圧縮の軸荷重を受ける補剛支点付き棒の軸荷重推定* (拘束幅のある補剛支点の場合)

片岡真澄^{*1}, 植草昌彦^{*1}
河本芳弘^{*2}, 大野進一^{*3}

Estimating a Compressed Axial Load on a Straight Rod with a Stiffness Support (Stiffness Support with the Contact Area)

Masumi KATAOKA, Masahiko UEKUSA,
Yoshihiro KAWAMOTO and Shinichi OHNO

The present study proposes a method of estimating a compressed axial load on a clamped-clamped rod which has a stiffness support with the contact area. The stiffness support was assumed to consist of an infinite number of springs and it replaced with the Winkler-type spring for the purpose of this analysis. When estimating the axial load on the rod from the frequency equation, the unknown spring constant of the Winkler-type spring should also be obtained. In addition to the current experimental system, we created a new experimental system by attaching a mass to a point on the rod. Using the first natural frequency obtained by experimentation on these two systems, we calculated the axial load and the spring constant. As for the axial load which was estimated by using the proposed method, it found that the error was less than 10% compared with the actually acting axial load.

Key Words: Theory of Vibration, Bending Vibration, Axial Force, Natural Frequency, Support, Winkler-Type Spring, Additional Mass

1. 緒 言

構造部材の固有振動数や部材に作用している軸荷重を知ることは構造物の安全対策上重要である。

構造部材として使用頻度の高い棒は、静的な圧縮の軸荷重を受けていることが多く、棒は補強などのために棒の途中に支点を設ける場合がある⁽¹⁾⁽²⁾。この支点の支持状態は単純支点のように棒と一点で接触し、支持しているのではなく、棒の一部を拘束するように接触している区間、すなわち拘束幅をもっているのが一般的である。しかし、このような支点をもつ棒の固有振動数や軸荷重を扱った報告例はないようである。

そこで、本研究は、圧縮の軸荷重を受けている両端固定棒が、棒の途中に拘束幅のある補剛支点を設けている系について、実測した固有振動数より軸荷重の概略値を推定しようとするものである。

解析では、拘束幅のある補剛支点をウィンクラー型ばねで置き換え、これによる拘束部分と無拘束部分と

で運動方程式をたて、境界条件を満足させることから振動数方程式を導出するという一般的な方法を用いた。

ここで、実験より求めた固有振動数を用いて振動数方程式から軸荷重を推定する場合、ウィンクラー型ばねのばね定数も未知であるから同時に同定する必要がある。そこで本報では、この系自身と、この系の棒の一点に既知の質量を取り付けた新たな系を考え、この二つの系の実験より求めた一次固有振動数を利用して、これらの値を同定する方法を提案した。そして、本方法が軸荷重を推定するための手法として十分有効であることを示した。

2. 振動数方程式の導出

図1は解析モデルで、圧縮の軸荷重 P が作用する長さ L の両端固定棒が、 L_0 の位置を中心として L_2 の拘束幅をもつ補剛支点で支持されている状態を示したものである。

ところで、実際の場合補剛支点と棒は拘束幅全域で接触しているとは言えないが、ここでは便宜上、全域で接触しているものと仮定し、補剛支点を x 方向分布も考慮した弾性ばね、すなわちウィンクラー型ばねで置き換えている⁽³⁾。

また、棒は十分に細長く、解析は低次の曲げ振動を

* 1997年3月6日 中国四国支部第35期総会において講演、原稿受付 1997年8月7日。

^{*1} 正員、千葉工業大学(☎ 275-0016 習志野市津田沼 2-17-1)。

^{*2} 准員、千葉工業大学大学院。

^{*3} 正員、東京都立科学技術大学(☎ 191-0065 日野市旭が丘 6-6)。

Fig. 1 Model for analysis

扱うものとし、棒自身のせん断変形、回転慣性および縦振動の影響は省略する⁽⁴⁾。

以下に用いる記号を示す。

ω : 固有角振動数

P : 軸荷重

E : 縦弾性係数

g : 重力加速度

ρ : 密度

A : 棒の断面積

I : 断面二次モーメント

k : ウィンクラー型ばねのばね定数(すなわち x 方向単位長さ当たりのばね定数)

t : 時間

L : 棒の全長

L_0 : 固定端 O_1 から拘束部中心までの距離

L_1 : 固定端 O_1 から拘束部下端 O_2 までの距離

L_2 : 拘束幅

L_3 : 固定端 O_3 から拘束部上端までの距離

棒の固定端 O_1 から拘束部下端 ($0 \leq x \leq L_1$) におけるたわみを y_1 , 拘束部 ($L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$) におけるたわみを y_2 , 拘束部上端から固定端 O_3 ($L_1 + L_2 \leq x \leq L$) におけるたわみを y_3 とおき, $P \gg \rho AgL$ を考慮することから, 各区間における棒の運動方程式は,

