衝撃時における柔軟マニピュレータシステムの運動解析*

(第1報, 二次元解析モデルと定式化)

松永三郎^{*1}, 小山 淳^{*2}, 狼 嘉彰^{*1}

Dynamics of Flexible Manipulator Systems Under Impact (1st Report, Two Dimensional Analytical Model and Formulation)

Saburo MATUNAGA, Jun KOYAMA and Yoshiaki OHKAMI

This paper discusses the formulation and impact dynamic response of an n-link flexible manipulator system using stress wave propagation theory for the impact analysis. The usual method to derive the intermittent motion of a multibody system has some limitations, such as the need to specify the value of the coefficient of restitution. In this paper, we apply wave propagation theory, which takes into account the mechanical properties and the initial velocities of the impacting bodies. In the analysis, the manipulator links are modeled as beams, and simple one-dimensional theory is used for the longitudinal displacements and torsion, while Bernoulli-Euler theory is used for flexural displacements. As an additional result, the coefficient of restitution of the impact is derived.

Key Words: Impact, Stress Wave, Wave Propagation, Flexible Multibody, Coefficient of Restitution

1. 緒 論

多体系衝突問題の解析方法として, 速度不連続量, 反発係数とニュートンの法則を考慮したニュートン法が広く用いられる⁽¹⁾⁽²⁾. しかしこの方法は剛体衝突問題を扱っているうえ, 反発係数をあらかじめ知っておかねばならない. また, Lankarani, Nikravesh⁽³⁾は衝突物体, 被衝突物体の間にある種のモデルを設置する Continuous Analysis Method を提案したが, この方法も反発係数, モデルの変位量を既知という制約が存在する. 吉川, 山田⁽⁴⁾は反発係数を用いないラプラス変換による衝撃評価法を考案し, 衝突物体, 被衝突物体の相対速度, 相対角速度を用いて剛体衝突問題を取り扱った. この手法はリンクを剛体, ジョイント部をばね-ダンパモデルで仮定している.

一方, 単一物体の弾性体に関し, Goldsmith⁽⁵⁾, Graff⁽⁶⁾らが衝撃波の伝播を考慮することで衝撃問題を解析した. この方法には従来の多体系衝突問題解析法のような制約が存在せず, 衝突物体, 被衝突物体の

速度, 角速度の初期条件から衝突挙動を正確に把握することができる. 波動伝播法は衝撃問題の厳密解を用いるため, 適用できる対象としては単純な構造物に限られる. より複雑な構造物に対して厳密な衝撃解析を行う際は有限要素法を用いるのが普通であるが, 必然とその解析は非常に煩雑なものとなる. したがって波動伝播法は衝撃解析において最も簡単な基本的方法と言え, 衝撃問題を解析する上で第1に試みるべき手法である.

そこで本稿ではこの衝撃波伝播を考慮して, 多体系である柔軟マニピュレータの衝突挙動の定式化を行う. 具体的には, 質点または柔軟体と柔軟マニピュレータとの衝突による衝撃力や衝突中, 衝突後のおのの物体の二次元挙動を取扱う. ただし本稿ではマニピュレータ, 衝突物体の線形弾性のみを考慮し, 塑性, 破壊などは無視する. 三次元への拡張や数値シミュレーションは続報にゆずる.

波動伝播法の多体系への拡張により, さまざまな実用的応用が考えられる. 一例として, 宇宙ロボットによる不具合衛星の回収に関する問題がある. 本稿で採用した方法を用いれば, マニピュレータ, 衝突物体の速度, 角速度と各材料の物性値が与えられれば全系の数値シミュレーションを行える. また衝撃の伴う多体

* 原稿受付 1997年8月4日.

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1).

^{*2} 正員, 東京工業大学大学院.

系を取扱う機械/建築/土木工学やスポーツ工学など多くの分野への応用が考えられよう。

2. 衝撃および衝突現象のとりえ方

本稿では「接触」「Contact」と「衝撃」「Impact」を以下のように定義する(図1参照)。まず「接触」は衝突物体と被衝突物体が衝突後、衝撃力が圧縮力から引張り力に変わり、お互いが離れるまでの間をいい、「衝撃」は衝突後、衝撃波が減衰して消えるまでの間とする。したがって剛体衝突の場合を除き、接触時間と衝撃時間の終了時は一般に異なる。

一般的に柔軟マニピュレータの衝撃力履歴が分かれば、衝突中の多体運動は運動方程式に衝撃力履歴を代入し積分することで求まる。本稿では衝突によって生じる衝撃波の流れに注目することで、衝撃力履歴を求める。すなわち、系の運動量、角運動量、エネルギー保存式および衝突点における連続、釣合い条件より衝撃波の流れを導く。そしてそれを基に Hertz の理論より衝撃力を求める。したがって衝突による衝撃波の伝播を調べることが、すなわち、衝撃力履歴を求めることとなるのである。ただジョイント部などの特異点における衝撃波特有の反射、透過の性質に注意しなければならない。

