置と方向から、その対偶を構成している対偶素の相対運動を表すモータ M (以後対偶モータと呼ぶ。)が計算できる。たとえば対偶軸の方向余弦ベクトルが a 、軸上の1つの点の位置ベ

* 原稿受付 1997年7月15日。

*¹ 正員, (株)日立製作所生産技術研究所(☎ 244-0817 横浜市戸塚区吉田町 292)。

クトルが $\mathbf{r}$ であるとき、対偶モータは

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} : \text{回り対偶} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} : \text{進み対偶} \end{cases} \quad (1)$$

である。

対偶が f 自由度のときは f 個の1自由度の対偶の直列連結でモデル化し、 f 個の対偶モータを定める。さらにリンクの質量及び慣性テンソルを表す 6×6 行列の慣性バイナ B もリンクの位置・姿勢から計算できる。1自由度対偶でモデル化された機構の対偶 j の対偶モータを $\mathbf{M}_j$ で表すことにする。リンク i の慣性バイナを B_i と表す。

機構の全ての対偶素間の相対変位（以後対偶変位と呼ぶ。対偶速度、加速度も同様である。）を θ で表す。リンク i の速度および加速度を表すモータをそれぞれ $\mathbf{V}_i$ 、 $\mathbf{A}_i$ とすると、静止リンクからリンク i につながる開ループ連鎖に付録に示す開ループ機構の関係式を用いることにより、

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{J}_i \dot{\theta} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{J}_i \ddot{\theta} + \dot{\theta}^T \mathbf{P} \dot{\theta} \quad (3)$$

と表すことができる。ここに、付録に示すように、 $\mathbf{J}_i$ は m 個のモータを列ベクトルとして持つ行列である。また $\mathbf{P}$ はその要素がモータである行列である。これによりリンク i に作用する動的力 $\mathbf{D}_i$ は

$$\mathbf{D}_i = -\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i - \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i \quad (4)$$

となる。

一方、能動対偶の変位だけからなるベクトルを θ_a とすると、対偶速度は能動対偶の速度の線形関数であり、加速度は能動対偶の加速度の線形結合と対偶速度の2次形式を要素とするベクトルの和であるから、付録に示すように

$$\dot{\theta} = \mathbf{C} \dot{\theta}_a \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} = \mathbf{C} \ddot{\theta}_a + \mathbf{d} \quad (6)$$

の形で表すことができる。ここに $\mathbf{C}$ は行列であり、 $\mathbf{d}$ は能動対偶の対偶速度の2次形式を要素とするベクトルである。

以上の関係を整理することにより、リンク i に作用する動的力 $\mathbf{D}_i$ は

$$\mathbf{D}_i = -\mathbf{G}_i \ddot{\theta}_a - \mathbf{Q}_i \quad (7)$$

の形となる。ここに $\mathbf{Q}_i$ は速度モータと運動量モータの外積項からなるモータで、

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{J}_i \mathbf{d} + \mathbf{B}_i (\mathbf{C} \dot{\theta}_a)^T \mathbf{P} (\mathbf{C} \dot{\theta}_a) + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_i \mathbf{V}_i \quad (8)$$

で、リンク i に作用する遠心力やコリオリ力を表している。

Fig.1 Closed Loop Mechanism

る。また

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{J}_i \mathbf{C} \quad (9)$$

である。

機構のリンクでの力の釣り合い式を定めるため、機構の結合行列を用いる。結合行列とはグラフの辺と頂点の関係を示すものであるが、ここではリンクに作用する方向を示すため、結合行列の要素の正負を考える。結合行列の行をリンクに、列を対偶に対応させる。結合行列の ij 要素に対し、対偶 j につながるもう一つのリンクの番号が i より小さいときは1、大きいときは-1、リンク i に対偶 j が接続していないときは0とする。図1の機構では結合行列 Φ は

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる。

このように結合行列を定めると、リンク i の力の釣り合い式は、結合行列の i 行目の行ベクトル μ_i を用いて

$$\mu_i \mathbf{h} + \mathbf{D}_i + \mathbf{F}_i = \mathbf{o} \quad (11)$$

と書くことができる。ここに、 $\mathbf{h}$ は対偶 i を介して隣のリンクから作用する力(対偶力) $\mathbf{H}_i$ を要素として持つベクトル

$$\mathbf{h} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{H}_8]^T \quad (12)$$

