周波数領域 Wavelet 変換/逆変換と再構成 Data 量の低減*

前 田 大^{*1}, 藤 田 式 曜^{*2}
北 川 孟^{*3}, 堀 畑 聡^{*4}Fast Wavelet Transform/Inverse Transform and Data Reduction
for Signal ReconstructionMasaru MAEDA, Noriaki FUJITA,
Hajime KITAGAWA and Satoshi HORIHATA

Wavelet transform, WT, is a representative method of time-frequency analysis of a non-stationary signal. The original time series is obtained from the two-dimensional distribution by applying an inverse wavelet transform, IWT. However, fast Fourier transform, FFT, algorithm can not be applied to fast WT/IWT calculations because the base function of a WT is nonsinusoidal, while the algorithm can be used for fast computation of a short-time Fourier transform, STFT. For fast computation of a WT/IWT, a particular algorithm has been used in a time-domain calculation. In this study, a new fast WT/IWT algorithm, which is applied in the frequency domain, is proposed. Since the amount of data needed to represent a time-frequency two-dimensional distribution is very large, a data-reduction technique is required to enable fast computation of an IWT. An algorithm which can be used for redundancy elimination of WT data is introduced into the fast IWT analysis. Calculation times of this new fast WT/IWT algorithm are compared with those of traditional ones, for the analysis of both simulated signals and measured voices. From the comparisons, it is clear that the new method markedly speeds up the computation.

Key Words: Non-Stationary Signal, Time-Frequency Distribution, Wavelet Transform, Inverse Wavelet Transform, Data Reduction

1. 緒 言

周波数が時間とともに変化する信号(非定常信号)は, 時間-周波数二次元解析(t - f 解析)を行わねばならないが, その方法としては, Wigner 分布, 短時間 Fourier 変換や Wavelet 変換等がある。これらの内, Wavelet 変換は信号の不連続性や自己相似性の解析に適しており, 音響信号処理等の分野での重要な解析法である。しかしながら Wavelet 変換は他の方法とは基底関数の性質が異なるため, 高速解析を行うには特殊なアルゴリズムを開発する必要がある。すなわち短時間 Fourier 変換では信号 $f(t)$ と窓関数の積と, Wigner 分布では非定常信号にまで拡張した自己相関関数とみなされる $f(t+\tau)f^*(t-\tau)$ と複素指数関数との乗算, を行うので両者とも高速 Fourier 変換(FFT)を用いて容易に高速化が可能である。一方, Wavelet 変換の計算では, Analyzing Wavelet と呼ばれる時間的, 周波数的に局在した関数の相似変形と平行移動に

より得られる関数を基底関数としており FFT を利用することはできない。

Wavelet 変換についてもいくつかの高速化アルゴリズムが提案されている。例えば FIR フィルタバンクによる方法⁽¹⁾, a trous アルゴリズム⁽²⁾等でもよく知られているが, これらはいずれも時間領域での高速化演算である。また, 周波数領域を含めた高速化アルゴリズムについての考察も行われているが⁽³⁾, これらは一般的な理論の展開にとどまり具体的な解析法についてはいっさい触れられていない。本研究では周波数領域での性質を利用した周波数領域高速 Wavelet (FD-FWT) 変換を提案し, 従来の時間領域高速化アルゴリズムと解析結果, 解析時間および計算量を比較して評価を行った。

本高速化アルゴリズムを用い, そのまま時間領域への逆変換することも可能であるが, t - f 二次元領域で表現されたデータ量は原信号に比べると膨大なので効率的な再構成データ量の低減を試みた。本研究では特に再構成データの冗長度に注目し, これを可能な限り除去して解析した。さらに音声信号の逆変換では, この操作に加えて, 再構成データから聴覚的に不要な不可聴成分を除去することにより効果的なデータ量の低減を行った。

* 1996 年 4 月 2 日 第 73 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 1996 年 11 月 19 日。

