ばね支持はりの振動制御のための同時最適設計*

裘 進 浩^{*1}, 谷 順 二^{*1}, 朱 曄^{*2}
漆 山 雄 太^{*3}, 本 谷 康 治^{*3}

Simultaneous Optimal Design of a Spring-Supported Beam for Vibration Control

Jinhao QIU, Junji TANI, Ye ZHU,
Yuta URUSHIYAMA and Yasuharu HONTANI

The modeling and formulation of simultaneous optimization problems with mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ norm objective function are discussed in the paper. They are applied to the simultaneous optimization of the cross-sectional parameters of a spring-supported beam and the parameters of the controller used to actively suppress the vibration of the beam. The weighted sum of $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms of the transfer functions from external disturbance to measured outputs is used as the objective function. Simultaneous optimization is realized by iteratively executing structural optimization and controller optimization. Both serial and parallel approaches to combine structural optimization and controller optimization are investigated. The performance of both output and control input is improved significantly after simultaneous optimization. The simulation results show the great potential advantages of simultaneous optimization over traditional design methods.

Key Words: Simultaneous Optimization, Objective Function, Vibration Control, $\mathcal{H}_2$ Norm, $\mathcal{H}_\infty$ Norm

1. はじめに

最近ばね支持梁の過渡応答や振動の振幅などの動特性を向上させるために、アクティブ制御が使われている。従来の最適設計法ではまず最適な構造を設計し、つぎに設計された構造に対して最適なコントローラを設計する。しかし、構造系パラメータと制御系パラメータの連成により従来の設計法で得られたパラメータは全体のシステムに対しても最適であるとは断定できない。そこで、構造系パラメータと制御系パラメータの同時最適化方法について注目を集め、いろいろな研究が行われている^{(1)~(4)}。同時最適化の手段はその問題の定式化、制御方法及び目的関数の選定に大きく依存するため、一般的な方法がまだ確定されていない。また、今までの研究では構造サブシステムと制御サブシステムに対してそれぞれ評価関数を設定し、それらの重みつき和を同時最適化の目的関数として用いた。

本研究では、構造サブシステム、制御サブシステム及び全システムに対して、外乱入力から測定出力までの伝達関数の $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ノルムを統一評価関数として導入した。この評価関数を用いて、ばね支持梁の振動制御のための構造パラメータと制御パラメータの同時最適化問題のモデリングと定式化を行った。具体的には有限要素法を用いて梁の振動を解析し、得られたモード運動方程式からシステムの状態方程式を求めた。外乱による振動を抑制するために、状態フィードバックコントローラを用いて制御を行った。外乱入力から測定出力までの閉ループ伝達関数の $\mathcal{H}_2$ と $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの重みつき和を評価関数として用いる。評価関数を最小にする構造系パラメータと制御系パラメータを直接求めることが難しいため、構造最適化と制御最適化の繰り返し法を用いる。最適コントローラは線形マトリクス不等式 (Linear Matrix Inequality — LMI) 法で求める。構造最適化は LMI 問題に変換できないため、逐次二次計画 (Sequential Quadratic Programming — SQP) 法を用いる。交互に最適コントローラの設計と構造最適化を実行し、同時最適解を求めるが、制御系設計と構造系設計の組み合わせについて、直列法と並列法を用いた。

* 原稿受付 1997年7月17日。

^{*1} 正員、東北大学流体科学研究所 (〒980-8577 仙台市青葉区片平2-1-1)。

^{*2} 東北大学大学院。

^{*3} (株)本田技術研究所栃木研究所 (〒321-3393 栃木県芳賀町下高根沢4630)。

2. 同時最適化問題のモデリング

図1は構造サブシステムと状態フィードバック制御サブシステムを含む一般的な同時最適化システムを示す。構造サブシステムは次のように有限要素法を用いてモデリングされる。

