双線形行列不等式(BMI)に基づく低次元 H_∞ 制御器設計*

(固有ベクトルおよび準ニュートン法からの接近)

井 前 讓^{*1}, 高 本 智 博^{*2}

A Design Method for Fixed-order H_∞ Controllers Based on Bilinear Matrix Inequalities (Eigenvector and Quasi-Newton Method Approach)

Joe IMAE and Tomohiro TAKAMOTO

In this paper, we deal with fixed-order H_∞ controller design, based on bilinear matrix inequalities (BMI). Firstly, we propose a new algorithm for solving LMI/BMI problems, which is theoretically applicable to nonlinear matrix inequality problems. Secondly, we demonstrate by simulation the algorithm to be numerically stable and reliable, as far as LMI/BMI problems are concerned. Lastly, making use of the present algorithm, we obtain the fixed-order H_∞ controller for 2-mass-spring systems, which implies the practicability of BMI based design methods for fixed-order H_∞ controllers.

Key Words: H_∞ Controller, Fixed-order, LMI/BMI Problem, Quasi-Newton Method, Eigenvector

1. 緒 言

線形行列不等式(LMI)を利用した制御系設計・解析が盛んである。特に H_∞ 制御に関しては、種々の設計仕様が LMI に表現可能であること⁽¹⁾, H_∞ 制御器導出に際しての前提条件が比較的少ないこと⁽²⁾, LMI の解法のための効率のよいアルゴリズムが整備されていること⁽³⁾⁽⁴⁾などの理由により活発な研究がなされ、これまでに十分な成果が得られている。中でも、LMI の解法に関しては、数理計画法分野における半正定値計画法の発展と相まって、効率のよい強力なアルゴリズムが制御分野において提案されている。

ところで、 H_∞ 制御の重要な設計問題の一つに、 H_∞ コントローラの低次元化がある。現実には対象システムが一般に高次元であることを考えると、コントローラの低次元化は実用的観点から解決すべき重要な問題である。この低次元化問題に対してはいくつかの研究が行われているが、成果は十分とはいえない。この低次元化問題では H_∞ 制御系設計において通常得られる LMI 条件のほかに、低次元コントローラ導出のため

の条件(階数条件といわれ、第2章の式(7)で与えられる)が加わるためである。しかもその付加条件は LMI の性質を備えておらず、そのためいっそう解決困難となっている。この階数条件の問題点は、LMI を基礎とする限り必ず遭遇する。この問題点を解決するためこれまで種々の方法が提案されている。許容可能領域への射影を交互に繰返す交互射影法⁽⁵⁾, 微分に代わる概念を利用する subgradient 法⁽⁶⁾, ポテンシャル関数のある種の指標とするポテンシャル減少法⁽⁷⁾などである。しかしながら、複雑なアルゴリズムを必要としたり、深い数学的予備知識を必要とするなど、いずれの手法も問題を残している。

本論文では、LMI 表現の代わりに双線形行列不等式(BMI)表現を採用し、これまでとは異なる方法で低次元コントローラ設計を試みる。その際、 H_∞ 制御の低次元化問題において、BMI 表現では階数条件が生じない点に着目している。これはよく知られた事実であるにもかかわらず、BMI 表現による低次元コントローラの具体的設計例はほとんどみられない。その理由として BMI 求解のための効率的アルゴリズムが提案されていないことが考えられる。したがって、本論文では、まず初めに低次元コントローラ設計に必要なアルゴリズムの開発をおこなう。すなわち、LMI/

* 原稿受付 1997 年 3 月 24 日。

*1 正員, 岩手大学工学部(☎ 020-8551 盛岡市上田 4-3-5)。

*2 岩手大学学生。

BMI を特別な場合として含む, より一般的な非線形行列不等式 (NLMI) を対象とし, 効率的かつ簡便なアルゴリズムを提案する. そして次に, この提案アルゴリズムを用いるならば, BMI 表現による低次元コントローラ設計は十分に実現可能であることを, 具体的設計例を通して明らかにする.