*¹ 豊橋技術科学大学大学院 [現: 武蔵精密(株)]。

*² 豊橋技術科学大学大学院 (〒441-8580 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1)。

*³ 正員, 豊橋技術科学大学。

*⁴ 豊橋技術科学大学。

2. 本方法の原理

2.1 Wavelet 変換/逆変換(WT/IWT) WT は式(1)で定義される。

$$WT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{a,b}^*(t) f(t) dt \quad (1)$$

ここで $g(t)$ は時間および周波数の領域において局在する性質をもつ基底関数であり, Analyzing Wavelet(AW)と呼ばれる。 $g_{a,b}(t)$ は式(2)で定義され, スケールパラメータ a により拡大/縮小し, シフトパラメータ b により平行移動して得られる関数群である。 g^* は g の複素共役を表す。

$$g_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

$g(t)$ が式(3)(アドミッシブル条件)を満足すれば IWT が式(4)で定義される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 0 \quad (3)$$

$$IWT(t) = \frac{1}{C_g} \iint \frac{1}{a^2} WT(a, b) g_{a,b}(t) da db \quad (4)$$

ここで C_g は, AW によって定まる正規化のための条件である。

2.2 離散 WT/IWT (DWT/IDWT) デジタル信号処理を行う場合, 時間 t およびパラメータ a, b を離散化した次式が用いられる。すなわち離散時間 nT_0 , 離散化パラメータ a, b をそれぞれ $a_k = a_0^k, b_l = lT_0$ とすれば

$$g_{k,l}(n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^k}} g\left(\frac{n-l}{a_0^k}\right) \quad (5)$$

となる [ここでは簡単のために時間(シフト)間隔 $T_0 = 1$ としている。また a_0 は任意の定数, k, l, n は整数である]。

これより式(1), (4)の離散化を $DWT(k, l)$, $IDWT(n)$ とすると式(6), (7)が得られる。

$$DWT(k, l) = \sum_n g_{k,l}^*(n) f(n) \quad (6)$$

$$IDWT(n) = D_g \sum_k \sum_l DWT(k, l) g_{k,l}(n) \quad (7)$$

ここで D_g は正規化のための定数であり,

$$D_g = T_0 \log a_0 / C_g \quad (8)$$

で表される⁽⁴⁾。

2.3 従来の高速化アルゴリズム DWT の時間領域における高速化アルゴリズムとして代表的な FIR フィルタバンク法と a trous アルゴリズムの原理を簡単に述べる。

2.3.1 FIR フィルタバンク法 フィルタのインパルス応答を $h(i)$ とすると FIR フィルタの出力 $y(i)$ は式(9)によって定義される。

$$y(n) = \sum_i h(i) f(n-i) \quad (9)$$

いまフィルタの出力を AW を近似して $h(i) = g^*(-i)$ とすると式(9)は

$$y(n) = \sum_i g^*(-i) f(n-i) \quad (10)$$

となる。これはスケール $a_k = 1$ の $DWT(0, 1)$ に等しい。このときのフィルタの次数を M としてすべてのスケールの出力を表すと

$$DWT(k, l) = \sum_{i=0}^{a_k M - 1} g_k^*(-i) f(l-i) \quad (11)$$

ここで $g_k^*(-i)$ は, k オクターブの AW である。さらに M としてスケール $a_k = 1$ での AW の時間的広がり幅を含むような値を設定すれば式(6)での零の畳み込みが省略できて計算量が低減される。