2・1 構造サブシステムのモデリング 有限要素法を用いて、連続体としての構造物を離散システムに変換できる。離散システムの運動方程式は次のように表すことができる。

$$M\ddot{q} + C_d\dot{q} + Kq = \theta_w w + \theta_u u \quad (1)$$

$$\tilde{y} = \theta_y q \quad (2)$$

$$\tilde{z} = \theta_z q \quad (3)$$

ここで、 $M_{n \times n}$, $C_{d \ n \times n}$, $K_{n \times n}$ はそれぞれ質量、粘性、剛性マトリクス、 $q_{n \times 1}$, $w_{k \times 1}$, $u_{l \times 1}$ はそれぞれ変位、外乱、制御入力、 $\tilde{y}_{\nu \times 1}$, $\tilde{z}_{\nu \times 1}$ はそれぞれ $\mathcal{H}_2$ と $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを計算するための測定出力である。また、 $\theta_w_{n \times k}$, $\theta_u_{n \times l}$, $\theta_y_{\nu \times n}$, $\theta_z_{\nu \times n}$ は w , u , $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ 関係のマトリクスである。

モード解析法を用いて、式(1)から構造の固有振動数と固有モードが得られる。高次モードを無視すると、次のようなモードマトリクスが得られる。

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \quad (m < n) \quad (4)$$

ここで、 ϕ_i は固有モードで、 $\Phi_{n \times m}$ は次の式を満足する。

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (5)$$

$$\Phi^T K \Phi = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \text{diag}(\lambda_i) \quad (6)$$

ここで、 λ_i は固有値である。

モードマトリクスを用いて、次のように座標変換する。

$$q = \Phi p \quad (7)$$

ここで、 p はモード座標である。上式を式(1)–(3)に代入すると次の三式が得られる。

$$\ddot{p} + 2\text{diag}(\xi_i \sqrt{\lambda_i})\dot{p} + \text{diag}(\lambda_i)p = \Phi^T \theta_w w + \Phi^T \theta_u u \quad (8)$$

$$\tilde{y} = \theta_y \Phi p \quad (9)$$

$$\tilde{z} = \theta_z \Phi p \quad (10)$$

このように、有限要素法を用いて連続体構造物を多自由度離散システムに変換することができ、さらにモー

Fig. 1 A general system for simultaneous optimization

ド解析法を用いて、式(8)–(10)のような非連成かつ低次元なモード運動方程式が得られる。

式(8)から次の状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (11)$$

ここで、

$$x = \begin{Bmatrix} p \\ \dot{p} \end{Bmatrix}_{2m \times 1} \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\text{diag}(\lambda_i) & -2\text{diag}(\xi_i \sqrt{\lambda_i}) \end{bmatrix}_{2m \times 2m} \quad (13)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T \theta_w \end{bmatrix}_{2m \times k}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T \theta_u \end{bmatrix}_{2m \times l} \quad (14)$$

また、システムの性能を評価するには、式(9)と(10)で定義された測定出力 $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ だけでなく、制御入力 u も必要である。そのため、ここでは出力ベクトルを拡張し、次のように出力方程式を一般化する。

$$y = \begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{Bmatrix} = C_1 x + D_1 u \quad (15)$$

$$z = \begin{Bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{z}' \end{Bmatrix} = C_2 x + D_2 u \quad (16)$$

ここで、 $\tilde{y}'_{\nu \times 1}$, $\tilde{z}'_{\kappa \times 1}$ は拡張された出力変数で、 C_1 , C_2 は次のように定義される。

$$C_1 = \begin{bmatrix} \theta_y \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\nu+l) \times 2m}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \theta_z \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\nu+\kappa) \times 2m} \quad (17)$$

また、 $D_{1 \ (\nu+l) \times l}$, $D_{2 \ (\nu+\kappa) \times l}$ は出力 y と z に反映される u の成分を表わす。構造パラメータをベクトル r で表わすと、マトリクス A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 は r の関数である。