であり、 $\mathbf{F}_i$ はリンク i に作用する重力等の外力である。たとえばリンク4での釣り合い式は

$$\mathbf{H}_3 - \mathbf{H}_4 - \mathbf{H}_8 + \mathbf{D}_4 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{o} \quad (13)$$

となる。

リンク数 n 、対偶数 m からなる一般の閉ループ機構について、式(12)を静止リンクを除くすべてのリンクについてまとめて書くと、

$$\Psi \mathbf{h} + \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{o} \quad (14)$$

と書ける。ここに $\mathbf{e}$ および $\mathbf{f}$ はそれぞれリンクの動的力、

外力を表す $n-1$ 個のモータを要素とする列ベクトルである。Ψは結合行列Φから静止リンクの行を除いたものである。ここで h を、能動対偶の対偶力を全て含む $n-1$ 個の対偶力を要素を持つベクトル a と、残りの対偶力を要素とする p に分けると、式(14)は

$$Aa + Lp + e + f = 0 \quad (15)$$

と書ける。ここに行列 A は $(n-1) \times (n-1)$ の正方行列、 p は $n-1$ 個の対偶力を要素とする列ベクトル、 L は $(n-1) \times (m+1-n)$ 行列である。行列 A が正則であるなら、

$$a = -A^{-1}(Lp + e + f) \quad (16)$$

を得る。

式(16)は a の要素である対偶力を与える式である。まず対偶が全て1自由度であるとする。 a に含まれる受動対偶の式を用いて、受動対偶の対偶力と仮想変位との仮想仕事为零であるという条件、すなわち、対偶力と対偶モータとの仮想仕事为零であると条件から、 $n-1-f$ 個の条件式を得る。なお仮想仕事は対偶力と対偶モータの双線形形式である相反積で与えられる。ここに f は能動対偶の数、すなわち機構の自由度である。さらに p の要素は全て受動対偶の対偶力であり、おのおのの対偶モータとの相反積为零であるという条件から $m+1-n$ 個の条件式を得る。したがって、あわせて $m-f$ 個の条件式が得られるが、これは p の対偶力の要素を未知数とする線形方程式である。未知数の数は $d(m+1-n)$ である。ここに d は機構の運動空間の次元であり、たとえば平面機構のときは3、空間機構のときは6である。

機構の自由度の式

$$f = d(n-1) - (d-1)m \quad (17)$$

が成立すると、

$$d(m+1-n) = m - f \quad (18)$$

となり、未知数と式の数が一致し、これを解くことにより、 p が定まる。 p を用いて、式(16)から、能動対偶の対偶力を計算し、能動対偶の対偶モータの相反積から、入力トルクを求める。

リンクの動的力 D に対偶速度、加速度の式のままで上記の計算を行えば運動方程式が導かれ、対偶の速度、加速度から動的力を計算し、上記計算につなげると、機構を運動させるのに必要な入力トルクが計算できる。入力トルクの計算では、上記計算過程はすべて数値計算であるので、一本道で計算できるが、運動方程式の導出には、動的力が対偶加速度および速度の関数であり、計算過程は数式処理となるので取り扱いが複雑となる。この詳細については後の章で述べる。

3. 行列正則化の条件

第2章の計算を行うためには行列 A が正則であることが必要十分条件である。このための条件の検討を行う。

行列 A は機構の結合行列の幾つかの列ベクトルで構成される。結合行列の列ベクトルは対偶がどのリンクを結合しているかを示しており、その列ベクトルは1つの1と1つの-1を持ち、他の要素はすべて0である。いまこの結合行列から静止リンクの行を除いたものを考える。このとき、静止リンクに結合している列ベクトルは、1つの1か-1だけを持つ。いま行列 A に静止リンクに結合している対偶が含まれないとすると、全ての列ベクトルは1と-1を持ち、したがって、行列 A の行ベクトルの全ての和をとると、零ベクトルとなる。したがってこのとき行列 A は正則ではない。このように行列 A は少なくとも1つの静止リンクに結合する対偶を含まなければならない。