この方法が k 段の FIR フィルタによって構成される場合, FIR フィルタバンクによる高速 WT と呼ばれる⁽¹⁾。

2.3.2 a trous アルゴリズム FIR フィルタバンクによる方法では, スケール a_k が大きくなる(すなわち周波数が低くなる)に従って AW 時間的局在性が悪くなり, 次数の大きなフィルタが必要となる。これを解決するために, 基本スケール a_0 を 2 として, 大きなスケールの AW を小さなスケールの AW で近似する高速化アルゴリズムが提案されている。これは a trous アルゴリズムと呼ばれている⁽²⁾。

k オクターブ $a_k = 2^k$ の AW を 1 オクターブの AW で表現するために, a_m を次式で表す。

$$a_m = 2^p 2^k \quad (p=0 \sim 1, k=0, 1, \dots) \quad (12)$$

ここで p は 1 オクターブ内の AW 群を表現するパラメータであり, 式(11)を用い 1 オクターブの AW で式(10)を表すと

$$\begin{aligned} DWT(m, l) &= \frac{1}{\sqrt{2^k}} \sum_{i=0}^{2^p M - 1} g_p^*(-i) f(l - 2^k i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_m/2^p}} \sum_{i=0}^{2^p M - 1} g_p^*(-i) f\left(l - \frac{a_m}{2^p} i\right) \quad (13) \end{aligned}$$

これを用いると, 1 オクターブの AW 群により全オクターブの DWT 出力が得られる。FIR フィルタバンク法ではオクターブ数の巾乗で計算量が増大するが, a trous アルゴリズムを用いるとオクターブ数によらず計算量は一定となる。しかしながら入力信号を間引いて畳み込みを行うので周波数の折り返しひずみを除去するためにオクターブごとにローパスフィルタを操作する必要がある。

2.4 周波数領域高速 WT/IWT (FD-FWT/FIWT) 入力信号 $f(t)$, AW $g(t)$ および $DWT(k, l)$ の Fourier 変換をそれぞれ $F(f)$, $G(f)$ および $DWT(k, f)$ とすると, 式(6)の両辺の Fourier 変換

は

$$DWT(k, f) = G_k^*(f)F(f) \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここで $G_k^*(f)$ は、周波数領域における k オクターブの AW である。すなわち時間領域の畳み込み演算は、周波数領域での積演算となる。これの逆 Fourier 変換から $DWT(k, l)$ が得られる。

離散変換の場合の解析例を示す。例えば入力信号のデータ長を L (ただし L は 2 の巾乗とする)、スケールパラメータ分割数を N_a とすると、時間領域での乗算回数 ξ_t は式 (15)、周波数領域での乗算回数 ξ_f は式 (16) のようになる。ただし式 (16) での乗算回数には Fourier 変換/逆変換の乗算回数 $2L\log_2 L$ を含めている。

$$\xi_t = N_a \cdot L^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned} \xi_f &= N_a(L + 2L\log_2 L) \\ &= N_a \cdot L(1 + 2\log_2 L) \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$L \geq 8$ であれば $\xi_f < \xi_t$ となり、 $DWT(k, f)$ の計算量が低減されることがわかる。さらに式 (12) を適用して式 (14) を式 (17) のように変形すると a trous アルゴリズムと同様に 1 オクターブの AW 群によりすべてのオクターブの DWT 出力を得ることができる。

$$DWT(m, f) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} G_p(2^k f) F(f) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここでこれを周波数領域高速 WT (FD-FWT) と呼ぶこととする。

FIR フィルタバンク法ではスケールが大きくなると計算量が増加し、a trous アルゴリズムではスケールによらず計算量が一定であるが、周波数領域高速化法ではスケールが大きくなるに従って AW の局在性

が良くなるため結果的に計算量は減少する。この方法では従来の時間領域高速化法のように AW の分布の幅をあらかじめ評価する必要がなく、容易に AW の変更を行うことができ、また時間領域での形状が未知な AW の適用も可能である。

3. 各高速化アルゴリズムの比較

3.1 本研究で用いた AW 本研究では、次式で表される Gabor (Gaussian) 関数を AW として用いた。

$$g(t) = \pi^{-1/4} \left(\frac{\omega_p}{\gamma} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{(\omega_p t / \gamma)^2}{2} + j\omega_p t \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで ω_p は中心周波数、 γ は周波数領域での分布の幅(局在性の程度)を決めるパラメータである。

