弾性堰を越える流れによって発生する自励的液面揺動に関する研究*
(第1報, 平板堰の場合に関する定式化と不安定発生機構)長 倉 博^{*1}, 金 子 成 彦^{*2}Self-Excited Sloshing Due to the Fluid Discharge over a Flexible Weir
(1st Report, Excitation Mechanism of Instability in the Rectangular Model)

Hiroshi NAGAKURA and Shigehiko KANEKO

This paper presents an analytical model for the fluid-elastic instability as observed in Super-Phenix-1 LMFBFR. This fluid-structure system is constituted by the flexible cylindrical weir and adjoining annular fluid plenums, and the fluid is discharged from the upstream plenum to the downstream plenum over the flexible weir. In this report, to clarify the mechanism for instability, we analyzed the case in which the rectangular reservoir was divided into the upstream and the downstream plenums by a flexible plate weir. The characteristic equation of the system is derived. The effects of the discharged fluid on the downstream plenum sloshing and the effects of the fluid level difference between the upstream and the downstream plenums are examined, and the mechanism for instability is discussed.

Key Words: Self-Excited Vibration, Sloshing, Overflow Weir, Fast Breeder Reactor

1. は じ め に

フランスの高速増殖炉 Super Phenix 1 号炉 (SPX-1) の炉壁冷却系で, 1984 年 10 月に行われた最初の流動試験中に, 構造物と流体が連成した自励振動が発生した. この炉壁冷却系は, 図 1 に示すように上流プレナム内を上昇した低温 Na が, 炉壁内側の円筒堰上端から越流し, 下流プレナムへと流入する構造となっている. Aita ら⁽¹⁾ は, 振動は下流プレナムのスロッシングの固有振動数で発生し, 上流プレナム, 下流プレナムの自由表面とも大きく揺動し, 円筒堰もオーバル振動したと報告しており, この不安定振動をスロッシング連成モードと名付けている. Aita らは SPX-1 実機と 1/4 縮小模型を用いた実験⁽²⁾ および有限要素法に基づく安定性解析⁽³⁾ を行い, ある特定の流量ならびに両プレナム間液位差の領域でのみ不安定が発生することを明らかにした. フランスでは, これらの実験的, 理論的研究の結果に基づいて, 不安定振動を生じない領域に両プレナム間液位差および炉壁冷却流量を設定

することにより, SPX-1 での不安定振動を防止した⁽⁴⁾.

Aita らの解析モデル⁽³⁾ では, 堰を越えて流入する液膜と下流プレナム内流体との間の衝突力の変動が下流プレナムのスロッシングを励起すると考えられているが, 不安定振動の発生機構が物理的に十分説明されていない. また, Fujita ら⁽⁵⁾ が行った SPX-1 の約 1/10 縮尺模型試験の結果と Aita らのモデルに基づく安定性解析結果は定性的に一致しないとの報告もある⁽⁶⁾.

本研究では, SPX-1 で発生したスロッシング連成モードの自励振動を対象として, 新たな解析モデルを提案し, 不安定発生機構について考察する. SPX-1

Fig. 1 Geometry of the cooling circuit of SPX-1

* 原稿受付 1997 年 7 月 18 日.

^{*1} 正員, 三菱重工業(株) (☎ 851-0301 長崎市深堀町 5-717-1).^{*2} 正員, 東京大学 (☎ 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1).

Fig. 2 Schematic diagram of the system

Fig. 3 Schematic view of the upstream plenum

の炉壁冷却系は複雑な多重円筒構造であるが、基本的な構成要素は上流プレナム、下流プレナムおよび越流弾性堰の三つである。本報では、まず図2に示すような弾性平板堰で仕切られた矩形容器からなる構造を対象とする。

2. おもな記号

- a : 堰に沿って落下する液膜の厚さ m
- b : 平板堰の幅 m
- D : 平板堰の曲げ剛性 Nm
- g : 重力加速度 m/s^2
- h : 堰の板厚 m
- H : 下流プレナムの液深 m
- H_u : 上流プレナムの越流水深 m
- L : 堰の高さ m
- l_d : 下流プレナムの長さ m
- l_u : 上流プレナムの長さ m
- P : 圧力 N/m^2
- q_f : 単位幅当たりの越流量の変動成分 m^2/s
- t : 時間 s
- V_f : 液膜の下流プレナムへの流入流速 m/s
- w : 堰のたわみ m
- η_d : 下流プレナムのスロッシングの波高 m
- η_u : 上流プレナムの液面変位 m
- ρ_f : 液体の密度 kg/m^3
- ρ_s : 堰の密度 kg/m^3
- τ : 液膜が落下に要する時間 s

3. 流体-堰連成系の特性方程式

3.1 堰の運動方程式 上流プレナム、下流プレナムから流体圧力 P_u , P_d を受ける弾性平板堰の運動方程式は、 x 方向負の向きのたわみを正にとると次式のように表される。