2・2 コントローラと同時最適化 便宜上、固定ゲイン状態フィードバックコントローラを用いる。すなわち、制御入力は次式のように表わされる。

$$u = K_c x \quad (18)$$

ここで、 K_c はコントローラのゲインマトリクスである。

図1に示されたようなシステムで、外乱 w から出力 y と z までの伝達関数は次のようになる。

$$T_{wy} = (C_1 + D_1 K_c)[sI - (A + B_2 K_c)]^{-1} B_1 \quad (19)$$

$$T_{wz} = (C_2 + D_2 K_c)[sI - (A + B_2 K_c)]^{-1} B_1 \quad (20)$$

伝達関数 T_{wy} の $\mathcal{H}_2$ ノルムと T_{wz} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは次のように定義される。

$$\|T_{wy}\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \text{Trace} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T_{wy}(j\omega)^* T_{wy}(j\omega) d\omega \right) \right\}^{1/2} \quad (21)$$

$$\|T_{wz}\|_\infty = \sup \{ \|T_{wz} w\|_2 : w \in L_2, \|w\|_2 = 1 \} \quad (22)$$

ここで、上付*はマトリクスの共役転置を表わす。同時最適化の評価関数は次のように定義される。

$$F(r, K_c) = a\|T_{wy}\|_2 + b\|T_{wz}\|_\infty \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 a と b は正の定数である。 $\mathcal{H}_2$ と $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの定義により、評価関数 $F(r, K_c)$ は外乱入力 w と測定出力 y, z のエネルギー関係を表わす。また、この評価関数は構造サブシステム、制御サブシステム及び全体のシステムに対して、性能を評価できる統一評価関数である。

ここで、外乱による出力を最小にするための構造パラメータと制御パラメータの同時最適化問題は次のように定義できる。

$$\min_{r, K_c} F(r, K_c) \dots\dots\dots (24)$$

$$\text{s.t. } e_i(r) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, I) \dots\dots\dots (25)$$

$$g_j(r) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, J) \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 e_i と g_j はそれぞれ構造パラメータの等式と不等式の拘束条件である。式(24)–(26)は $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ の混合同時最適化問題を定義する。

本研究では、 $(a, b) = (1, 0)$ と $(a, b) = (0, 1)$ の二つのケースを考慮する。この二つのケースはそれぞれ $\mathcal{H}_2$ と $\mathcal{H}_\infty$ 最適化問題に対応する。

3. 同時最適化問題の解法

制御パラメータと構造パラメータを同時に求めることが難しいため、構造最適化と制御最適化の繰り返し法を用いる。繰り返し法では、構造最適化を行う際に制御パラメータを固定し、制御最適化を行う際に構造パラメータを固定する。

3・1 構造の最適化 コントローラ K_c を固定すれば、構造最適化問題を式(24)–(26)の形式で表わすことができる。最適構造パラメータ r を求めるには、効率のいいSQP法⁽⁵⁾⁽⁶⁾を用いる。SQP法では、評価関数の勾配が必要になるので、ここでは構造パラメータ r の各成分に微小な摂動を与え、数値的に計算する。構造パラメータに摂動が与えられるとき、または繰り返し法で構造パラメータが修正されるとき、構造モデルの再計算を行う。構造最適化の計算量は構造設計パラメータの数だけではなく、構造を離散化する有限要素解析及びモードと固有振動数を求めるモード解析の自由度数にも大きく依存する。複雑な構造に対して、構造モデルの計算量が著しく増えるため、評価関数の勾配を求める際に構造モデルの再計算を必要としない方法を用いれば、計算効率を向上させることができる。

3・2 最適コントローラ 最適コントローラは構造パラメータ r を固定するとき、式(24)の解 K_c である。式(24)は $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 混合制御の問題で、 K_c に関するLMI式が得られる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。LMI式を求めるために、次式を満足するコントローラの設計問題を考える。

$$F(r, K_c) = a\|T_{wy}\|_2 + b\|T_{wz}\|_\infty < \gamma^2 \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 γ は正の実数で、構造パラメータ r は一定である。

上で述べたように、本研究では二つの特殊なケースを考える。 $(a, b) = (1, 0)$ の場合、式(27)を満足する $\mathcal{H}_2$ コントローラ K_c を求めることは次の三つの不等式を満足する K_c を求めることと等価である。