このとき静止リンクに結合する対偶の列ベクトルはただ1つの1か-1を持ち、他の要素は零である。したがって行列式 $|A|$ は、この対偶ベクトルで展開でき、新たな行列式 $|A_1|$ を得る。行列 A_1 の列ベクトルにも、ただ1つの1か-1を持つものがなければならない。でなければ行列式 $|A_1|$ が零となり、行列 A は正則でなくなる。行列 A_1 において、ただ1つの1か-1を持つ列ベクトルは、静止リンクに結合している対偶か、あるいは行列 A_1 を作るために取り去った対偶により静止リンクに結合されているリンクにある対偶でなければならない。

すなわち、行列 A_1 には静止リンクから行列の中にある対偶により静止リンクに結合されているリンクの対偶が少なくとも1つはなければならない。行列式 $|A_1|$ はまたこの対偶ベクトルで展開され、その結果得られる行列 A_2 についても同じ議論が成立する。この過程を最後まで続けると、結局行列 A の対偶はすべて、その中の対偶をたどって静止リンクにたどり着けるものでなければならない。すなわち、すべてのリンク、対偶は連結されていなければならないことが分かる。

行列 A に静止リンクを加えた機構は、リンク数が n で、対偶数が $n-1$ である。この中の対偶がすべてリンクで静止リンクに結合されているとすると、これは1つの機構であり、その機構のループ数 α はグラフ理論のオイラーの定理より

$$\alpha = (n-1) - n + 1 = 0 \quad (19)$$

となり、したがって、機構は木構造を持つ。ゆえに行列 A の対偶は元の機構の部分である木構造の機構に属するものでなければならない。

行列 A に入らない対偶の数は $m-n+1$ で、これはループの数に等しい。したがって行列 A に入らない対偶は

機構のループを切断する必要最小限の対偶である。

ところで行列式 $|A|$ の値は上記操作を続けることにより求まるが、展開できる数値が1か-1であるから、その値も1か-1である。行列 A の余因子についても同じことがいえ、この場合、正則である必要はないから、その値は1, -1, あるいは0である。したがって行列 A の逆行列の要素も1, -1, あるいは0であり、これは行列 a の要素であるモータは, Pp , e , f の要素であるモータの加減算のみで求まることを示している。これは木構造の機構の対偶力がリンクに作用する力の加減算で定まることと同じ意味である。

4. 多自由度対偶の取り扱い

機構が多自由度対偶を持っている場合、その運動学的モデルは1自由度対偶モデルで表されるが、動力学モデルは、1自由度対偶モデルを用いると、質量零のリンクを仮想しなければいけなくなり、多自由度対偶は多自由度対偶のまま扱った方が有利である。この場合も上記と同様に動力学解析が行える。多自由度対偶の場合、その対偶の仮想仕事の条件式は対偶の自由度と同じ数だけ導かれる。 e 自由度の多自由度対偶なら、その運動を表す e 個の対偶モータを決定できる。対偶に作用する対偶力と対偶モータとの相反積をとることにより、力モータの要素を未知数とする e 個の線形同次方程式が得られる。

すべて1自由度の対偶からなる機構の、たとえば e 個の対偶を e 自由度の多自由度機構に置き換えた場合を考える。このとき機構の対偶素数及びリンクの数が減少する。1自由度の対偶である機構が

・機構の自由度: f , リンク数: n , 対偶数: m

であったとすると、多自由度対偶に置き換えた機構では

・機構の自由度: f , リンク数: $n+1-e$, 対偶数: $m+1-e$

となり、ループ数は同じ $m+1-n$ である。動力学解析式で、 p の要素である対偶の数はループ数と同じである。したがって、 a に含まれる受動対偶の数は1自由度対偶からなる機構の場合は $n-1-f$ 、多自由度対偶に置き換えた機構では $n-e-f$ である。求めなければいけない力は p の要素で、これは両者同じく $d(m+1-n)$ であり、前者の場合は仮想仕事の条件から導かれる式の数も同じであることを前章で示した。後者の機構では、対偶の数は $e-1$ 個減るが、仮想仕事の条件式が、多自由度機構で $e-1$ 個増えるため、条件式の数はず変わらず、 p の要素の値が決定できることがわかる。これは多自由度対偶が a 、 p いずれにも含まれていても同じである。