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right)$$

$$= P_d - P_u \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、堰のたわみを y 方向および z 方向の1次の固有モードで次のように展開する。

$$w(y, z, t) = \sin \frac{\pi y}{b} \phi(z) C(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $\phi(z)$ は片持ちはりの1次の固有モードで次式のように表される。

$$\phi(z) = \cosh \frac{\lambda z}{L} - \cos \frac{\lambda z}{L} - \sigma \left(\sinh \frac{\lambda z}{L} - \sin \frac{\lambda z}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\lambda = 1.8751, \quad \sigma = \frac{\cosh \lambda + \cos \lambda}{\sinh \lambda + \sin \lambda} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(2)を式(1)に代入し、両辺に固有モードを掛けて堰板の全面積にわたって積分すると次のようになる。

$$\frac{d^2 C}{dt^2} + \omega_n^2 C(t) = \frac{1}{\rho_s h} \frac{2}{bL} \int_0^b \int_0^L \{ P_d(y, z, t) - P_u(y, z, t) \} \sin \frac{\pi y}{b} \phi(z) dz dy \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 ω_n は真空中での堰板の固有角振動数で、次式のように表される。

$$\omega_n^2 = \frac{D}{\rho_s h L^4} \left\{ \lambda^4 + \pi^4 \frac{L^4}{b^4} - 2\pi^2 \sigma \lambda (2 - \sigma \lambda) \frac{L^2}{b^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、圧力分布が y 方向には $\sin(\pi y/b)$ のようなモードで表されると仮定すると、式(5)は次式のようになる。

$$\frac{d^2 C}{dt^2} + \omega_n^2 C(t) = \frac{1}{\rho_s h s} \frac{1}{L} \int_0^L \{ p_d(z, t) - p_u(z, t) \} \phi(z) dz \quad \dots\dots\dots (7)$$

3.2 上流プレナムのモデル化 上流プレナムは十分狭く、プレナム内の流れおよび液面変位は x 方向にほぼ一様であるとする。また、 y 方向の流れは無視して $x-z$ 面内の二次元で定式化を行う。

図3に示す上流プレナムの流体の連続の式と z 方

向運動量保存の式は, x, z 方向の流速を V_x, V_z としてそれぞれ次式で表される.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V_x V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(V_z^2) = -g - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また, 堰板表面での運動学的条件は次のように表される.

$$V_x|_{x=-w} = -\frac{\partial w}{\partial t} - V_z|_{x=-w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (10)$$

たわみ w が z, t の関数であることに注意して式(8)および式(9)を x に関して $-l_u$ から $-w$ まで積分し, 式(10)を考慮すると次のようになる.

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q_z^2}{l_u - w} \right) = -(l_u - w) \left(g - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし, Q_z は y 方向単位長さ当たりの z 方向体積流量で, 次のように定義される.

$$Q_z(z, t) = \int_{-l_u}^{-w} V_z dx \quad \dots\dots\dots (13)$$

上流プレナム下端は y 方向単位長さ当たり流量 Q_0 の定流量供給源に接続されていると仮定すると, 境界条件は次式となる.

$$Q_z(0, t) = Q_0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

一方上流プレナムの $z=L$ での圧力は, $z>L$ の部分に存在する盛り上がった流体による静水圧に等しいとすると, 境界条件は次式となる.

$$P(L, t) = \rho_f g H_u(t) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで, 堰の運動に伴って圧力, 流量, 越流水深が定常値の周りで次のように微小変動するものとする.

$$P(z, t) = \bar{P}(z) + p(z, t)$$

$$Q_z(z, t) = Q_0 + q_z(z, t) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$H_u(t) = \bar{H}_u + \eta_u(t)$$

ただし, 式(16)の右辺第1項は定常値, 第2項は微小変動を表す. 式(16)を式(11), (12)に代入し, 微小量に関する2次以上の項を無視して線形化すると次のようになる.

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial t} + \frac{2Q_0}{l_u} \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{Q_0^2}{l_u^2} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{l_u}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (18)$$

境界条件式(14), (15)も同様に微小量に関して線形化すると次のようになる.

$$q_z(0, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$p(L, t) = \rho_f g \eta_u(t) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで, 堰のたわみを次式のように z 方向固有モードで展開する.

$$w(z, t) = \phi(z) C(t) \quad \dots\dots\dots (21)$$

また, 式の表記を簡単にするために次のような無次元の関数を定義する.