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 K_c)X_2 + X_2(A + B_2 K_c)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (C_1 + D_1 K)X_2 \\ X_2(C_1 + D_1 K)^T & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

$$\text{Trace}(Q) < \gamma^2 \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 Q と X_2 は対称マトリクスである。それで、 $(a, b) = (1, 0)$ の条件で最適コントローラを設計する問題は式(28)–(30)を満足しかつ γ が最小になる K_c を求める問題に変換される。

$(a, b) = (0, 1)$ の場合、式(27)を満足する $\mathcal{H}_\infty$ コントローラ K_c を求めることは次の二つの不等式を満足する K_c を求めることと等価である。

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 K_c)X_\infty + X_\infty(A + B_2 K_c)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \\ (C_2 + D_2 K_c)X_\infty & 0 \\ X_\infty(C_2 + D_2 K_c) & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

$$X_\infty > 0 \quad (32)$$

ここで、 X_∞ は対称マトリクスである。それで、 $(a, b) = (0, 1)$ 条件で最適コントローラを設計する問題は式(31)–(32)を満足しかつ γ が最小になる K_c を求める問題に変換される。式(28)–(30)及び式(31)–(32)はそれぞれ $\mathcal{H}_2$ 最適制御と $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御のLMI表現である。

式(28)–(30)及び式(31)–(32)を解くにはLMIの手法を使う。その計算量は主に状態方程式に依存する。状態方程式に構造の高次モードが省略されているため、複雑な構造に対して、一般的に制御最適化の計算量は構造最適化の計算量より少ない。

3・3 同時最適設計 交互に構造パラメータの最適化と制御パラメータの最適化を繰り返し実行し、構造と制御器の同時最適化の解を求める。ここで、直列と並列の二つの方法を用いて、構造最適化と制御最適化を組み合わせる。

直列法では構造最適化(S.O.)と制御最適化(C.O.)が図2(a)のように実行される。構造最適化ではコントローラ

Fig. 2 Principle of the serial and parallel approaches

ラ K_c が固定され、制御最適化では、構造パラメータ r が固定される。この繰り返し計算はパラメータと目的関数の誤差が与えられた範囲に入るまで続く。構造最適化のときコントローラが固定されるため、構造パラメータが大きく修正されると全体のシステムが不安定になる場合がある。

システムの不安定を避けるために、並列法が導入される。図2(b)に示すように、並列法では構造最適化を主プロセスとして実行し、構造最適化の繰り返し計算のステップ毎に制御パラメータを設計し直す。即ち、構造パラメータを修正されるたびに、そのパラメータに対して新しいコントローラを設計する。コントローラの設計には直列法と同じく、3・2節で述べた方法を用いた。また、効率的にコントローラを設計するために、前のステップで設計した $K_{c,i-1}$ を $K_{c,i}$ 設計の初期値として使う。

4. ばね支持梁モデルと同時最適設計

4・1 ばね支持モデル 本研究では、図3に示すような梁モデルに対して同時最適化設計を行う。梁が定数 k の二つのばねに支持され、両端にはそれぞれ集中質量 m_a がついている。梁の中央に力の外乱 w を受け、中央に関して対称に制御入力としてモーメント u を加える。図3に示されたように梁は同じ長さ l の六つの要素に分割され、外乱、制御入力、ばね支持点及び集中質量がすべて節点にある。ここで、梁は中央に対して対称であると仮定する。外乱と制御入力も対称であるため、梁の振動は対称である。両端の変位は同じであり、これを y_1 で表わし出力として用いる。梁の断面は図3(b)に示され、 t_1, t_2, b 及び h の四つのパラメータで決められる。梁の材料定数及び寸法を表1に示す。断面の高さ h は設計パラメータとして使われ、表に示されたのはその初期値である。図4は梁初期状態の二つの対称振動モードを示す。梁の対称性を考慮すると、断面1, 2, 3の高さ h_1, h_2, h_3 の三つの独立変数がある。構造設計パラメータのベクトル r は次のように表わされる。

$$r = \{r_1, r_2, r_3\} = \{h_1, h_2, h_3\} \dots \dots \dots (33)$$

Fig. 3 Configuration of structure

Table 1 Parameters of the structure

Young's modulus E	200GPa	Width b	50mm
Attached mass m_a	300Kg	Thickness t_1, t_2	5mm
Density ρ	7800Kg/m ³	Length l	200mm
Spring stiffness k	3000N/mm	Initial height h_i	45mm