この関数が厳密には式 (3) のアドミッシブル条件を満たさないが、 γ の値として例えば

$$\gamma = \pi \left(\frac{2}{\ln 2} \right)^{1/2} \cong 5.336 \quad \dots\dots\dots (19)$$

とすると実用上アドミッシブル条件を満足することが明らかにされている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

本研究での演算では、中心周波数 ω_p を、サンプリング周波数 ω_s と等しくした。

3.2 各アルゴリズムによる時間-周波数解析結果

DWT, a trous アルゴリズム高速 WT および FD-FWT の三つの方法による時間-周波数解析結果を比較した。今回は、a trous アルゴリズムと原理的に同じで計算量が多いことがすでに知られている⁽⁶⁾、FIR フィルタバンク法は用いなかった。

解析条件を、表 1 に示す。

入力信号として、インパルスおよびチャープ信号を用いた。チャープ信号は、0 秒から 0.512 秒の範囲では掃引速度が 0.512 Hz/s で 0.512 秒から 1.024 秒の範囲では掃引速度が -0.512 Hz/s の信号と 0 秒から

Table 1 Analysis condition

Sampling Time	1[msec]
Data Size	1024
Frequency Range (in Octave)	8
Scale Division	64
Shift Division	1024

(a) Time domain waveform

(b) Frequency domain waveform

Fig. 1 Original signal (impulse)

(a) Time domain waveform

(b) Frequency domain waveform

Fig. 2 Original signal (chirp)

1.024 秒の範囲で掃引速度が 1.012 Hz/s の信号の合成信号である。

図 1 と図 2 に入力信号の時間波形と周波数スペクトルを示す。

図 3 はインパルス信号の時間-周波数解析結果であり、横軸に時間、縦軸にスケール(周波数のオクターブ表示)、高さ方向に振幅をとり鳥かん図で表している。図 3 からわかるように、三つの方法から得られた結果は定量的には若干の違いはあるが定性的にはほとんど一致している。チャープ信号についても、同様の解析結果が得られた。

3・3 原信号への再構成結果 同様の解析条件によって IDWT, a trous アルゴリズム高速 IWT および FD-FIWT により原信号への再構成演算を行った。これらを図 4, 5 に示す。

この場合も両図の三つの方法から得られた結果はほとんど一致している。図 4 のインパルス信号の再構成において、FD-FIWT により得られた結果は他の二つから得られたものより周波数スペクトルの立上り部分がより入力信号に近い。これは周波数領域における

FFT 演算の導入が好結果をもたらしたものと考えられる。

3・4 解析時間, 計算量の比較 FD-FWT/FIWT による解析結果は, DWT/IDWT および従来の高速化アルゴリズムの代表的な方法である a trous アルゴリズム高速 WT/IWT のそれらと極めてよく一致することが明らかになった。そこで演算の高速性を比較するために解析時間, 計算量を解析した。解析時間はワークステーションの CPU 使用時間から, 計算量は全解析処理における複素乗算回数から, 評価した。解析時間, 計算量ともに, DWT での値を 100 とした比で表した。

図 6 に WT/IWT 演算の解析時間比を, 図 7 にそれの計算量の比を示す。

いずれの図からも, FD-FWT/FIWT が高速性の点で最も優れていることがわかる。しかし提案された方法での解析時間と計算量の低減率を比較すると, 計算量に比べて解析時間のそれは若干悪い(a trous アルゴリズムの解析結果においても同様の傾向が見られる)。これは解析時間に占める計算以外の部分(データ入出に要する時間等)の割合が大きいものと考えられる。

Fig. 3 Time-frequency 2-dimensional distribution (impulse)

Fig. 4 Reconstructed signal (impulse)