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq L_1: EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= 0 \\ L_1 \leq x \leq L_1 + L_2: EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + ky_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$L_1 + L_2 \leq x \leq L: EI \frac{\partial^4 y_3}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

次に各運動方程式を接合するための境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} x = L_1: y_1 &= y_2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} \\ x = L_1 + L_2: y_2 &= y_3, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{\partial y_3}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 y_3}{\partial x^3} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

また両端固定の条件から

$$x = 0: y_1 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$x = L: y_3 = 0, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(1), (2)の解を $y_i(x, t) = X_i(x) \cdot \sin \omega t$ ($i=1, 2, 3$) とし, 式(1)~(5)を無次元量 $\eta_i(\xi) = X_i(x)/L$ ($i=1, 2, 3$), $\xi = x/L$, $\xi_j = L_j/L$ ($j=0, 1, 2, 3$), $\alpha = PL^2/(2EI)$, $\beta = \omega L^2\{\rho A/(EI)\}^{0.5}$, $K = kL^4/(EI)$ を用いて無次元化する。これにより式(1), (2)に対応する無次元方程式の解は, $C_{i1} \sim C_{i4}$ ($i=1, 2, 3$) を定数として次のようになる。

無拘束区間 $i=1, 3$ では,

$$\eta_i(\xi) = C_{i1} \cosh \gamma \xi + C_{i2} \sinh \gamma \xi + C_{i3} \cos \delta \xi + C_{i4} \sin \delta \xi \quad \dots\dots\dots (6)$$

拘束区間 $i=2$ では,

$$\eta_2(\xi) = e^{a\xi} (C_{21} \cos b\xi + C_{22} \sin b\xi) + e^{-a\xi} (C_{23} \cos b\xi + C_{24} \sin b\xi) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \delta &= \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ a &= \sqrt{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \epsilon^2})/2} \\ b &= \sqrt{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \epsilon^2})/2} \\ \epsilon &= \sqrt{|\lambda^2| - \alpha^2} \\ \lambda^2 &= \beta^2 - K \end{aligned}$$

と置いている。式(6), (7)を境界条件式(3)~(5)に対応する無次元方程式に代入することから $C_{i1} \sim C_{i4}$ ($i=1, 2, 3$) を未知数とする同次連立一次方程式が得られる。

したがって求める振動数方程式は, この連立方程式の係数行列式すなわち, 12行12列の行列式を零とおくことから得られ, これを整理すると式(8)となる。

$$\begin{vmatrix} V_1(\xi_1) & V_2(\xi_1) & -V_3(0) & -V_4(0) & -V_5(0) & -V_6(0) & 0 & 0 \\ \dot{V}_1(\xi_1) & \dot{V}_2(\xi_1) & -\dot{V}_3(0) & -\dot{V}_4(0) & -\dot{V}_5(0) & -\dot{V}_6(0) & 0 & 0 \\ \ddot{V}_1(\xi_1) & \ddot{V}_2(\xi_1) & -\ddot{V}_3(0) & -\ddot{V}_4(0) & -\ddot{V}_5(0) & -\ddot{V}_6(0) & 0 & 0 \\ \ddot{\ddot{V}}_1(\xi_1) & \ddot{\ddot{V}}_2(\xi_1) & -\ddot{\ddot{V}}_3(0) & -\ddot{\ddot{V}}_4(0) & -\ddot{\ddot{V}}_5(0) & -\ddot{\ddot{V}}_6(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(\xi_2) & V_4(\xi_2) & V_5(\xi_2) & V_6(\xi_2) & -V_1(\xi_3) & -V_2(\xi_3) \\ 0 & 0 & \dot{V}_3(\xi_2) & \dot{V}_4(\xi_2) & \dot{V}_5(\xi_2) & \dot{V}_6(\xi_2) & -\dot{V}_1(\xi_3) & -\dot{V}_2(\xi_3) \\ 0 & 0 & \ddot{V}_3(\xi_2) & \ddot{V}_4(\xi_2) & \ddot{V}_5(\xi_2) & \ddot{V}_6(\xi_2) & -\ddot{V}_1(\xi_3) & -\ddot{V}_2(\xi_3) \\ 0 & 0 & \ddot{\ddot{V}}_3(\xi_2) & \ddot{\ddot{V}}_4(\xi_2) & \ddot{\ddot{V}}_5(\xi_2) & \ddot{\ddot{V}}_6(\xi_2) & -\ddot{\ddot{V}}_1(\xi_3) & -\ddot{\ddot{V}}_2(\xi_3) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし,