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(z) &= \frac{1}{L} \int_0^z \phi(z') dz' \\ \psi_2(z) &= \frac{1}{L} \int_0^z \psi_1(z') dz' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(21)を式(17)に代入し, 零から z まで積分すると次のようになる.

$$q_z(z, t) = \psi_1(z) L \frac{dC}{dt} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また, 式(18)を零から z まで積分し, 式(21)を代入し, 式(19), (23)を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned} p(z, t) &= p(0, t) - \frac{\rho_f}{l_u} \int_0^z \left\{ \frac{\partial q_z(z', t)}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2Q_0}{l_u} \frac{\partial q_z(z', t)}{\partial z'} + \frac{Q_0^2}{l_u^2} \frac{\partial w(z', t)}{\partial z'} \right\} dz' \\ &= p(0, t) - \frac{\rho_f L^2}{l_u} \left\{ \psi_2(z) \frac{d^2 C}{dt^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2Q_0}{l_u L} \psi_1(z) \frac{dC}{dt} + \frac{Q_0^2}{l_u^2 L^2} \phi(z) C(t) \right\} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

式(24)に $z=L$ を代入し, 境界条件式(20)を考慮すると $z=0$ での圧力変動は次のようになる.

$$\begin{aligned} p(0, t) &= \rho_f g \eta_u(t) + \frac{\rho_f L^2}{l_u} \left\{ \psi_2(L) \frac{d^2 C}{dt^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2Q_0}{l_u L} \psi_1(L) \frac{dC}{dt} + \frac{Q_0^2}{l_u^2 L^2} \phi(L) C(t) \right\} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ただし, 対象とする系の通常の流量範囲では Q_0 は十分小さく, スロッシング連成モードの角振動数を ω とすると,

$$\frac{Q_0}{l_u L \omega} \ll 1 \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる. したがって, 式(25)右辺の{ }内の第2, 3項は第1項に比べて十分小さい, すなわち堰の運動に伴う圧力変動に及ぼす定常流量の影響は十分小さいと見なすことができ, 式(25)は近似的に次のように書くことができる.

$$p(0, t) = \rho_f g \eta_u(t) + \frac{\rho_f L^2}{l_u} \psi_2(L) \frac{d^2 C}{dt^2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

同様に式(24)右辺の{ }内の第2, 3項は第1項に比べて十分小さいのでこれらを省略し, さらに式(27)を代入すると, 上流プレナム内の圧力変動は次式となる.

$$p(z, t) = \frac{\rho_f L^2}{l_u} \{ \psi_2(L) - \psi_2(z) \} \frac{d^2 C}{dt^2} + \rho_f g \eta_u(t) \quad \dots\dots\dots (28)$$

次に, 図4の示す上流プレナム盛り上がり部分の y

Fig. 4 Conservation of the volumetric flow rate in the upstream plenum

方向単位幅当たりの流体の出入りから堰のたわみ、上流プレナム液面変位、越流量変動の関係を求める。越流量が

$$Q_f(t) = Q_0 + q_f(t) \quad (29)$$

のように定常成分と微小な変動成分の和で表されるとすれば、 y 方向単位幅当たりの上流プレナム盛り上がり部分の体積保存の式は次式となる。

$$q_z(L, t) = l_v \frac{d\eta_v}{dt} + q_f(t) \quad (30)$$

一方、式(17)、(19)より $Q_z(L, t)$ は次のように表される。

$$q_z(L, t) = \int_0^L \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} dz \quad (31)$$

式(30)、(31)から $q_z(L, t)$ を消去すると、堰のたわみ、上流プレナム液面変位、越流量変動の関係は次のようになる。

$$\int_0^L \frac{\partial w(z, L)}{\partial t} dz = l_v \frac{d\eta_v}{dt} + q_f(t) \quad (32)$$

ここで、上流プレナムの越流水深と越流量が次のような関係にあると仮定する。

$$Q_f(t) = C_d H_v^{\gamma}(t) \quad (33)$$

ただし、 C_d は流量係数である。式(16)、(29)を式(33)に代入し、微小量に関する2次以上の項を無視すると、上流プレナムの液面変位と越流量変動の関係は次のように表すことができる。

$$q_f(t) = \frac{l_v \eta_v(t)}{T} \quad (34)$$

ただし、 T は次式で表される時定数である。

$$T = \frac{l_v}{\gamma C_d^{\frac{1}{\gamma}} Q_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (35)$$

式(34)を式(32)に代入すると、上流プレナム液面変位と堰のたわみは次のような一次遅れの関係となる。

$$T \frac{d\eta_v}{dt} + \eta_v(t) = \frac{T}{l_v} \int_0^L \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} dz \quad (36)$$

3.3 下流プレナムのモデル化 下流プレナムの速度ポテンシャルを Φ とおけば、下流プレナム内流

体の連続の式と圧力方程式はそれぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P(x, z, t)}{\rho_f} + g(z - H) = 0 \quad (38)$$

また、剛な壁での運動学的境界条件は次式で表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=l_D} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (39)$$

越流量の変動に伴い、下流プレナムへの流入流速 V_f が次のように定常値の周りで微小変動すると仮定する。

$$V_f(t) = \bar{V}_f + v_f(t) \quad (40)$$

ここで、下流プレナムに流入する液膜の厚さ a は時間によらず一定とすれば、越流量変動と流入流速変動の間には次の関係が成り立つ。

$$q_f(t - \tau) = a v_f(t) \quad (41)$$

ただし、 τ は流体が堰の上端を越流してから下流プレナム自由表面に到達するまでに要する時間である。このとき越流流体の流入量変動の影響を考慮した下流プレナム自由表面での運動学的境界条件は次式で表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=H+\eta} = \begin{cases} -v_f(t), & 0 \leq x \leq a \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}, & a < x \leq l_D \end{cases} \quad (42)$$