したがってこれらの部分の低減によりいっそうの高速化が可能と考えられ、以下さらに検討を加えた。

4. 再構成データ量の低減

4.1 時間-周波数領域での冗長成分除去

4.1.1 スケールパラメータの最適分割 非直交基底を AW とした場合、オーバコンプリートな基底関数を用いることにより原信号の再構成が行われる⁽⁴⁾。本研究での AW は Gabor 関数であり、これは非直交 AW である。今までの著者らの解析では原信号の再構成結果の忠実度を重視し、1 オクターブでの

スケールパラメータ分割数を十分大きい値(8)としている。解析範囲が8 オクターブなので全スケールパラメータ分割数 N_a は 64 となる。

そこで忠実度が失われない最小限の分割数を評価するために、一様な周波数特性をもつ信号(インパルス信号)の再構成周波数特性を解析した。 N_a を 16 から 64 まで変えたときの解析結果を図 8 に示す。図 8 から、 $N_a=32$ 未満では一様な周波数特性が得られないことがわかる(なお図 8 では振幅の大きさは正規化していない)。そこで忠実度が失われない最小限の分割数を 32 とし、これをスケールパラメータの最適分割数とした。

4.1.2 シフトパラメータの分割 入力情報を完全に含んだまま信号を時間-周波数領域に拡張するためには、最小スケールでのシフトパラメータのサンプリング数を入力信号のそれと等しくする必要がある。一方、再構成データ量は入力信号とスケール分割数との積であるので、例えば $N_a=32$ の場合入力信号の 32 倍という膨大な値となる。

そこで、Multi Rate Sampling (MRS)法を適用して再構成データ量の低減を試みた。MRS とは、スケールが 2 倍になるごとにサンプリングレートを 2 倍にする方法である。AW ではスケールが 2 倍になるとその中心周波数および周波数の分布幅は 1/2 になる。すなわちスケールが 2 倍になると解析する最高周波数は 1/2 となるのでサンプリングレートを 2 倍にするこ

(a) IDWT

(b) Fast IWT by a trous algorithm

(c) FD-FIWT

Fig. 5 Reconstructed signal (chirp)

Fig. 6 Comparison of calculation time among three methods

Fig. 7 Comparison of calculation quantity among three methods

Fig. 8 Relationship between frequency distribution and N_a

とができる。MRS では、最小スケールでの WT 出力データ点の数を L とすると、スケールが 2 倍になると出力データ点の数は $L/2, L/4, L/8, \dots$ と減少する。

4・1・3 再構成データ量低減の効果 FD-FWT/FIWT の方法に MRS を適用し、図 1 の入力信号の時間-周波数解析およびその再構成演算を行い、従来の方法で得られた結果(図 3 および図 4)と比較した。図 9 は、 $L=1024$ として各スケールごとのデータ点での信号の振幅の分布を示したものである。スケールが大きくなるに従って周波数分解能が低下するので、振幅の分布が広がりそのピーク値が低くなる。この傾向は図 3 (a)と一致している。図 10 は再構成結果であり、図 4 (c)と同一の結果が得られている。解析時間、計算量および再構成データ量について、MRS 適用の効果を解析した結果を図 11 に示す(再構成データ量

は、MRS を適用しなかった場合を 100 とした比で表している)。この結果、MRS を適用しない周波数領域高速化法より再構成データ量は 1/4 程度に低減し、解析時間と計算量はさらに改良させることができた。

4・2 音声信号における不可聴成分除去の効果

4・2・1 最小可聴限特性とその WT への適用 聴覚では、周波数に依存するある音圧レベル以下の音は聞き取ることができない。これは最小可聴特性といわれ、ISO/R 226 などの国際規格では、正常な聴覚での基準値として $20 \mu\text{Pa}$ を 0 dB にとっている。最小可聴限特性の周波数軸を、離散 WT のスケールサンプリング値と一致するようにオクターブで表すと図 12 のようになる。