同じ議論が複数の多自由度対偶を持つ機構にも当

てはまり、したがって、機構が多自由度対偶を持っていたとしても、前章で示した手法で動力学解析が行える。

以上のように機構が多自由度対偶も持っていたとしても、仮想仕事の条件式は同じ数、すなわち機構の運動空間の次元数とループ数の積となる。したがって、この部分の計算負荷はほぼ同等であるが、厳密にいうと、 p に多自由度対偶が含まれている方が少し計算量が少なくなる。 p に含まれる対偶の仮想仕事の条件式は、その対偶力の要素だけの線形式である。したがって、 b の e 自由度の対偶の場合、未知数を $d-e$ 個とし、残りの要素を p の対偶の仮想仕事の条件から未知数の関数として定め、 a の想仕事の条件からこれらの未知数を求めるという手法をとることができる。このような手法をとることにより、次数の大きな線形方程式を次数の少ない複数の線形方程式に分解できる。 p に多自由度対偶が含まれる方がこの分解をより細かくできる。

また多自由度対偶を持つ機構の方がリンク数が少なくなるため、動力的計算については有利である。

5. 運動方程式導出のための数式処理

式(7)における行列 G_i で、 B_i および J_i は、リンクの慣性テンソル、質量、対偶モータで値が決まるもので、動力学解析においては数値として扱われる。 C は機構の対偶の速度と能動対偶の速度との関係を表す行列で、機構の形式によって定まるものである。

一方 Q_i は能動対偶の速度の2次形式であり、その係数は同じくリンクの慣性テンソル、質量、対偶モータで決まるもので、その数値は運動解析により計算できるものである。

したがって運動方程式導出過程では

$$D_i = -G_i \ddot{\theta}_a - \dot{\theta}_a^T Q_i \dot{\theta}_a \quad (20)$$

の形に書ける。ここに G_i , Q_i の要素はモータであり、これらの値は数値として既知である。

式(16)の a から、受動対偶(対偶番号 j)の1行だけを取り出すと、これは、 p の要素の受動対偶の力モータの線形結合と、能動対偶の加速度の線形式を要素とするモータ項と、能動対偶の速度の2次形式を要素とするモータ項 U_j 、およびリンクに作用する外力 F の和の項 K_j であり、

$$H_j = s^T p + S \ddot{\theta}_a + U_j + K_j \quad (21)$$

の形となる。

ところで p の要素である受動対偶の対偶力を

$$H = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_6]^T \quad (22)$$

とする。1自由度対偶であるなら、仮想仕事为零という

条件から

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_6 x_6 = 0 \quad (23)$$

の既知の係数 λ を持つ1つの線形同次式が成立することである。ここに λ は対偶モータの要素である。これから、対偶力は

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_6} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_6} & -\frac{\lambda_3}{\lambda_6} & -\frac{\lambda_4}{\lambda_6} & -\frac{\lambda_5}{\lambda_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

と未知数5つを要素とする5次元ベクトルの線形式で表される。同様に e 自由度の対偶力は $6-e$ 個の未知数を要素とするベクトルの線形式で表される。このように p の要素を未知数の線形式で表すと、 $s^T p$ も同じく全ての未知数の線形式となり、未知数を要素とするベクトルを x とすると、

$$s^T p = Wx \quad (25)$$

と書ける。ここに W はその要素がすべて既知である行列である。

式(21)と対偶モータの相反積は

$$\begin{aligned} & M_j \circ H_j \\ &= (TM_j)^T H_j \\ &= (TM_j)^T Wx + (TM_j)^T S\ddot{\theta}_a \\ &\quad + (TM_j)^T Q_j + (TM_j)^T K_j \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここに行列 T は

$$T = \begin{bmatrix} 0 & E_3 \\ E_3 & 0 \end{bmatrix} \text{ただし: } E_3: 3 \times 3 \text{ 単位行列} \quad (27)$$