また、堰板表面での運動学的境界条件は次式で表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=-w} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (43)$$

堰に沿って落下してきた液膜の動圧に比例した圧力が自由表面の $0 \leq x \leq a$ の部分に作用すると仮定し、その比例係数を ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) とすると、自由表面の圧力 $P_{fs}(x, t)$ は次のように表される。

$$P_{fs}(x, t) = \begin{cases} \frac{\xi}{2} \rho_f V_f^2, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & a < x \leq l_D \end{cases} \quad (44)$$

式(40)を式(44)に代入し、微小変動成分に関して線形化すると自由表面での圧力の変動成分 p_{fs} は次のようになる。

$$p_{fs}(x, t) = \begin{cases} \xi \rho_f \bar{V}_f v_f(t), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & a < x \leq l_D \end{cases} \quad (45)$$

したがって、変動成分に関する自由表面での力学的条件は次のように表される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=H+\eta} + \frac{p_{fs}(x, t)}{\rho_f} + g\eta(x, t) = 0 \quad (46)$$

ここで、下流プレナムの速度ポテンシャルを、自由表面からの流入量変動はなく堰が振動するときの速度

ポテンシャル Φ_s と、流入量変動はあるが堰は動かないときの速度ポテンシャル Φ_p の重ね合せて表す。そして、堰の運動に付随する流体の運動を表す速度ポテンシャル Φ_s に対する運動学的境界条件、力学的境界条件をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \Big|_{x=-w} &= -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} \Big|_{x=l_D} = 0 \\ \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} \Big|_{z=H+\eta_s} = \frac{\partial \eta_s}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \Big|_{z=H+\eta_s} + g\eta_s(x, t) = 0 \dots (48)$$

とし、流入量変動があるときの自由表面のスロッシングを表す速度ポテンシャル Φ_p に対する運動学的境界条件、力学的境界条件をそれぞれ

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \Big|_{x=l_D} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \dots (49)$$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \Big|_{z=H+\eta_D} = \begin{cases} -v_f(t), & 0 \leq x \leq a \\ \frac{\partial \eta_D}{\partial t}, & a < x \leq l_D \end{cases} \dots (50)$$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial t} \Big|_{z=H+\eta_D} + \frac{p_{fs}(x, t)}{\rho_f} + g\eta_D(x, t) = 0 \dots (51)$$

とするならば、 Φ_p と Φ_s を重ね合せた速度ポテンシャルは下流プレナムのすべての境界での運動学的境界条件、力学的境界条件を十分条件的に満足することになる。

速度ポテンシャル Φ_s は、式(37)を境界条件式(47)、(48)のもとで解くことにより、次式のように表される。

$$\Phi_s = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cosh k_j(l_D - x)}{k_j \tanh(k_j l_D)} \cdot \frac{\int_0^H \psi \cos k_j z dz}{\int_0^H \cos^2 k_j z dz} \times \cos k_j z \right\} \frac{dC}{dt} \dots (52)$$

ただし、波数 k_j は次式とする。

$$k_j H = \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi \dots (53)$$

このとき、堰の振動により堰表面に発生する付加流体圧力変動 $p_s(z, t)$ は次式のように表される⁽¹⁹⁾。

$$p_s(z, t) = \rho_f g \eta_s(t) - \rho_f L \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos k_j z}{k_j L \tanh(k_j l_D)} \times \frac{\int_0^H \psi \cos k_j z dz}{\int_0^H \cos^2 k_j z dz} \right\} \frac{d^2 C}{dt^2} \dots (54)$$

ただし、

$$\eta_s(t) = -\frac{1}{l_0} \int_0^H w(z, t) dz \dots (55)$$

3・4 下流プレナムのスロッシングの運動方程式
速度ポテンシャル Φ_p が連続の式と剛な壁での運動学

的条件を満足する次式のようなポテンシャルで表されると仮定する。

$$\Phi_p = \phi_0(t) \cos k_0 x \cosh k_0 z \dots (56)$$

ただし、波数 k_0 は剛な壁での境界条件式(49)から次式のように定められる。

$$k_0 = \frac{\pi}{l_D} \dots (57)$$

さらに下流プレナムの波高も速度ポテンシャルと同じく x 方向の固有モードで次式のように展開できるものと仮定する。

$$\eta_D(x, t) = \bar{\eta}_D(t) \cos k_0 x \dots (58)$$

自由表面での運動学的条件式(50)、力学的条件式(51)の両辺に $\cos k_0 x$ を掛けて零から l_D まで積分すると次のようになる。

$$\phi_0(t) k_0 \sinh(k_0 H) = \frac{d\bar{\eta}_D}{dt} - \frac{2a}{l_D} v_f(t) \dots (59)$$

$$\frac{d\phi_0}{dt} \cosh(k_0 H) + \frac{2a}{l_D} \bar{V}_f v_f(t) + g\bar{\eta}_D(t) = 0 \dots (60)$$