本研究では、最小可聴限特性を考慮して再構成データから不可聴成分も除去し、いっそうの高速化を試み

Fig. 9 Time-frequency analysis applying MRS method (impulse)

Fig. 10 Reconstructed signal (impulse)

Fig. 11 Comparisons of calculation time, calculation quantity and reconstructed data between MRS and conventional methods

Fig. 12 Threshold of audibility denoted by octave scale

Fig. 13 An example of block-size matrix of sift b and scale a, classified by threshold of audibility

Fig. 14 Comparisons of calculation time, calculation quantity and reconstructed data between MRS and un audible component rejection

た。

すなわち MRS を適用した FD-FWT の各スケールの出力をブロック化し(例えば 16 点ごとを 1 ブロックとする), ブロック(16 点)ごとに最大値を検出する。各スケールに対応する周波数の最小可聴限値とこの最大値を比較し, 最小可聴限値以上であれば 1, 以下であれば 0 でこのブロックを表す。これから図 13 のようなマップが得られ, 値が 1 の部分のみを再構成対象データとする。IWT の場合は, 値が 0 の部分のデータをすべて 0 で補間して再構成を行う。

4・2・2 音声信号の再構成 解析時間, 計算量および再構成データ量について, 本方法の効果と MRS のみを適用した場合と比較した結果を図 14 に示す。不可聴成分の除去により再構成データ量が大幅に減少し, 計算量は増加したものの解析時間はいっそう短縮したことがわかる。

不可聴成分除去によるデータ削減効果を調べるために, 男性話者 A, B の 2 名による“赤/aka/”, “黄色/kiiro/”の 2 種類の音声解析した。図 15, 16 に

Fig. 15 Voice “aka” of male (A)

“赤/aka/”の解析結果を示す。各音声の再構成データ量を図 17 に示す。

再構成信号と入力音声信号には若干の違いがみられるが, 再構成信号を聴覚で判断する限り差異は感じられなかった(講演会での発表では, 再構成音声信号も音として紹介した)。また音声により再構成データ量に差がみられるが, これは音の大きさや長さの違いと考えられる。

5. 結 言

本研究から以下の結論が得られた。

Fig. 16 Voice “aka” of male (B)

Fig. 17 Reconstructed data of each voice

(1) FD-FWT/FIWT 法は従来の時間領域高速化 WT/IWT 法より解析時間と計算量の短縮の面で優れていることがわかった。

(2) FD-FWT/FIWT の計算において、時間-周波数領域での冗長度を除去することにより、再構成データ量を 1/4 に減少させることができ、解析時間も短縮された。

(3) 音声信号を対象にした場合、その不可聴成分を除去することにより再構成データ量をさらに大幅に低減させることができ、解析時間も短縮されることを、本研究では定量的に評価した。本研究では、0 dB の基準値として 20 μ Pa をそのまま用いたが、最適基準音圧の決定や音声信号解析に適した AW の選択等の検討を進めるならば、再構成データ量のいっそうの低

減が可能となる。一方、不可聴成分除去後の再構成信号の適切な評価方法の確立の問題は残されており、統計的手法適用等の導入の必要性もある。

文 献

- (1) 例えば, Kikuchi, H., ほか 4 名, Fast wavelet transform and its application to detecting detonation, *IEIC Trans., on Fundamentals*, E 75-A, 8 (1992), 980-987.
- (2) Holschneider, M., ほか 3 名, *Wavelets, Time-frequency Methods and Phase Space*, (1989), 286, Springer.
- (3) Rioul, O. and Duhamel, P., Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms, *IEEE Trans. Information Theory*, 38 (1992), 569-586.
- (4) 例えば, 佐藤雅昭, 日本音響学会誌, 47-6 (1991), 416-423.
- (5) 杵築兼史・ほか 4 名, 機論, 59-567, C (1993), 3464-3468.
- (6) 川上高史・ほか 3 名, 機械学会第 72 期通常総会講演会講演論文集 (I), (1993-3), 515-516.