2. H_∞ 制御

図 1 に示すような n_p 次の線形時不変プラント $P(s)$, および n_k 次の線形時不変コントローラ $K(s)$ を考える.

これを状態空間表現すると次のようになる.

$$P(s): \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (1)$$

$$K(s): \begin{cases} \dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \\ u = C_k x_k + D_k y \end{cases} \quad (2)$$

ここで $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^k$ はそれぞれプラントの状態変

Fig. 1 Feedback system

数とコントローラの状態変数, $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ は外乱, $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ は制御入力, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ は偏差量, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ は測定出力を表し, $A, B_1, B_2, \dots$ などの行列は適切な大きさの行列とする. 次のようなフィードバック系を構成することを考える.

- (a) 閉ループシステムが安定となる.
- (b) 外乱 w から偏差量 z への伝達関数の H_∞ ノルムが設計仕様 γ よりも小さくなる.

2.1 線形行列不等式 (LMI) 上述の (a), (b) を満たす準最適 H_∞ コントローラが存在するための必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_1 B_1^T & XC_1^T + B_1 D_{11}^T \\ C_1 X + D_{11} B_1^T & D_{11} D_{11}^T - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} YA + A^T Y + C_1^T C_1 & YB_1 + C_1^T D_{11} \\ B_1^T Y + D_{11}^T C_1 & D_{11}^T D_{11} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \quad (4)$$

$$-\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5)$$

で表される LMI を満足する正定対称行列 X, Y が存在することである⁽⁵⁾. この X, Y をもとに, コントローラを作成することができる. コントローラ導出の具体的な方法は文献 (2) に詳しい. これが, LMI に基づく設計手法である. なお, $[\bullet]^\perp$ は次の性質をもつ行列とする. すなわち, $[\bullet]^\perp$ の零空間と $[\bullet]$ の値域とは等しく, かつ, $[\bullet]^\perp [\bullet]^{*T} > 0$.

いま, X, Y を求める方法を考える. $L(X, Y)$ を

$$L(X, Y) = \begin{bmatrix} \text{[式(3)の左辺]} & & & \\ & \text{[式(4)の左辺]} & 0 & \\ & & \text{[式(5)の左辺]} & \\ 0 & & & -X \\ & & & & -Y \end{bmatrix} \quad (6)$$

とおくとき, $L(X, Y) < 0$ を満足する X, Y が求まれば明らかに式 (3)~(5) は満たされる. したがって, $L(X, Y) < 0$ を満足する X, Y を求めれば十分である. ところで, $L(X, Y) < 0$ は $L(X, Y)$ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ が負となる. すなわち $\lambda_{\max}(L(X, Y)) < 0$ と等価である. したがって, $L(X, Y) < 0$ を満足する X, Y を求めるには $\lambda_{\max}(L(X, Y)) < 0$ を満足する X, Y を求めればよいことになる. なお, 低次元コントローラの次元をあらかじめ指定する場合, すなわち $n_p > n_k$ の場合, 式 (3)~(5) のほかに次の階数条件が加わる.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n_p + n_k \quad (7)$$

この階数条件は LMI 表現ではないため, $n_p > n_k$ の場合には解くのは極めて困難となる. これが LMI 設計手法の弱点の一つといわれる.

2・2 双線形行列不等式(BMI) 前述の(a), (b)を満たす準最適 H_∞ コントローラが存在するための必要十分条件は, X_{cl} , Θ に関する BMI 表現を用いると,

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad \cdots \cdots (8)$$

を満足する $\Theta \in \mathbb{R}^{(k+m_2) \times (k+p_2)}$ および正定対称行列 $X_{cl} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ が存在することである⁽²⁾. ここで,