式(59)、(60)から $\phi_0(t)$ を消去すると、次のような $\bar{\eta}_D$ に関する運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\eta}_D}{dt^2} + \omega_s^2 \bar{\eta}_D(t) \\ = \frac{2}{l_D} \left\{ \frac{dq_f(t-\tau)}{dt} - \bar{V}_f \frac{\omega_s^2}{g} q_f(t-\tau) \right\} \dots (61) \end{aligned}$$

ただし、 ω_s は堰が剛で流入がないときの下流プレナムのスロッシングの固有角振動数であり、次式のように定義される。

$$\omega_s = \sqrt{gk_0 \tanh(k_0 H)} \dots (62)$$

下流プレナムのスロッシングの運動方程式(61)において、右辺第1項は自由表面での運動学的条件に由来する項で、流入量変動による下流プレナム内流体の表面付近の局所的な体積変化の効果を表す。一方、右辺第2項は自由表面での力学的条件から導かれる項で、落下液膜と下流プレナム自由表面との衝突力変動の効果を表す。

ここで、流体粘性による減衰項を式(61)左辺に付加し、さらに上流プレナム液面変位と越流量の関係式(34)を用いて式(61)右辺を η_U を用いて表記すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\eta}_D}{dt^2} + 2\zeta_s \omega_s \frac{d\bar{\eta}_D}{dt} + \omega_s^2 \bar{\eta}_D(t) \\ = \frac{2l_U}{l_D} \frac{1}{T} \left\{ \frac{d\eta_U(t-\tau)}{dt} - \bar{V}_f \frac{\omega_s^2}{g} \eta_U(t-\tau) \right\} \dots (63) \end{aligned}$$

ただし、 ζ_s はスロッシングの減衰比である。また、スロッシングによって堰表面に発生する圧力変動 $p_p(z, t)$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 p_D(z, t) &= -\rho_f \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \Big|_{x=0} = -\rho_f \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \cosh k_0 z \\
 &= \rho_f \left\{ g \bar{\eta}_D(t) + \frac{2}{l_D} \xi \bar{V}_f q_f(t-\tau) \right\} \frac{\cosh k_0 z}{\cosh(k_0 H)} \\
 &= \rho_f g \left\{ \bar{\eta}_D(t) + \frac{2l_v}{l_D} \frac{1}{\omega_s T} \frac{\xi \bar{V}_f \omega_s}{g} \eta_v(t-\tau) \right\} \\
 &\quad \times \frac{\cosh k_0 z}{\cosh(k_0 H)} \dots\dots\dots (64)
 \end{aligned}$$

3・5 系の特性方程式 式(28), (54), (64)より, 堰の運動方程式(7)右辺の付加流体圧力 p_U および p_D は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 p_U(z, t) &= \frac{\rho_f L^2}{l_U} \{ \Psi_2(L) - \Psi_2(z) \} \frac{d^2 C}{dt^2} \\
 &\quad + \rho_f g \eta_v(t) \dots\dots\dots (65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_D(z, t) &= -\rho_f \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos k_j z}{k_j \tanh(k_j l_D)} \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{\frac{1}{L} \int_0^H \phi \cos k_j z dz}{\frac{1}{L} \int_0^H \cos^2 k_j z dz} \right\} \\
 &\quad \times \frac{d^2 C}{dt^2} - \rho_f g \frac{L}{l_D} \Psi_1(H) C(t) \\
 &\quad + \rho_f g \left\{ \bar{\eta}_D(t) + \frac{2l_v}{l_D} \frac{1}{\omega_s T} \frac{\xi \bar{V}_f \omega_s}{g} \eta_v(t-\tau) \right\} \\
 &\quad \times \frac{\cosh k_0 z}{\cosh(k_0 H)} \dots\dots\dots (66)
 \end{aligned}$$

式(65), (66)を式(7)に代入すると, 堰の運動方程式は次のように書き直される.

$$\begin{aligned}
 (1 + m_{av}^* + m_{ad}^*) \frac{d^2 C}{dt^2} + (\omega_n^2 + \omega_s^2 k_{ad}^*) C(t) \\
 = \frac{\rho_f g}{\rho_s h} \left\{ K_1 \bar{\eta}_D(t) - K_2 \eta_v(t) \right. \\
 \left. + K_1 \frac{2l_v}{l_D} \frac{1}{\omega_s T} \frac{\xi \bar{V}_f \omega_s}{g} \eta_v(t-\tau) \right\} \dots\dots\dots (67)
 \end{aligned}$$

ここで, 次のような置き換えを行った.