Fig. 4 Lowest 2 symmetric modes of original structure

4・2 目的関数の設定 コントローラを設計するときは、制御性能だけではなく、制御コスト及びアクチュエータの能力も考慮すべきである。制御コストを考慮するために、式(15)の $\tilde{y}'$ を αu に設定し、出力ベクトルを次式のような定義する。

$$y = \begin{Bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \alpha u \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (34)$$

$$z = y \dots \dots \dots (35)$$

ここで、 y_1 ははり両端の変位、 u は制御入力、 α は正の実数である。式(34)と(35)を式(23)に代入すると、同時最適化の目的関数が得られる。制御性能を重視する場合は α を小さくし、制御のコストを重視する場合は α を大きくする。 α を0に設定すると、コントローラ K_c のゲインが非常に大きくなり、 H_2 目的関数を用いるときは、数値計算上のエラーが起きる場合もある。

4・3 シミュレーションの条件 構造設計では、梁の重量を一定と仮定する。これに対して、等式拘束条件 $\sum_{i=1}^3 r_i = 135\text{mm}$ が得られる。梁断面高さの最小値を5mmに設定すると、不等式拘束条件 $r_i \geq 5\text{mm}$ ($i = 1, 2, 3$) が成り立つ。また、梁中央の静的な最大弾性変形(即ち、ばねを単純支持に置き換える場合の梁の最大変位)を2mm以下に制限すると、もう1つの不等式拘束条件が得られる。

式(34)のパラメータ α を 10^{-9} に設定した。構造最適化のSQP法では各構造パラメータに微小な摂動を与えて

Table 2 Simulation results with $\mathcal{H}_2$ objective function

	Optimization parameters					$\mathcal{H}_2$ Performance		
						$\ T_{xy}\ _2$	$\ T_{xy_1}\ _2$	$\ T_{xy_2}\ _2$
S_0C_0	r	45.000	45.000	45.000		1.05	1.05	0
	K_c	0	0	0	0			
S_1C_0	r	23.782	32.578	78.640		1.02×10^{-2}	1.02×10^{-2}	0
	K_c	0	0	0	0			
S_0C_1	r	45.000	45.000	45.000		4.20×10^{-3}	2.10×10^{-3}	3.63×10^{-3}
	K_c	-1.288×10^9	5.420×10^6	-8.346×10^5	3.926×10^3			
S_TC_T	r	23.782	32.578	78.640		6.85×10^{-3}	4.93×10^{-3}	4.75×10^{-3}
	K_c	-1.286×10^9	2.366×10^6	-2.017×10^6	5.940×10^3			
S_SC_S	r	20.603	75.816	38.581		3.47×10^{-3}	1.75×10^{-3}	3.00×10^{-3}
	K_c	-1.289×10^9	1.270×10^6	-8.489×10^5	9.325×10^3			
S_PC_P	Same with S_SC_S							