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A_0 + \hat{B}\Theta\hat{C}, \quad B_{cl} = B_0 + \hat{B}\Theta\hat{D}_{21} \\ C_{cl} &= C_0 + \hat{D}_{12}\Theta\hat{C}, \quad D_{cl} = D_{11} + \hat{D}_{12}\Theta\hat{D}_{21} \\ A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = [C_1 \quad 0] \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{D}_{12} &= [0 \quad D_{12}], \quad \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} \\ \Theta &= \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である. この必要十分条件を一つの表現にまとめると次のようになる. すなわち,

$$\begin{aligned} B(X_{cl}, \Theta) &= \begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T & 0 \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T & 0 \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X_{cl} \end{bmatrix} \\ &\cdots \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

とするとき $B(X_{cl}, \Theta) < 0$ を満足する X_{cl} , Θ が存在することと等価になる. これにより, コントローラのパラメータ Θ が直接求まることになる. 階数条件は課せられておらず, LMI 手法と比較して制御系設計が極めて簡便である.

ここで, $B(X_{cl}, \Theta) < 0$ は $\lambda_{\max}(B(X_{cl}, \Theta)) < 0$ と等価であり $\lambda_{\max}(B(X_{cl}, \Theta))$ が負となる X_{cl} , Θ が求まれば $B(X_{cl}, \Theta) < 0$ となるのは LMI のときと同様である. しかし, LMI は線形構造をもつものに対し, $B(X_{cl}, \Theta)$ は非線形な関数である. X_{cl} , Θ の求解には非線形構造を考慮したアルゴリズムが必要である.

3. アルゴリズム

2章の $L(X, Y)$, $B(X_{cl}, \Theta)$ を一般化して, $F(x) \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_1}$ とする. ここに $x \in \mathbb{R}^{q_1}$ は $L(X, Y)$ の場合 X , Y をベクトル化したもの, $B(X_{cl}, \Theta)$ の場合 X_{cl} , Θ をベクトル化したものとする. $F(x) < 0$ を満足する x を求めるアルゴリズムを以下に示す. 本アルゴ

リズムは, よく知られた準ニュートン法を基礎としている. 従来の LMI 解法は難解であるのに対し, 本アルゴリズムは比較的わかりやすい構造をもつ. さらに, 本アルゴリズムは, LMI や BMI 構造だけでなく, 一般的な非線形構造にも適用可能な形をしている点の特徴である. アルゴリズムは以下のとおりである. その際, 次の2点は重要である.

- (1) $F(x) < 0$ となる x が存在するとき, $\lambda_{\max}(F(x))$ の最小値をあたえる x_{opt} は必ず $F(x_{opt}) < 0$ を満足する.

- (2) $F(x)$ の最大固有値に関して,

$$\lambda_{\max}(F(x)) = \max_z \frac{z^T F(x) z}{z^T z} \quad \cdots \cdots (10)$$

である.

したがって, minimax 問題

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{q_1}} \max_{z \in \mathbb{R}^{r_1}} \frac{z^T F(x) z}{z^T z}$$

の最適解 x_{opt} を求めることにより, $F(x) < 0$ の解の一つを得ることができる. ところで, 一般的に minimax 問題の簡単な解法としては, min 操作と max 操作を交互に繰り返す方法が提案されている. この考え方は, 最適解への収束性の理論的保証はないが, 直観的理解が容易であるという利点をもつ. 本アルゴリズムはこの考え方を参考にしており, なお, $\lambda_{\max}(F(x))$ の固有ベクトルを z_{opt} とするとき

$$\max_z \frac{z^T F(x) z}{z^T z} = \frac{z_{opt}^T F(x) z_{opt}}{z_{opt}^T z_{opt}}$$

であることを利用する. 計算効率の点から重要である. アルゴリズムは以下のとおりである.