$$\begin{aligned} V_1(\xi) &= \cosh \gamma \xi - \cos \delta \xi \\ V_2(\xi) &= \sinh \gamma \xi - (\gamma/\delta) \cdot \sin \delta \xi \\ V_3(\xi) &= e^{a\xi} \cdot \cos b\xi, \quad V_4(\xi) = e^{a\xi} \cdot \sin b\xi \\ V_5(\xi) &= e^{-a\xi} \cdot \cos b\xi, \quad V_6(\xi) = e^{-a\xi} \cdot \sin b\xi \\ ' &= d/d\xi, \quad '' = d^2/d\xi^2, \quad ''' = d^3/d\xi^3 \end{aligned}$$

と置いている。したがって、式(8)に軸荷重 P 、ばね定数 k 、拘束位置 L_0 、拘束幅 L_2 等の値を代入すれば、式(8)は ω についての超越方程式となる。

よって、この方程式を解けば固有角振動数 ω が求められる。

3. 実験および計算による 2, 3 の結果

実験において使用する棒は、装置の簡単のため丸棒とし、直径 $d=15$ mm, $L=400$ mm の SK ロッド棒 (縦弾性係数 $E=201$ GPa: 実測値) を用いた。丸棒の固定端側は鋼製の円板 (直径 150 mm, 厚さ 25 mm) に丸穴をあけたものをジグとし、これにしまりばね程度のはめあいで 15 mm 丸棒を差し込んで固定端とした。この時側壁に固定した補剛支点取付用水平板 (300×300×20 mm) 中央の丸穴 (直径 40 mm) に丸棒を貫通させておいた。

また、円板 (直径 100 mm, 厚さ 10, 15, 20 mm) の中央に丸穴をあけ、これを 2 分割して丸棒を挟み込み、補剛支点取付用水平板に固定して補剛支点とした。軸荷重の負荷はアムスラー万能試験機によった。丸棒にインパルスハンマにより衝撃を与え、このとき発生する振動を加速度ピックアップセンサにより検出し、FFT 装置に取込んで固有振動数を測定した。なお、丸棒の安全を考慮して、加える軸荷重の最大は $a=7.06$ ($P=44.1$ kN: 補剛支点の無い丸棒の座屈荷重の約 40%, 降伏点荷重の約 70%) 程度とした。測定は $a=3.14$ ($P=19.6$ kN) から $a=0.39$ ($P=2.45$ kN) 刻みで行った。

図 2 は固有振動数と軸荷重の関係調べた一例で、拘束位置 $\xi_0=0.5$ 、拘束幅 $\xi_2=0.05$ のものである。実験値は 5 回の測定結果の平均値であり、測定値の平均値に対するばらつきは 0.25% 程度であった。ところ

で、ばね定数 k は補剛支点の組立状態により値が変わり、未知の値であるから式(8)より固有振動数すなわち β を求めるためには、あらかじめ k の値を定めておく必要がある。

そこで、ここでは軸荷重 $a=7.06$ ($P=44.1$ kN)、およびこの軸荷重下における実験より求めた一次固有振動数を式(8)に代入し、 k の値 ($K=2.506 \times 10^6$) を逆算した。そして、この逆算値を他の軸荷重下における固有振動数の算出に用いた。したがって、 $a=7.06$ における一次振動の実験値 (黒丸) と計算値は一致することになる。また、他の荷重でばね定数を求めても、上述の荷重下における値とほぼ同一の値が得られた。計算値の実験値に対する誤差率の平均は、一次固有振動数で約 0.5%、二次固有振動数で約 4.5% であり、一次の固有振動数は計算値と実験値がよく一致している。これは同定した K の値が、諸処の仮定による近似の影響を含んだ等価なばね定数値となっているためである。