$$m_{av}^* = \frac{\rho_f L^2}{\rho_s h l_U} \cdot \frac{1}{L} \int_0^L \{ \Psi_2(L) - \Psi_2(z) \} \phi(z) dz \dots\dots\dots (68)$$

$$\begin{aligned}
 m_{ad}^* &= \frac{\rho_f L}{\rho_s h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{1}{L} \int_0^H \phi \cos k_j z dz \right\}^2}{k_j L \tanh(k_j l_D) \frac{1}{L} \int_0^H \cos^2 k_j z dz} \\
 &\dots\dots\dots (69)
 \end{aligned}$$

$$k_{ad}^* = \frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} \cdot \frac{L}{l_D} \{ \Psi_1(H) \}^2 \dots\dots\dots (70)$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{L} \int_0^H \frac{\phi \cosh k_0 z}{\cosh(k_0 H)} dz, \quad K_2 = \frac{1}{L} \int_0^L \phi dz \\
 &\dots\dots\dots (71)
 \end{aligned}$$

以上を整理すると, 流体力の影響を考慮した堰の運動方程式(67), 流入量変動の影響を考慮した下流プレナムのスロッシングの運動方程式(63)および堰のたわみと上流プレナム液面変位の関係式(36)の3式が流体

一堰連成系の支配方程式である. ここで, 下流プレナムのスロッシングの固有角振動数を用いて時間を $t^* = \omega_s t$ のように無次元化すると上記の3式は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 m^* \frac{d^2 C}{dt^{*2}} + k^* C(t^*) &= \frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} \left\{ K_1 \bar{\eta}_D(t^*) \right. \\
 &\quad \left. - K_2 \eta_v(t^*) + K_1 \frac{2l_v}{l_D} \frac{\xi \bar{V}_f^*}{T^*} \eta_v(t^* - \tau^*) \right\} \\
 &\dots\dots\dots (72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \bar{\eta}_D}{dt^{*2}} + 2\zeta_s \frac{d\bar{\eta}_D}{dt^*} + \bar{\eta}_D(t^*) \\
 = \frac{2l_v}{l_D} \frac{1}{T^*} \left\{ \frac{d\eta_v(t^* - \tau^*)}{dt^*} - \xi \bar{V}_f^* \eta_v(t^* - \tau^*) \right\} \\
 \dots\dots\dots (73)
 \end{aligned}$$

$$T^* \frac{d\eta_v}{dt^*} + \eta_v(t^*) = K_3 T^* \frac{dC}{dt^*} \dots\dots\dots (74)$$

ただし, 次のような置き換えを行った.

$$m^* = 1 + m_{av}^* + m_{ad}^*, \quad k^* = \frac{\omega_n^2}{\omega_s^2} + k_{ad}^* \dots\dots (75)$$

$$\tau^* = \omega_s \tau, \quad T^* = \omega_s T, \quad \bar{V}_f^* = \frac{\bar{V}_f \omega_s}{g} \dots\dots (76)$$

$$K_3 = \frac{\Psi_1(L)L}{l_U} \dots\dots\dots (77)$$

式(72)~(74)をラプラス変換すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
 (m^* s^2 + k^*) C(s) &= \frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} \left\{ K_1 \eta_D(s) \right. \\
 &\quad \left. - \left(K_2 - K_1 \frac{2l_v}{l_D} \frac{\xi \bar{V}_f^*}{T^*} e^{-\tau^* s} \right) \eta_v(s) \right\} \dots\dots (78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (s^2 + 2\zeta_s s + 1) \eta_D(s) \\
 = \frac{2l_v}{l_D} \frac{(s - \xi \bar{V}_f^*) e^{-\tau^* s}}{T^*} \eta_v(s) \dots\dots\dots (79)
 \end{aligned}$$

$$(T^* s + 1) \eta_v(s) = K_3 T^* s C(s) \dots\dots\dots (80)$$

ただし, s は無次元時間 t^* に関するラプラス変換のオペレータであり, $C(s)$, $\eta_v(s)$, $\eta_D(s)$ はそれぞれ $C(t^*)$, $\eta_v(t^*)$, $\bar{\eta}_D(t^*)$ のラプラス変換を表す. 式(78)~(80)を変形すると系の特性方程式は次のようなむだ時間要素を含む五次式で表される.

$$\begin{aligned}
 p_0 s^5 + p_1 s^4 + (p_2 + q_2 e^{-\tau^* s}) s^3 + (p_3 + q_3 e^{-\tau^* s}) s^2 \\
 + p_4 s + p_5 = 0 \dots\dots\dots (81)
 \end{aligned}$$

ただし, 特性方程式の係数は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 p_0 &= m^* T^* \\
 p_1 &= m^* + m^* T^* \cdot 2\zeta_s \\
 p_2 &= m^* T^* + k^* T^* + m^* \cdot 2\zeta_s + \frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} K_2 K_3 T^* \\
 p_3 &= m^* + k^* + k^* T^* \cdot 2\zeta_s + \frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} K_2 K_3 T^* \cdot 2\zeta_s \\
 p_4 &= k^* T^* + k^* \cdot 2\zeta_s + \frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} K_2 K_3 T^* \dots\dots (82) \\
 p_5 &= k^*
 \end{aligned}$$

$$q_2 = -\frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} \frac{2l_U}{l_D} K_1 K_3 \cdot \xi V_f^*$$

$$q_3 = -\frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} \frac{2l_U}{l_D} K_1 K_3$$

$$-\frac{\rho_f g}{\rho_s h \omega_s^2} \frac{2l_U}{l_D} K_1 K_3 \cdot \xi V_f^* \cdot 2\zeta_s$$