Table 3 Simulation results with $\mathcal{H}_\infty$ objective function

	Optimization parameters					$\mathcal{H}_\infty$ Performance		
						$\ T_{xy}\ _\infty$	$\ T_{xy_1}\ _\infty$	$\ T_{xy_2}\ _\infty$
S_0C_0	r	45.000	45.000	45.000		5.94×10^{-1}	5.94×10^{-1}	0
	K_c	0	0	0	0			
S_1C_0	r	37.427	42.835	54.738		3.32×10^{-3}	3.32×10^{-3}	0
	K_c	0	0	0	0			
S_0C_1	r	45.000	45.000	45.000		2.26×10^{-4}	5.23×10^{-5}	2.23×10^{-4}
	K_c	-2.701×10^9	1.230×10^7	-1.669×10^6	8.299×10^3			
S_TC_T	r	37.427	42.835	54.738		7.59×10^{-4}	3.52×10^{-4}	6.73×10^{-4}
	K_c	-2.478×10^9	2.682×10^7	-1.799×10^6	1.719×10^4			
S_SC_S	r	32.778	57.005	45.218		4.01×10^{-4}	9.51×10^{-5}	3.90×10^{-4}
	K_c	-2.552×10^9	2.220×10^7	-1.529×10^6	1.352×10^4			
S_PC_P	r	48.520	45.513	40.967		7.19×10^{-5}	1.09×10^{-5}	7.18×10^{-5}
	K_c	-1.873×10^{14}	-1.058×10^{10}	-6.009×10^{11}	7.348×10^6			

目的関数の勾配を計算する。摂動の相対値を 10^{-6} と 10^{-2} の間に制限した。目的関数とパラメータの相対誤差が収束判定に使われ、両方の収束基準を 10^{-9} に設定した。

5. シミュレーション結果と考察

表 2は $\mathcal{H}_2$ 最適化の結果を示す。ここで、 S_0C_0 、 S_1C_0 、 S_0C_1 、 S_TC_T 、 S_SC_S 及び S_PC_P はそれぞれ初期構造の開ループ、構造最適化を行った開ループ、初期構造の閉ループ、従来の最適設計法、直列法での同時最適設計及び並列法での最適設計を表わす。従来の最適設計法と言うのはまず構造パラメータを最適化して、これらの構造パラメータに対して最適コントローラを設計する。

直列法では、構造最適化と制御最適化の繰り返しを 6 回行った。構造最適化の SQP 法にも繰り返し計算が

行われるため、トータルで 882 組の構造パラメータが計算された。また、システム不安定が起きる場合は、構造最適化の途中でコントローラを設計し直した。トータルで 142 個のコントローラを設計した。並列法では、収束条件を満たすまで、構造設計が 180 回繰り返され、それに対応して 180 個のコントローラが設計された。本問題に対しては、構造解析の自由度数が少ないため、1 回の構造解析にかかる計算時間と 1 回のコントローラ設計にかかる計算時間はほぼ同じであり、全体の計算時間を考慮すると、直列法より並列法の方が効率的である。また、複雑な構造の同時最適化を行う場合、構造解析の自由度数が大幅に増加するが、状態方程式を作る前にシステムの低次元化が行われるため、コントローラ設計にかかる計算時間は大きく変わらない。その場

(a) Magnitude of T_{wy1} (b) Magnitude of T_{wu} Fig. 5 Results of $\mathcal{H}_2$ optimization (a) Magnitude of T_{wy1} (b) Magnitude of T_{wu} Fig. 6 Results of $\mathcal{H}_\infty$ optimization

合は並列法のメリットがより現れる。

表2から構造パラメータを最適化するだけで目的関数を大分小さくできることがわかる。構造パラメータが最適化されると、高さ r_1 と r_2 が小さくなり、高さ r_3 が大きくなる。即ち、梁の中央部は太くなり、両側が細くなる。梁のこの形状では、弾性変形による両端の変位をばねの変形による変位で相殺することができ、総変位が小さくなる。一方、 S_0C_1 の結果は、初期の構造に最適なコントローラを加えるだけで、伝達関数 T_{wy1} の $\mathcal{H}_2$ ノルムをより小さくできることを示す。また、表2から S_0C_1 で得られた目的値は S_{TC_T} で得られた目的値より小さいことがわかる。すなわち、同時最適化を行わないで制御を加える場合は、最適化した構造より最適化する前の構造の方が良い。表に示すように、同時最適化を行うことにより、目的値をさらに小さくすることができる。また、表に使われた有効数字範囲内では、並列法の結果が直列法の結果と同じであった。同時最適化した後、梁の形状が大きく変わった。梁の中央部の断面が小さくなり、制御入力により効率的に働くようになった。