また、拘束位置や拘束幅 ($\xi_2=0.025, 0.038$) を変えた場合、 K の値は異なるが、一次、二次固有振動数の誤差率は上述と同程度であった。

以上のことから拘束幅のある補剛支点は、ウィングラー型ばねで近似することが可能であることがわか

Fig. 2 Relationship between natural frequencies and axial force

る。

図3は、ばね定数 K と固有振動数 β の関係を調べた一例で、拘束位置 $\xi_0=0.375$ 、拘束幅 $\xi_2=0.05$ 、軸荷重 $\alpha=7.06$ とした計算結果である。図から $K \approx 10^9$ 程度までは、ばね定数の増加につれて固有振動数は増加していくが、それ以上では K の値を増加させても固有振動数はあまり変化しないことがわかる。ところで、 K を無限大とした極限では補剛支点は固定端と見なせる。この場合系は軸荷重を受ける長さ $\xi_1 (=L_1/L)$ 、と $\xi_3 (=L_3/L)$ の2本の両端固定棒に分解できる(以下ではこれを、2本の両端固定棒と呼ぶ)。表1はこの2本の両端固定棒の固有振動数を示したもので、表1中の①～⑤は、それらを次数に関係なく値の低いものから順に番号付けしたものである。図3にはこの番号と振動数を白丸で記入している。

図からばね定数を大きくしていくと、1次、2次、…の固有振動数はそれぞれ上述の2本の両端固定棒における1番低い固有振動数、2番めに低い固有振動数、…に近づいていくことがわかる。

図4は特に補剛支点が棒の中央にある場合のものである。図中の白丸と①②は先と同様であり、この場合無拘束部分の長さは等しく $\xi_1=\xi_3$ となるから、2本の両端固定棒は各次の固有振動数が等しくなる。

図からばね定数を大きくしていくと、この系の1次と2次、3次と4次、…の固有振動数は、2本の両端固定棒の1次、2次、…の固有振動数に近づいていくことがわかる。

逆にばね定数を小さくしていくと、この系の固有振動数は補剛支点のない軸荷重の作用する両端固定棒の1次、2次、…の固有振動数に近づいていくことがわっている。

図5は、ばね定数と座屈荷重の関係を調べたものの一例で $\xi_2=0.05$ の計算結果である。

Fig. 3 Relationship between spring constant and natural frequencies

図5からばね定数の値を増加させていくと、座屈荷重は、2本の両端固定棒における各々の座屈荷重のうち、低いほうの座屈荷重を示した右端の白丸に近づいていくことがわかる。

また、ばね定数の値が約 $K \approx 10^7$ 以下の範囲では、補剛支点の位置が棒の中央に近いほどばね定数の増加に伴う座屈荷重の増加割合も大である。ここで、拘束幅 ξ_2 が小さいほど、座屈荷重の増加割合が大であるばね定数の限界値、すなわち、先の $K \approx 10^7$ の値はさらに大きくなることがわかっている。

なお、図5中左端の白丸は補剛支点のない場合の座屈荷重である。

4. 軸荷重推定

系に作用している軸荷重 P の値を推定するために

Table 1 Natural frequencies (Hz)

	$\xi_1=0.35$	$\xi_3=0.6$
1 st	3404.38 ③	1107.18 ①
2 nd	9489.71 ⑤	3161.30 ②
3 rd	—	6286.72 ④

$\xi_0=0.5$ 、 $\xi_2=0.05$ 、 $\alpha=7.06$

Fig. 4 Relationship between spring constant and natural frequencies

Fig. 5 Relationship between spring constant and buckling load

は、未知であるばね定数 k の値も同時に同定する必要がある。

そこで、実験より得られた 1 次と 2 次の固有振動数を振動数方程式、すなわち式(8)に代入し、得られた二元連立超越方程式を解けば、これらの値を求めることができる。しかし、一般に二次固有振動数は一次のそれに比べ、実験値と理論値の差の絶対値が大となる。このため、一次と二次の固有振動数を用いた場合の推定値は誤差が大きいものと考えられる。

そこで以下では二つの一次固有振動数の実験値、すなわちこの系自身の実験値と、新たにこの系の棒の任意の一点に付加質量を取り付けた図 6 に示す系⁽⁵⁾を導入し、この新たな系における実験値を利用して軸荷重の推定を行う方法を提案する。