4. 矩形構造の流体-堰連成系の安定性

本章では、3章で導いた流体-堰連成系の特性方程式を数値的に解いて、上流プレナムと下流プレナムの液位差、自由表面の圧力上昇係数などのパラメータが系の安定性に及ぼす影響を検討し、スロッシング連成モードの自励振動発生機構について考察する。

4.1 計算条件 系の寸法が小さいと液膜の落下に要する時間がスロッシングの固有周期に比べて相対的に小さくなり、液位差(むだ時間)が系の安定性に及ぼす影響を把握しにくい。そこで、表1に示すように堰の高さがSPX-1と同程度の寸法の系を仮定して、無次元液位差 $\Delta H/L$ が0~0.5の範囲で計算を行う。平板堰の材質はステンレス、流体は常温の水を仮定した。

表1の計算条件の下では、下流プレナム液位 H が堰の高さ L に等しいときの下流プレナムのスロッシングの1次の固有振動数は0.40 Hzである。本条件の下では下流プレナム液深変化が固有振動数に及ぼす影響は小さい($\Delta H/L=0.5$ で固有振動数の低下は約0.2%)。一方、平板堰の真空中での固有振動数は1.2 Hzである。

単位幅当たりの越流量は $Q_f = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。この値は、SPX-1実機試験時の最大越流量の約1/10程度である。このとき、落下流速が重力と壁面せん断力が釣り合う最大流速に達するのに要する距離は堰の高さ L に対して比較的小さく、液位差とむだ時間はほぼ比例関係にある。落下時間、落下高さおよび落下速度の関係は、堰に沿って落下する液膜の運動方程式

式を数値積分して求めた。落下液膜の運動方程式導出過程に関しては第3報を参照。

下流プレナムのスロッシングの減衰比は $\zeta_s = 0.001$ と仮定して計算を行う。また、堰の振動速度に対する上流プレナム液面変位および越流量変動の一次遅れの時定数は $T^* = 0.1$ とした。これは、堰の運動によって上流プレナム内から堰上端より上に押し出された流体の大部分は、ほとんど位相遅れなしにそのまま下流プレナムに向かって流れ落ち、上流プレナム盛り上がり部分の液位の変化は小さいと仮定することに相当する。

4.2 根軌跡 図5は無次元液位差 $\Delta H/L$ を零から0.5まで変化させたときの根軌跡である。ただし、自由表面の圧力上昇係数 $\xi = 0.1$ と仮定した。

図5の横軸と縦軸はそれぞれ特性根の実数部と虚数部であり、実数部が正のときに系は不安定である。また、虚数部は下流プレナムのスロッシングの固有角振動数で無次元化された角振動数を表す。系の特性方程式が五次式なので特性根は5実根、3実根と1共役複素根、1実根と2共役複素根のいずれかとなるが、この計算条件の下では1実根と2共役複素根が得られ、実根は常に安定な根であったので、2組の共役複素根のうち虚数部が正の2根のみを図示した。

Fig. 5 Root locus

Fig. 6 The effect of the pressure rise coefficient on the stability of the system

Table 1 Physical and geometrical data of the fluid-structure system

Height of plate weir	L	10 m
Width of plate weir	b	10 m
Thickness of plate weir	h	50 mm
Density of plate weir	ρ_s	$7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Elasticity of plate weir	E	$2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Length of upstream plenum	ℓ_U	0.5 m
Length of downstream plenum	ℓ_D	5.0 m

2 根のうち虚数部の値がほぼ 1 の根がスロッシング連成モードに対応する。もう一方の根は流体中での堰のたわみ振動モードに対応し、その虚数部は付加質量を考慮した流体中での堰の無次元固有角振動数を表す。図 5 からわかるように堰のたわみ振動モードは安定であり、スロッシング連成モードがある液位差の範囲で不安定となっている。

4.3 自由表面の圧力上昇係数の影響 図 6 は、流体同士の衝突力の影響を表す自由表面の圧力上昇係数 ξ が零と 1 の 2 とおりの場合について、液位差とスロッシング連成モードの特性根の実数部の関係を計算した結果である。

従来、スロッシングの励振源は、越流流体が下流プレナム自由表面に衝突する際に発生する力の変動であると考えられていたが、図 6 から明らかなように本解析モデルでは流入量変動の力学的効果は小さく、従って、流入量変動の運動学的効果が支配的ということになる。これは、式で示すならば下流プレナム自由表面の運動方程式 (61) の右辺第 2 項ではなく右辺第 1 項の効果が支配的ということであり、物理的には、流入量の変動成分が正であれば局所的な体積保存の関係から堰付近の自由表面が上昇すると解釈できる。従って、下流プレナムの堰付近の自由表面が上昇中に下流プレナムへの流入量が増加するような位相関係にあるとき系は不安定であり、その逆の位相関係にあるとき系は安定である。