である。式(26)第2行の左辺の第1項は未知数 x の線形式、第2項は能動対偶の加速度の線形式、第3項は能動対偶の速度の積、すなわち $\theta_{ai}\theta_{aj}$ の線形式、外力の項は定数であるから、結局式(26)は

$$k^T x = l^T \ddot{\theta}_a + m^T q + \beta \quad (28)$$

の形となる。ここで、 q は能動対偶の速度の積の項であり、 k , l , m は既知の値を持つベクトル、 β は既知のスカラである。

式(28)の関係が、 a の受動対偶の要素すべてに成り立つから、これらをまとめると、

$$Kx = L\ddot{\theta}_a + Mq + \beta \quad (29)$$

となる。行列 K は正方行列であり、 x は式(29)の両辺に左から K^{-1} をかけることにより求まり、 p の要素である対偶力は x の線形関数であるから、式(25)の左から行列を掛けると求まる。 a の要素である能動対偶の対偶力は式(16)の右辺にこの結果である p を代入すればよい。これと能動対偶の対偶モータの相反積をとると運動方

程式となる。

このように、本手法を用いると、運動方程式導出過程を計算機処理に適した行列計算で記述でき、また従来のようなラグランジュ乗数等の新たなパラメータを導入する必要がなく、従来の手法に比べ、計算負荷を少なくすることが期待できる。

6. 計算例

図1の機構が平面機構で、対偶がすべて1自由度対偶なら、機構の自由度は2である。この機構の能動対偶を対偶1と6とした場合の動的力の解析を行う。この機構の結合行列は式(10)であり、1行目は静止リンクのリンク1に対応するものである。能動対偶は1と6である。 p に属する対偶の力モータを対偶2と対偶8とすると、

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

であり

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

である。

この行列 A の逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

となる。このように行列 A は正則であるが、たとえば P の1列目と A の6列目を入れ替えると、 A の6行目の行ベクトルが零になり、これは同じループ内にある対偶7と8の力モータを p にしたことに対応する。

式(32)を用いると、式(16)は

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_8 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} R_2 \\ -R_3 \\ -R_3 - R_4 \\ R_3 + R_4 + R_5 \\ R_6 + R_7 \\ R_7 \end{bmatrix} \quad (33)$$

となる。ただしここでは R_i はリンク i に作用する動的外力と外力の和であるとする。

式(33)から、受動対偶である3, 4, 5, 7に対応する行を抜き出し、その下に H_2 と H_8 の等式を加えると、

$$\begin{bmatrix} H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_7 \\ H_2 \\ H_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R_3 \\ -R_3 - R_4 \\ R_3 + R_4 + R_5 \\ R_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

を得る。

式(34)の両辺の左側から、対角成分が $(TM_3)^T$, $(TM_4)^T$, $(TM_5)^T$, $(TM_7)^T$, $(TM_2)^T$, $(TH_8)^T$ で、残りの要素が o^T である行列をかけると、受動対偶に作用する力モータによる仮想仕事が零であるという条件式が得られる。これを実際に計算すると

$$= \begin{bmatrix} (TM_3)^T & o^T \\ (TM_4)^T & -(TM_4)^T \\ -(TM_5)^T & (TM_5)^T \\ o^T & -(TM_7)^T \\ (TM_2)^T & o^T \\ o^T & (TM_8)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(TM_3)^T R_3 \\ -(TM_4)^T (R_3 + R_4) \\ (TM_5)^T (R_3 + R_4 + R_5) \\ (TM_7)^T R_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

を得る。

この機構は平面機構であり、モータは3次元であるから、式(35)の最初の行列は、要素をスカラで表すと 6×6 行列となる。この逆行列を式(35)両辺に左からかけると、 H_2 および H_8 の値が定まる。この値を式(33)の能動対偶1, 6に対応する行を抜き出した式

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_2 \\ R_6 + R_7 \end{bmatrix} \quad (36)$$

に代入すれば、能動対偶に作用する力モータが定まる。これらの力モータと対偶モータとの相反積が以下のよ

うに機構の運動により能動対偶に作用するトルクを与える。

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (TM_1)^T & o^T \\ o^T & (TM_6)^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 \\ H_8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_2 \\ R_6 + R_7 \end{bmatrix} \right) \quad (37)$$

力の解析のときは、 R の値は既知であるので、その値を式(37)に代入すれば、能動対偶のトルクが求まる。運動方程式導出の場合、 R は第5章で示したように、能動対偶の加速度ベクトルと速度積ベクトル