図 6 において付加質量 m 、およびその固定端からの取付位置 L_4 は既知であるとし、振動数方程式の導出を考える。この系は m 以外図 1 の系と同一であるから、振動数方程式の導出過程も同様に行える。

そこで、以下では運動方程式、接合条件等において図 1 の系と重複する部分を省略し、簡単に記すことにする。

m と棒の質量比を w と置き、 m の取付位置 O_3 点で $L-(L_1+L_2)$ 区間を L_3, L_4 の 2 区間に分割し、 $P \gg \rho AgL$, $P \gg mg$ を考慮することから、運動方程式は式(1)と次の式(9)になる。

$$\left. \begin{aligned} L_1+L_2 \leq x \leq L-L_4 : \\ EI \frac{\partial^4 y_3}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} = 0 \\ L-L_4 \leq x \leq L : EI \frac{\partial^4 y_4}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_4}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y_4}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

次に、付加質量の慣性モーメントを J とすると接合条件は式(3)、(4)と式(10)になる。

$$\left. \begin{aligned} x=L-L_4 : y_3=y_4, \frac{\partial y_3}{\partial x} = \frac{\partial y_4}{\partial x} \\ EI \left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y_4}{\partial x^2} \right) = -J \frac{\partial^3 y_3}{\partial x \partial t^2} \\ EI \left(\frac{\partial^3 y_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 y_4}{\partial x^2} \right) = -mg \frac{\partial y_3}{\partial x} + m \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} \\ x=L : y_4=0, \frac{\partial y_4}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式(1)、(9)の解を先と同様に $y_i(x, t) = X_i(x) \cdot \sin \omega t (i=1, 2, 3, 4)$ とし、無次元量 $\eta_i(\xi) = X_i(x)/L (i=1, 2, 3, 4)$, $\xi = x/L$, $\xi_j = L_j/L (j=0, 1, 2, 3, 4)$ 等を用いて式(1)、(9)を無次元化すると、無次元方程式の解は、式(6)、(7)および、 $C_{41} \sim C_{44}$ を定数とした式(11)となる。

$$\begin{aligned} \eta_4(\xi) = & C_{41} \cosh \gamma \xi + C_{42} \sinh \gamma \xi \\ & + C_{43} \cos \delta \xi + C_{44} \sin \delta \xi \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(6)、(7)、(11)の接合条件の式(3)、(4)、(10)に対応する無次元化した式に代入することから、 $C_{11} \sim C_{44}$ に関する 16 行 16 列の行列式が得られ、これを整理すると式(12)に示す振動数方程式が求まる。

$$\begin{vmatrix} V_1(\xi_1) & V_2(\xi_1) - V_3(0) - V_4(0) - V_5(0) - V_6(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{V}_1(\xi_1) & \dot{V}_2(\xi_1) - \dot{V}_3(0) - \dot{V}_4(0) - \dot{V}_5(0) - \dot{V}_6(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{V}_1(\xi_1) & \ddot{V}_2(\xi_1) - \ddot{V}_3(0) - \ddot{V}_4(0) - \ddot{V}_5(0) - \ddot{V}_6(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddot{V}_1(\xi_1) & \ddot{V}_2(\xi_1) - \ddot{V}_3(0) - \ddot{V}_4(0) - \ddot{V}_5(0) - \ddot{V}_6(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3(\xi_2) & V_4(\xi_2) & V_5(\xi_2) & V_6(\xi_2) & -V_7(\xi_3) & -V_8(\xi_3) & -V_9(\xi_3) & -V_{10}(\xi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{V}_3(\xi_2) & \dot{V}_4(\xi_2) & \dot{V}_5(\xi_2) & \dot{V}_6(\xi_2) & -\dot{V}_7(\xi_3) & -\dot{V}_8(\xi_3) & -\dot{V}_9(\xi_3) & -\dot{V}_{10}(\xi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{V}_3(\xi_2) & \ddot{V}_4(\xi_2) & \ddot{V}_5(\xi_2) & \ddot{V}_6(\xi_2) & -\ddot{V}_7(\xi_3) & -\ddot{V}_8(\xi_3) & -\ddot{V}_9(\xi_3) & -\ddot{V}_{10}(\xi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{V}_3(\xi_2) & \ddot{V}_4(\xi_2) & \ddot{V}_5(\xi_2) & \ddot{V}_6(\xi_2) & -\ddot{V}_7(\xi_3) & -\ddot{V}_8(\xi_3) & -\ddot{V}_9(\xi_3) & -\ddot{V}_{10}(\xi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -V_1(\xi_4) - V_2(\xi_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & -\dot{V}_1(\xi_4) - \dot{V}_2(\xi_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & \mu_1 \gamma & -\delta^2 & \mu_1 \delta & -\ddot{V}_1(\xi_4) - \ddot{V}_2(\xi_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \gamma(\gamma^2 + \mu_2) & -\mu_3 & -\delta(\delta^2 - \mu_2) & -\ddot{V}_1(\xi_4) - \ddot{V}_2(\xi_4) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} V_7(\xi) = & \cosh \gamma \xi, \quad V_8(\xi) = \sinh \gamma \xi, \quad V_9(\xi) = \cos \delta \xi, \quad V_{10}(\xi) = \sin \delta \xi \\ \mu_1 = & \frac{J \omega^2 L}{EI}, \quad \mu_2 = w \frac{\rho Ag L^3}{EI}, \quad \mu_3 = w \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} \end{aligned}$$