4.4 スロッシング連成モードの不安定発生機構

4.2 節で示したように、本計算条件では流体中での堰の固有振動数は下流プレナムのスロッシングの固有振動数よりも高いので、下流プレナムの堰付近の自由表面が上昇すると堰は上流プレナム側に動き、上流プレナムの堰上端より上の部分に押し出される流量は増加する。押し出された流体の一部は、堰の速度に対して $0 \sim 90^\circ$ の間のある位相だけ遅れて越流する。液位差が小さいときには落下によるむだ時間は小さいので、下流プレナムのスロッシングにより自由表面が上昇中に流入量が増加し、結果として液位はさらに上昇するので不安定が発生する。液位差がある程度以上になると、落下によるむだ時間のために下流プレナム自由表面が上昇中に流入量が減少するような位相関係になり、系は安定になる。

5. 結 論

本論文では、フランスの高速増殖炉 SPX-1 の炉壁冷却系で発生した流体一構造連成自励振動に関して新たな解析モデルを提案し、スロッシング連成モードの

自励振動発生機構について検討を行った。その結果、以下のことが明らかになった。

(1) スロッシングの励振機構 自由表面から流入する流入量が増加すると、局所的な体積保存の関係から流入部では液位が上昇する。したがって、下流プレナムのスロッシングによって自由表面が上昇中に、越流による流入量が増加するような位相関係にあるとき、流入量の増加によって液位はさらに上昇し、自励的なスロッシングが発生する。越流流体が下流プレナムに流入する際に、流体同士の衝突によって越流流体が自由表面に及ぼす力の効果は小さい。

(2) 流体一堰連成系の不安定振動発生機構 流体中での堰の固有振動数が下流プレナムのスロッシングの固有振動数より高い場合には、下流プレナム液位が上昇すると変動圧によって堰は上流プレナム側に動くので、上流プレナム内流体は押し出され、堰上端からの越流量は増加する。したがって、液位差が小さく落下によるむだ時間が小さい領域において、下流プレナムのスロッシングによって液位が上昇中に流入量が増加するような位相関係となり、系の不安定が発生する。

文 献

- (1) Aita, S., Gibert, R. J., Verriere, P., Bertaut, C., Lacroix, C. and D'onghia, E., *4th European Nuclear Conf.*, (1986), Geneva, Switzerland.
- (2) Aita, S., Tigeot, Y., Bertaut, C. and Serpantie, J. P., *Proc. Flow-Induced Vib.*, ASME PVP-Vol. 104, (1986), 41-50.
- (3) Aita, S. and Gibert, R. J., *Proc. Flow-Induced Vib.*, ASME PVP-Vol. 104, (1986), 51-58.
- (4) 田中伸和, 日本原子力学会誌, **28**-1, (1986), 54-57.
- (5) Fujita, K., Ito, T., Kodama, T., Adachi, S., Sekine, K., Ozaki, H., Eguchi, Y. and Yamamoto, K., *Proc. Flow-Induced Vib. Fluid-Structure Int.*, ASME PVP-Vol. 258, (1993), 143-150.
- (6) 山本一彦, 原子力分野における流体関連振動研究会 (V) 報告書, UTNL-R-0328, (1995), 147-155.
- (7) Eguchi, Y. and Tanaka, N., *Proc. Flow-Induced Vib.*, ASME PVP-Vol. 154, (1989), 43-50.
- (8) 久野勝美・金子成彦, 機論, **55**-511, C(1989), 541-548.
- (9) 福家賢・原文雄, 機論, **55**-517, C(1989), 2282-2289.
- (10) 久野勝美・金子成彦, 機論, **56**-525, C(1990), 1094-1100.
- (11) 金子成彦・渡辺辰郎・中野龍児, 機械力学講演論文集 Vol. B, (1991), 163-167.
- (12) 鈴木徹・原文雄, 機械力学講演論文集 Vol. B, (1991), 168-175.
- (13) Eguchi, Y., Tanaka, N., Ito, T. and Fujita, K., *Trans. 11th SMiRT*, Vol. E, (1991), 359-364.
- (14) 中野龍児・長倉博・金子成彦, 機械力学・計測制御講演論文集 Vol. B, (1992), 801-806.
- (15) 長倉博・金子成彦, 機械力学・計測制御講演論文集 Vol. A, (1993), 393-397.
- (16) 藤田勝久・伊藤智博・児玉徹彦・廣田和生, 機械力学・計測制御講演論文集 Vol. A, (1993), 398-403.

- (17) 長倉博・金子成彦, 機械力学・計測制御講演論文集 Vol. B, (1994), 557-560. 議, 機械力学・計測制御講演論文集 Vol. B, (1994), 561-564.
- (18) 廣田和生・神崎寛・足立茂・田中伸和・山本一彦・江口 (19) 長倉博, 東京大学学位論文, (1996), 36-39.
-