[アルゴリズム]

- ① x^0 を任意に与え $Q_0 = I$ とする.
- ② $F(x^0)$ に対し最大固有値 $\lambda_{\max}(F(x^0))$ を求める. その際, 同時に $\lambda_{\max}(F(x^0))$ の固有ベクトル $z^0 \in \mathbb{R}^{r_1}$ も求める.
- ③ $y_{prime}(x^0) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{z^{0T} F(x) z^0}{z^{0T} z^0} \right]_{x=x^0}$ を計算する.
- ④ $k=0$ とする.
- ⑤ $h=1$ とする.
- ⑥ $x^{k+1} = x^k - h Q_k^{-1} y_{prime}(x^k)$ を計算する.
- ⑦ $F(x^{k+1})$ に対し最大固有値 $\lambda_{\max}(F(x^{k+1}))$ を求める. その際, 同時に $\lambda_{\max}(F(x^{k+1}))$ の固有ベクトル $z^{k+1} \in \mathbb{R}^{r_1}$ も求める.
- ⑧ もし, $\lambda_{\max}(F(x^k)) < \lambda_{\max}(F(x^{k+1}))$ ならば, $h = 0.6h$ として⑥へ. それ以外は⑨へすすむ.
- ⑨ $y_{prime}(x^{k+1}) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{z^{k+1T} F(x) z^{k+1}}{z^{k+1T} z^{k+1}} \right]_{x=x^{k+1}}$ を計算する. $\lambda_{\max}(F(x^{k+1})) < 0$ ならば終了する.

⑩ $s = x^{k+1} - x^k$, $y_B = y_{\text{prime}(x^{k+1})} - y_{\text{prime}(x^k)}$ とおき, BFGS 公式により

$$Q_{k+1} = Q_k + \frac{y_B y_B^T}{y_B^T s} - \frac{(Q_k s)(Q_k s)^T}{(Q_k s)^T s}$$

を計算する.

⑪ $k = k+1$ として, ⑤へすすむ.

ところで, $F(x)$ が高次元行列の場合, アルゴリズムの②および⑦の固有値計算は数値的に困難となることが予想される. したがって, 実際の計算においては $F(x)$ の構造を利用して次のように計算した. すなわち,

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & & 0 \\ & F_2(x) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & F_m(x) \end{bmatrix}$$

$F_j(x) (j=1 \cdots m)$ は適当な対称行列で与えられるとき, $\lambda_{\max}(F(x))$ は

$$\lambda_{\max}(F(x)) = \max\{\lambda_{\max}(F_1(x)), \lambda_{\max}(F_2(x)), \cdots, \lambda_{\max}(F_m(x))\} \cdots \cdots (11)$$

で与えた. また, 固有ベクトルに関しては次のように求めた. いま, $\lambda_{\max}(F_l(x))$ が式(11)の右辺の最大値を与えるとする. その固有ベクトルを $z_{\text{opt},l}$ とすると, $\lambda_{\max}(F(x))$ の固有ベクトル z_{opt} は $z_{\text{opt}} = [0 \cdots 0, z_{\text{opt},l}^T, 0 \cdots 0]^T$ で与えられる. これは次のように確認できる.

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(F(x)) &= \max_z \frac{z^T F(x) z}{z^T z} = \max_z \frac{\begin{bmatrix} z_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & F_l & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 0 \cdots 0, z_{\text{opt},l}^T, 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & F_l & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_{\text{opt},l} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}{z_{\text{opt},l}^T z_{\text{opt},l}} \\ &= \lambda_{\max}(F_l(x)) \end{aligned}$$

なお, 最大固有値最小化問題の解法において固有ベクトルを利用したものに文献(6)の研究がある. しかし, 最大固有値の subgradient を求めるために固有ベクトルが用いられており, 本アルゴリズムの導出過程とは本質的に異なる.

4. 数 値 計 算

本章では提案アルゴリズムの収束性について検討する. すでに3章で述べたように, 本アルゴリズムの収束性に関し理論的な証明はなされていない. したがって, いくつかの例題計算を通して数値計算上の収束性を検討する.