外乱 w は単位仕事率のホワイトノイズの場合、 $\|T_{wy2}\|_2$ は式(34)に定義された出力成分 $y_2 = \alpha u$ の平均仕事率と等しい。それで、 $\|T_{wy2}\|_2$ によって制御コストを評価できる。表2から S_0C_1 の制御コストは S_{TC_T} の制御コストより小さいことがわかる。また、同時最適化した後 (S_5C_5

と S_{PC_P}) の制御コストは S_0C_1 よりさらに小さい。同時最適化することにより、振動の応答だけではなく、制御コストを減らすこともできる。

表3は $\mathcal{H}_\infty$ 最適化の結果を示す。表の中に S_5C_5 の結果は最適値ではなく、構造最適化と制御最適化を6回繰り返して得られた値である。 $\mathcal{H}_\infty$ コントローラが $\mathcal{H}_2$ コントローラよりいいロバスト安定性を持っているため、直列法を使った場合でも構造パラメータの変化によるシステム不安定が起きなかった。ただ、 $\mathcal{H}_2$ 最適化より $\mathcal{H}_\infty$ 最適化の収束が遅くなった。構造最適化と制御最適化を6回繰り返しても、 S_5C_5 の構造パラメータは S_{PC_P} で得られた最適値までまだ遠い。表3の各ケースの目的関数の値及び伝達関数 T_{xy1} と T_{xy2} の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの変化は表2と同じ傾向を示している。

外乱 w から出力変位 y_1 までの伝達関数 T_{xy1} の周波数応答を $\mathcal{H}_2$ 同時最適化の場合と $\mathcal{H}_\infty$ 同時最適化の場合に対して、それぞれ図5(a)と6(a)に示す。低周波領域では S_0C_1 の応答が S_{TC_T} より小さく、同時最適化 S_{PC_P} の応答は他のケースと比べ最も小さい。また、 $\mathcal{H}_\infty$ 同時最適化の応答は $\mathcal{H}_2$ のそれより小さい。

図5(b)と6(b)はそれぞれ $\mathcal{H}_2$ 同時最適化の場合と $\mathcal{H}_\infty$ 同時最適化の場合の外乱 w から制御入力 u までの伝達関数の周波数応答を示す。同時最適化することにより、制御入力の周波数応答曲線は平らになり、その最大値

も小さくなる。

6. 結 論

本研究では、統一された $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ノルムの目的関数を用いて同時最適化問題のモデリングと定式化を行った。それをばね支持梁の振動制御のための同時最適設計に応用し、直列法と並列法の二つの解法を用いて、シミュレーションを行った。シミュレーション結果から次の結論が得られる。

- (1) 構造物を最適化した後に最適のコントローラを加える従来の設計方法はシステムの性能を低下させる場合がある。システムの性能を向上させるためには、構造パラメータとコントローラを同時最適化することが必要である。
- (2) 同時最適化は制御性能の向上だけではなく、制御コストの低減にも有効である。

文 献

- (1) Kajiwar, I., K. Tsujioka, and A. Nagamatsu, Approach for Simultaneous Optimization of a Structure and Control System, *AIAA Journal*, **32**, (1994), pp. 866-873.
- (2) 大日方・他 4 名, 構造系と制御系の同時最適設計法 (レギュレータ問題の場合), 機論, **61**-591, C (1995), 4264-4269.
- (3) 岩壺・他 2 名, 柔軟宇宙構造物の構造系と制御系の同時最適設計法の開発, (評価関数の選択に関する考察), 機論, **60**-580, C (1994), 4042-4048.
- (4) Onoda, J. and R. T. Haftka, An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft, *AIAA Journal*, **25**, (1987), pp. 1133-1138.
- (5) Powell, M. J. D., Variable Metric Methods for Constrained Optimization, *Mathematical Programming: The State of Art*, Springer Verlag, (1983), pp. 288-311.
- (6) Andrew, G., *Optimization Toolbox User's Guide*, (1994), The Math Works, Inc..
- (7) Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM books, (1994), Philadelphia.
- (8) Pascal, G., et al., *LMI Control Toolbox User's Guide*, (1995) The Math Works, Inc..