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_a &= [\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_6]^T \\ q &= [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \quad \dot{\theta}_1^2 \quad \dot{\theta}_6^2]^T \end{aligned} \quad (38)$$

の線形形式と定数項の和を要素とするモータである。これらの係数はすべて既知であるので、この式を式(37)に代入することにより運動方程式が求まる。

7. まとめ

本論文ではモータ（スクリュー座標）を用いた閉ループ機構動力学解析の計算手順の導出を行った。運動および力をモータで表すことにより、線形計算で解析ができ、したがって、式の展開を計算機処理に適した行列表現で書き下すことができた。本論文で導いた方式は、基本的にはループ切断法と同じであることを、行列の正則の条件から導いた。しかし従来のループ切断法で用いていたラグランジュ乗数や、切断点における仮想の力等の余分なパラメータを設定することなしに、切断点の力を計算する式を系統だてて導くことができた。これらの特徴により、計算負荷の少ない計算機プログラム開発に寄与し得るものである。

文 献

- (1) 中村, 日本ロボット学会誌, Vol.10, No.6, 1992, pp.709-714.
- (2) J.Y.S. Luh and Y. Zheng, IEEE, J. of Robotics and Automation, Vol.RA-1, 1985, pp.95-103.
- (3) 遠山, 渡部, 田野, 日本ロボット学会, Vol.14, No.2, 1996, pp.279-286.
- (4) K. Sugimoto, Trans. ASME, J. of MTAD, Vol.111, March 1989, pp.29-33.
- (5) 杉本, 原, 増田, 日本ロボット学会, Vol.7, No. 6, 1989, pp.685-693.
- (6) 杉本, 日本ロボット学会誌, Vol.15, No.3, 1997, pp.460-467.

付 録

まず開ループ機構の速度、加速度の関係式を示す。 p 個の対偶により $p+1$ 個のリンクが直列に結合された開ループ連鎖を考える。リンクには静止リンクを0とし、1, 2, 3, ...と順に番号を付け、対偶にはリンク

0側から1, 2, 3, ...と番号を付ける. リンク*i*の速度をモータ V_i で表わす. リンク*i*の速度は対偶1から*i*までの相対速度の和であるから

$$V_i = \dot{\theta}_1 M_1 + \dot{\theta}_2 M_2 + \dots + \dot{\theta}_i M_i \quad (39)$$

である.

ここでモータを列ベクトルとする*p*列の行列*J*を考え, リンク*i*に対する行列を

$$J_i = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i \ \mathbf{o} \ \dots \ \mathbf{o}] \quad (40)$$

とする. また対偶変位ベクトル θ を $[\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T$ とすると, 式(39)は

$$V_i = J_i \dot{\theta} \quad (41)$$

と表される.

リンク*i*の速度を表す式(39)を時間*t*で微分すると,

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{d}{dt} V_i \\ &= A_{i-1} + \ddot{\theta}_i M_i + V_{i-1} \times (\dot{\theta}_i M_i) \\ &= \ddot{\theta}_1 M_1 + \ddot{\theta}_2 M_2 + \dots + \ddot{\theta}_i M_i + \\ &\quad \dot{\theta}_1 M_1 \times (\dot{\theta}_2 M_2) + \\ &\quad (\dot{\theta}_1 M_1 + \dot{\theta}_2 M_2) \times (\dot{\theta}_3 M_3) + \dots + \\ &\quad (\dot{\theta}_1 M_1 + \dots + \dot{\theta}_{i-1} M_{i-1}) \times (\dot{\theta}_i M_i) \end{aligned} \quad (42)$$

を得る. これがリンク*i*の加速度モータ A_i を与える. またこれは

$$A_i = J_i \ddot{\theta} + \dot{\theta}^T P_i \dot{\theta} \quad (43)$$

と書くこともできる. ここに*P*は*m*行*n*列要素 P_{mn} がモータである*p*×*p*行列であり

$$P = [P_{mn}] \quad (44)$$

ただし

$$P_{mn} = \begin{cases} M_n \times M_m & n < m < i \text{ のとき} \\ \mathbf{o} & \text{それ以外} \end{cases}$$

である.