まずはじめに, LMI 問題を取上げる. LMI 問題に

Fig. 2 Maximum eigenvalues versus iterations (Example 1)

対する効率的な解法は今までに種々提案されているが、それらのほとんどは複雑な計算手法、または特別な数学的道具立てを必要とし、一般に難解である。それに対し、本アルゴリズムはよく知られた準ニュートン法などに基いており、アルゴリズムの構成は比較的簡単である。本アルゴリズムは、LMI 構造を積極的に利用しないため計算効率の点で疑問は残るものの、簡単なアルゴリズムにより LMI 解法は可能であることを示す。

次に、BMI 問題を取上げる。LMI 構造を利用するアルゴリズムでは直接解くことができない。本アルゴリズムは、LMI 構造に依存しないため、BMI 問題にも適用可能であることを示す。なお、本章の目的は、提案アルゴリズムの数値的収束性の検証にあることから $\gamma=10$ とし、すべての例題に対し統一している。また、本手法のプログラミングには Matlab 言語を用いた。なお、アルゴリズムのステップ①においては rand 関数により初期値を与えた。

4.1 LMI 問題 プラント $p(s)$ が次のように与えられるとする⁽⁵⁾。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z = [0 \ 1 \ 0 \ 0]x + [0 \ 0]w + [0]u \\ y = [0 \ 1 \ 0 \ 0]x + [0 \ 1]w + [0]u \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.2066 & 0.8218 & -0.3962 & -1.2838 \\ 0.8218 & 4.3410 & 1.0860 & -0.4446 \\ -0.3962 & 1.0860 & 3.2998 & -1.1527 \\ -1.2838 & -0.4446 & -1.1527 & 3.5497 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2.3193 & -0.3067 & -0.1648 & -0.6221 \\ -0.3067 & 2.7945 & 0.6933 & -0.4688 \\ -0.1648 & 0.6933 & 3.9282 & 1.4872 \\ -0.6221 & -0.4688 & 1.4872 & 2.2275 \end{bmatrix}$$

[例題 2]

第 2 章で可解問題として定式化した BMI 問題について、コントローラのパラメータ Θ が与えられているとき式 (9) は LMI 問題として扱うことができる。このような LMI 問題にも適用可能であることを示す。いま、 Θ が

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} -0.6113 & 0.4507 & 0.2624 \\ -1.3614 & -0.3328 & 0.3165 \\ -0.4880 & -0.8418 & -0.3100 \end{bmatrix}$$

と与えられるときを考える⁽⁵⁾。例題 1 と同様に初期値 X_{cl} を任意に与えた。最大固有値 $\lambda_{\max}(B(X_{cl}, \tilde{\Theta}))$ は 11.562 から -0.0060 へ 63 回で収束した。その結果 X_{cl} は以下のように得られた。繰返し回数に対する最大固有値の変化を図 3 に示す。この場合もアルゴリズムの収束性に関し良好な結果が得られた。

Fig. 3 Maximum eigenvalues versus iterations (Example 2)

[例題 1]

この問題に対して、式 (6) を用い $L(X, Y) < 0$ を満足する X, Y を求める。これにより本手法の LMI に対する有効性を示す。

任意に与えられた初期値 (X, Y) のもと、最大固有値 $\lambda_{\max}(L(X, Y))$ は 11.989 から -0.2174 へ 28 回で収束し、その結果 X, Y が次のように得られた。また、繰返し回数に対する最大固有値の変化を図 2 に示す。アルゴリズムの数値的収束性に関し良好な計算結果が得られた。

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} 1.7356 & -0.8104 & -0.0655 & -0.1309 & -0.6112 & 1.3563 \\ -0.8104 & 1.0566 & 0.1346 & -0.2399 & -1.2644 & -0.7538 \\ -0.0655 & 0.1346 & 1.7573 & 0.0896 & -0.1717 & -1.0703 \\ -0.1309 & -0.2399 & 0.0896 & 1.0038 & 1.5983 & -0.5478 \\ -0.6112 & -1.2644 & -0.1717 & 1.5983 & 5.5824 & -0.4257 \\ 1.3563 & -0.7538 & -1.0703 & -0.5478 & -0.4257 & 2.5760 \end{bmatrix}$$