Fig. 1 Collision and impact

衝突物体ないし被衝突物体に剛体が含まれるとき、その部分の衝撃波伝播速度は無限大となり、別途検討せねばならない。したがって本稿では剛体問題は扱わず、すべての要素を柔軟体と仮定して解析を行う。剛体を含む系に関しては続報で報告する。本稿での衝撃力履歴および柔軟マニピュレータの運動解析導出法についての流れを図2に示す。

3. 運動方程式

本章では柔軟マニピュレータに衝突物体が衝突する場合を考え、それらの運動方程式を導出する。具体的に図3に示す n リンク・マニピュレータに衝撃力が加わった場合の運動方程式を導出する。本稿では二次元問題を扱い、図3に示す記法を用いる。

マニピュレータの各リンク、衝突物体とも簡単のため一次元弾性はりとみなして、縦、曲げの各剛性を考慮し、微小ひずみ、微小変形を仮定する。そしてその

Fig. 2 Flow chart of analysis

Fig. 3 n link manipulator (2 dimensional model)

縦変位, ねじり変位に関し, 一次元波動方程式の解を, 曲げ変位に関してはオイラーはりモデルの解を用いる. また本稿では柔軟多体系の運動を記述するのに柔軟多体系順動力学によく用いられる Moving Frame Approach⁽⁷⁾を採用する. すなわち, 注目する物体とともに座標系を剛体運動させ, その座標系から弾性運動を参照することにより全運動を把握する方法である. この方法をもとに境界条件を両端自由として各リンクに対する質量行列, 剛性行列を計算し, ジョイントにおける拘束条件を加味することでラグランジュ方程式より運動方程式を得る. 一方, 衝突物体に関しても全く同様に運動方程式を導出する.

3・1 n リンク・マニピュレータの運動方程式

図4に示すように右手系正規直交座標系である参照座標系 $\{e\}$, ボディ座標系 $\{b_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) を選ぶ. リンク i 上の微小部分 m_i の位置ベクトルを

$$\{e\}^T r_{m_i} = \{e\}^T r_i + \{b_i\}^T (d^i + U^i + W^i) \quad \cdots (1)$$

と表す. 一般にベクトル r を座標系 $\{e\}^T = \{e_x \ e_y\}^T$ で表現するときの座標が $r = [r_x \ r_y]^T$ であるとき

$$r = r_x e_x + r_y e_y = \{e\}^T r = r^T \{e\} \quad \cdots (2)$$

と表す. ただし, 上添字 T は行列の転置を示す. 上式(1)の右辺第1項は参照座標系原点からボディ座標系原点への位置ベクトル, 第2項はボディ座標系原点から点 m_i への位置ベクトル, 第3-4項は点 m_i における弾性変位ベクトルを表し, U^i は縦変位, W^i は曲げ変位であり, それぞれ

$$U^i = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^i \xi_n^i = u^i \xi^i$$

$$W^i = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^i \zeta_n^i = w^i \zeta^i \quad \cdots (3)$$

とモード展開できる. ここで $\xi_n^i(t)$, $\zeta_n^i(t)$ は一般化弾性座標, $u_n^i(x)$, $w_n^i(x)$ はリンクの両端自由に関する固有モード⁽⁹⁾を表す形状関数である. モード展開は有限項 m で打ち切り, $\xi^i = [\xi_1^i \ \xi_2^i \ \cdots \ \xi_m^i]^T$, $u^i = [u_1^i \ u_2^i \ \cdots \ u_m^i]$ などと定義した. ここで非拘束モードである両端自由に関する固有モードを用いるのは後述するように

Fig. 4 Definitions of frames and vectors

ジョイント部における衝撃波の影響を容易に求められるためである.

$\bar{q}^i = d^i + U^i + W^i$ とし式(1)を

$$\{e\}^T r_{m_i} = \{e\}^T r_i + \{e\}^{Te} C^i \bar{q}^i \quad \cdots (4)$$

と表す. ここで ${}^e C^i$ は $\{b_i\}$ 系から $\{e\}$ 系へ変換する方向余弦行列であり, 次式で表される.

$$\{e\} = {}^e C^i \{b_i\} \quad \cdots (5)$$

式(4)を時間微分すると点 m_i における速度ベクトルが

$$\{e\}^T \dot{r}_{m_i} = \{e\}^T \dot{r}_i + \{e\}^{Te} \dot{C}^i \bar{q}^i + \{e\}^{Te} C^i \dot{\bar{q}}^i \quad \cdots (6)$$