ついで*m*個の対偶から成る単ループ機構の運動方程式を求める手順を示す. なお対偶は1から*m*に順に番号が付けられているものとする

まずループ内での速度の釣り合い式は

$$\dot{\theta}_1 M_1 + \dot{\theta}_2 M_2 + \dots + \dot{\theta}_m M_m = \mathbf{o} \quad (45)$$

である. 単ループ機構の対偶は, その幾つかがアクチュエータで駆動される能動対偶であり, 残りが受動対偶である. 能動対偶の変位ベクトルを θ_a , 受動対偶の変位ベクトルを θ_b とすると, 式(45)は

$$A \dot{\theta}_a = B \dot{\theta}_b \quad (46)$$

と書ける. 空間単ループ機構の場合ベクトル $\dot{\theta}_b$ の次元は6で, 行列*B*は6×6行列である. 一般にはベクトル $\dot{\theta}_b$ の次元と行列*B*のランクは等しく, これらは機構の対偶モータの張る線形空間の次元と等しい. したがって, 線形空間の基底の座標で式(46)を表すと, 行列*B*は常に正方行列である. 機構が特異点にないければ, 行列*B*は正則であり, したがって

$$\dot{\theta}_b = B^{-1} A \dot{\theta}_a \quad (47)$$

の関係から, 受動対偶の速度ベクトルが求まる. したがって単ループ機構の対偶ベクトルを θ とすると

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} E \\ B^{-1} A \end{bmatrix} \dot{\theta}_a = C \dot{\theta}_a \quad (48)$$

と能動対偶の対偶速度の線形関数として表すことができる. ここに*E*は単位行列である.

一方加速度の釣り合い式は

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 M_1 + \ddot{\theta}_2 M_2 + \dots + \ddot{\theta}_m M_m + \\ &\dot{\theta}_1 M_1 \times \dot{\theta}_2 M_2 + (\dot{\theta}_1 M_1 + \dot{\theta}_2 M_2) \times \dot{\theta}_3 M_3 + \\ &(\dot{\theta}_1 M_1 + \dot{\theta}_2 M_2 + \dots + \dot{\theta}_{m-1} M_{m-1}) \\ &\quad \times \dot{\theta}_m M_m = \mathbf{o} \end{aligned} \quad (49)$$

である. ここで対偶モータの外積の項をループの速度外積和と呼び, *S*で表す. 速度外積和*S*は $\dot{\theta}$ の2次形式であるが, $\dot{\theta}$ は $\dot{\theta}_a$ の線形関数であるから, 能動対偶の対偶速度である $\dot{\theta}_a$ の2次形式である. この式から速度のときと同様に

$$A \ddot{\theta}_a + S = B \ddot{\theta}_b \quad (50)$$

となり,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \begin{bmatrix} E \\ B^{-1} A \end{bmatrix} \ddot{\theta}_a + \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ B^{-1} S \end{bmatrix} \\ &= C \ddot{\theta}_a + d \end{aligned} \quad (51)$$

と能動対偶の対偶速度, 対偶加速度の関数として表される. ベクトル*d*は*m*次元のベクトルであり, 最初から能動対偶と同じ数の元は零である.

閉ループ機構での速度, 加速度については, そのループ毎に単ループ機構と同じ関係式が得られる. 機構の全てのループについての関係式を, 機構全体についてまとめると,

$$L \Phi \dot{\theta} = 0 \quad (52)$$

$$L \Phi \ddot{\theta} + \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_q \end{bmatrix} = 0 \quad (53)$$

が得られる. このように閉ループ機構の対偶速度, 加速度の関係式は単ループ機構のときと同じ形で表される. ここに*q*は機構のループ数である.

単ループ機構のときと同様に $\dot{\theta}$ を能動対偶の $\dot{\theta}_a$ と $\dot{\theta}_b$ に分けると, 式(52), (53)はそれぞれ式(46), (50)の形に変形できる. 従って, 単ループ機構のときと同様に, 式(52), (53)は

$$\dot{\theta} = C \dot{\theta}_a \quad (54)$$

$$\ddot{\theta} = C \ddot{\theta}_a + d \quad (55)$$

の形に書ける.