4・2 BMI問題 プラント $p(s)$ が次のように与えられるとする⁽²⁾.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1]x + [1]w + [0]u \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

この問題に対して式(9)を用い $B(X_{cl}, \Theta) < 0$ を満足する X_{cl}, Θ を求める。これにより本手法の BMI に対する有効性を確認する。

[例題 3]

コントローラの次元が $n_k=2$ の場合を考える。任意に与えられた初期値 (X_{cl}, Θ) のもと、最大固有値 $\lambda_{\max}(B(X_{cl}, \Theta))$ は 1.2386 から -0.2605 へ 16 回で収束し、その結果 X_{cl}, Θ が以下のように得られた。また、図 4 に繰返し回数に対する最大固有値の変化を

Fig. 4 Maximum eigenvalues versus iterations (Example 3)

示す。 $n_k=2$ に関してはプラントと同次元であり、LMI 解法を用いても計算可能である。

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} 1.3498 & -0.8858 & -0.2051 & 0.0340 \\ -0.8858 & 1.4248 & 0.3328 & 0.0438 \\ -0.2051 & 0.3328 & 0.4873 & 0.1987 \\ 0.0340 & 0.0438 & 0.1987 & 0.8875 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} -1.2415 & 0.4738 & 0.0078 \\ -0.0989 & -0.9824 & -0.1744 \\ 0.2183 & -0.2593 & -0.7657 \end{bmatrix}$$

[例題 4]

コントローラの次元が $n_k=1$ の場合を考える。従来の方法で解くことは極めて困難な問題と思われる。文献(2)ではこの種の低次元化問題は扱われていない。本手法を用いることにより解くことが可能であることを示す。任意に与えられた初期値 (X_{cl}, Θ) のもと、最大固有値は 1.1058 から -0.3082 へ 11 回で収

Fig. 6 Maximum eigenvalues versus iterations (Example 5)

Fig. 5 Maximum eigenvalues versus iterations (Example 4)

Fig. 7 2-mass-spring system

Fig. 8 Step response to disturbance (with H_∞ controllers)

Fig. 9 Step response to disturbance (without H_∞ controllers)

束した。その結果 X_{cl} , θ が以下のように得られた。最大固有値の繰返し回数に対する変化を図5に示す。アルゴリズムの収束性に関し良好な結果が得られたといえる。

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} 1.0949 & -0.5338 & -0.0602 \\ -0.5338 & 0.8866 & 0.0653 \\ -0.0602 & 0.0653 & 0.3902 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} -0.5580 & 0.0469 \\ -0.2166 & 0.6780 \end{bmatrix}$$

[例題5]

コントローラの次元が $n_k=0$ の場合を考える。この場合も、また、従来の方で解くことは極めて困難と思われるが、本手法を用いることにより解くことが可能である。任意に与えられた初期値 (X_{cl} , θ) のもと、最大固有値は 0.5662 から $-0.0815 \sim 7$ 回で収束し、その結果 X_{cl} , θ が以下のように得られた。また、繰返し回数に対する最大固有値の変化を図6に示す。

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} 0.4287 & -0.1117 \\ -0.1117 & 0.1617 \end{bmatrix}$$

$$\theta = -0.3799$$

θ はスカラーである。BMI 表現により最も簡単な構造の低次元 H_∞ コントローラが導出されている。

5. BMI による設計例

4章において、本アルゴリズムの数値的収束性については確認された。本章では、本アルゴリズムを実際の設計問題へ適用することにより、BMI による低次元 H_∞ コントローラの設計が実現可能かどうかを検討する。ここでは図7に示される 2-mass-spring システム⁽⁸⁾を考え、実際にコントローラの設計を行う。ここで、