Fig. 6 New model for analysis

Fig. 7 Relationship between the supported position and the error

であり、他の記号は式(8)と同一である。

よって、軸荷重の推定とばね定数の同定は、図1および図6に示す系の実験から求めた一次固有振動数を式(8)、および式(12)に代入して α と K に関する連立の超越方程式を解くことからできる。

実験における付加質量は、外径を52 mmの中空円筒とし、これを2分割して間に棒を挟みビス止めた。質量は円筒の高さで調節した。また、棒と接触する内面は段に加工し、この段の幅は3 mmとした。付加質量の取り付け位置 O_3 点は、拘束幅の中央と上部固定端との中央すなわち $L_4=(L-L_0)/2$ とした。

図7～9は軸荷重を変化させた場合の推定値の誤差率を示したものの一例である。

ここで、図7は質量比 $w=0.25$ 、補剛支点の拘束幅 $\xi_2=0.025$ とし、補剛支点の設置位置 ξ_0 を変えた場合、図8は、 $w=0.25$ 、 $\xi_0=0.5$ とし、拘束幅を変化させた場合のものである。図からこれらの誤差率の絶対値はほぼ10%以内にあることがわかる。

図9は、 $\xi_0=0.5$ 、 $\xi_2=0.025$ で質量比 w を変えた場合のものである。図から質量比が小さいほど推定値が

Fig. 8 Relationship between the contact area and the error

Fig. 9 Relationship between the position of added mass and the error

よいことがわかる。

したがって、本手法を用いる場合、棒に取付ける質量は補剛支点に影響しないよう軽いほうがよいが、付加質量と棒の質量比が $w=0.25$ 程度までであれば、棒に作用している軸荷重の概略値を推定することが十分可能である。

5. 結 言

圧縮の軸荷重を受ける両端固定棒が、棒の途中に拘束幅のある補剛支点を設けている場合について、固有振動数計算と軸荷重の推定を行った。得られた結果を要約すると

(1) 拘束幅のある補剛支点は、その幅が棒の全長の5%以下であればウィンクラー型ばねで置き換えることが可能である。

(2) 棒に作用している軸荷重の推定とウィンクラー型ばねのばね定数の同定には、この系と、この系の棒の一点に付加質量を取り付けた系における二つの一次固有振動数の実測値を利用する方法が有効である。

(3) この系の一次、二次、…の固有振動数は、ウィンクラー型ばねのばね定数を大きくしていくと、無拘束部分を長さとする二つの両端固定棒の固有振動数

を低いものから順番に列べた振動数にそれぞれが近づいていく。

文 献

- (1) 例えば, 鵜戸口英善, 機論, **17**-64, (1951), 59-65.
- (2) 例えば, 片岡真澄・植草昌彦・大野進一, 機論, **62**-599, C

- (1996), 2541-2548.
- (3) Nicola, A. and Anna, D. R. M., *Earthquake Resistant Construction & Design*, Vol. 2 (1994), 827-831.
- (4) Timoshenko, S., (谷下市松・渡辺茂訳), 工業振動学, (1956), 302-307, 東京図書.
- (5) 片岡真澄・大野進一・丸井英史, 機論, **58**-547, C(1992), 704-709.