- J_1 : モータの慣性モーメント
- J_2 : 負荷の慣性モーメント
- D_1 : モータ側の粘性抵抗係数

D_2 : 負荷側の粘性抵抗係数

K : バネ定数

T_1 : モータのトルク

T_L : 外乱トルク

ω_1 : モータの角速度

ω_2 : 負荷の角速度

である。このシステムの運動方程式は

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega_1 - \omega_2 \\ J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = -D_1\omega_1 - K\theta + T_1 \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -D_2\omega_2 + K\theta - T_L \end{cases} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。モータに角速度 ω_1 を与えたときの負荷の角速度 ω_2 を測定するものとする。このとき、 T_1 を入力 u , T_L を外乱 w として、システムを状態空間表現すると、式(15)により

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1/J_1 & 0 & -K/J_1 \\ 0 & -D_2/J_2 & K/J_2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \theta \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1/J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_2 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y = z = \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \theta \end{bmatrix} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここで、 $D_1=0.1$, $D_2=1.0$, $K=5$, $J_1=J_2=1$ とすると式(16)は以下になる。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

このシステムについて出力側に回転トルク T_L が外

乱として加わる場合の二次元準最適 H_∞ コントローラを考える。すなわち、外乱の影響ができる限り抑えられる低次元コントローラの設計を目的とする。本章の低次元コントローラの設計では式(9)を用いる。なお、一般化制御対象と同次元コントローラは従来のLMI表現より容易に得られるが、BMI表現に基づいた、このシステムに対する低次元 H_∞ コントローラの設計例はほかにはみあたらない。

設計仕様 γ を徐々に小さくし、結果的に γ は、 $\gamma=10$ から $\gamma=0.34$ へ変化した。これより、 $\gamma \leq 0.34$ なる二次元コントローラの BMI 表現からの導出が可能であることが明らかとなった。 $\gamma=0.34$ での外乱に対するステップ応答を図8に示す。 -1 の大きさの外乱に対し、 -0.34 あたりに外乱の影響が抑えられているようすがわかる。コントローラを付加しない場合の外乱の影響は図9に示す。この場合 -0.91 あたりで変動しており、外乱の影響が大きいことを示している。

ところで、今回の γ の変化は試行錯誤により与えたが、系総的な指針を与える必要がある。この点に関しては今後の課題としたい。

6. 結 言

BMI に基づく低次元 H_∞ コントローラ設計手法について検討を行った。BMI に基づく設計手法の成功は、BMI の効率的解法アルゴリズムが存在するか否かに大きく依存する。したがって、まず初めに、効率

的かつ簡便な BMI 解法アルゴリズムの提案をおこない、さらに、LMI/BMI 問題への適用を通して本アルゴリズムが数値的に安定できることを検証した。次に 2-mass-spring システムの H_∞ 制御問題を設計例とし、本アルゴリズムを利用するならば、BMI に基づく低次元 H_∞ コントローラ設計は十分に実現可能であることを明らかにした。

文 献

- (1) Boyd, S., Ghahni, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V., Inequalities in System and Control Theory, *SIAM Stud. Appl. Math.*, 15 (1994).
- (2) Gahinet, P. and Apkarian, P., A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 4(1994), 421-448.
- (3) Nemirovskii, A. and Gahinet, P., The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities, *Proceedings of ACC94*, (1994), 840-844.
- (4) Vandenberghe, L. and Boyd, S., Primal-dual Potential Reduction Method for Problems Involving Matrix Inequalities, *Math. Programming*, Ser. B, 69(1995), 205-236.
- (5) Grigoriadis, K. M. and Skelton, R. E., Fixed-order Control Design for LMI Control Problems Using Alternating Projection Methods *Proc. the 33rd CDC*, (1994), 2003-2008.
- (6) Gahinet, P. and Ignat, A., Low-order H^∞ Synthesis via LMIs, *Proc. ACC94*, (1994), 1499-1500.
- (7) David, J. and Moor, B. D., Designing Reduced Order Output Feedback Controllers Using a Potential Reduction Method, *Proc. ACC94*, (1994), 845-849.
- (8) 細江繁幸・荒木光彦, 制御系設計, (1994), 9 章, 朝倉書店.