のように計算される. ここで式(3)を用いると $\dot{\bar{q}}^i$ は

$$\dot{\bar{q}}^i = S^i \dot{q}^i \quad \cdots (7)$$

と示される. ただし $\dot{q}^i = [\dot{\xi}^i \ \dot{\zeta}^i]^T$ は一般化弾性速度ベクトル,

$$S^i = [u^i \ w^i] \quad \cdots (8)$$

はボディ形状行列であり, $\dot{d}^i = 0$ という関係を用いた. また式(6)の第2項は一般的に

$$\{e\}^{Te} \dot{C}^i \bar{q}^i = \{e\}^{Te} B^i \dot{\theta}^i \quad \cdots (9)$$

と表される⁽⁸⁾. ここで $\dot{\theta}^i$ はボディ座標系における回転座標の時間微分を示し,

$${}^e B^i = \frac{\partial}{\partial \theta^i} ({}^e C^i \bar{q}^i) \quad \cdots (10)$$

である. 式(7), (9)より $\{e\}^T \dot{r}_{m_i}$ は

$$\begin{aligned} \{e\}^T \dot{r}_{m_i} &= \{e\}^T \dot{r}_i + \{e\}^{Te} B^i \dot{\theta}^i + \{e\}^{Te} C^i S^i \dot{q}^i \\ &= \{e\}^T [I \quad {}^e B^i \quad {}^e C^i S^i] [\dot{r}_i^T \quad \dot{\theta}^{iT} \quad \dot{q}^{iT}]^T \end{aligned} \quad \cdots (11)$$

となる. これよりリンク i における運動エネルギー T^i が

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{r}_{m_i}^T \dot{r}_{m_i} dV^i = \frac{1}{2} \dot{q}^T M^i \dot{q} \quad \cdots (12)$$

と求まる. ここで ρ^i はリンク i の質量密度であり, $\dot{q}$ は式(13)で表される一般化座標 q の時間微分である.

$$q = [q^{1T} \ q^{2T} \ \cdots \ q^{nT}]^T, \quad q^i = [r_i^T \ \theta^{iT} \ q_f^{iT}]^T \quad \cdots (13)$$

M^i はリンク i における質量行列である.

$$M^i = \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} I & {}^e B^i & {}^e C^i S^i \\ {}^e B^{iT} B^i & {}^e B^{iT} {}^e C^i S^i & S^{iT} S^i \\ \text{sym} & & \end{bmatrix} dV^i \quad \cdots (14)$$

こうして, 最終的に次の全系の質量行列を得る.

$$M = \text{diag}[M^1 \ \cdots \ M^n] \quad \cdots (15)$$

同様にポテンシャルエネルギー P^i をひずみエネルギーより求め, $P^i = (1/2) q^{iT} K^i q^i$ の関係を得る. ここで剛性行列は

$$K = \text{diag}[K^1 \cdots K^n]$$

$$K^i = \int_{V^i} \text{diag}[0 \ 0 \ R^i] dV^i$$

$$R^i = \text{diag}\left[(EA)_i \frac{\partial u^i}{\partial x} \quad (EI_y)_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2}\right] \cdots \cdots (16)$$

と示される。ここで $(EA)_i$ はリンク i に関する縦剛性, $(EI_y)_i$ は曲げ剛性を表す。ただしひずみエネルギーを導出する際, 有限回転, 幾何剛性の影響は考慮しない。

以上では質量行列, 剛性行列を各リンク独立に考慮したため, リンク間のジョイント拘束条件を考える必要がある。本稿では回転ジョイント, 球面ジョイントなどの一般的なホロノミックな拘束条件のみを考える。例えば, 1点を共有するという幾何学的条件を課せば, リンク i とリンク $i+1$ における拘束式

$$\{e\}^T r_{i+1} = \{e\}^T r_i + \{e\}^T C^i (l^i + U^i + W^i)|_{x=l^i} \cdots \cdots (17)$$

が得られる。ここで l^i はリンク i と $i+1$ を結ぶ位置ベクトルを $\{b_i\}$ 系で表した座標である。この拘束式を $i=1$ から $n-1$ まで適用し全拘束式を

$$\Phi(q, t) = 0 \cdots \cdots (18)$$

と定義する。

以上の結果より質量行列(15), 剛性行列(16), 拘束式(18)を用いて, 以下に示すラグランジュ方程式

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F - \dot{M}\dot{q} - Kq + T_q \\ -\Phi_{tt} - (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt}\dot{q} \end{Bmatrix} \cdots \cdots (19)$$

を得る⁽⁷⁾。ただし T は全系の運動エネルギー, λ はラグランジュの未定係数, 下添字 q, t はおのおの一般化座標, 時間による微分を示す。さらに F は衝撃力 Q がリンク n の端点へ働くと仮定し

$$F = [F_1 \cdots F_n]^T$$

$$F_1 = \cdots = F_{n-1} = 0$$

$$F_n = [I \quad ({}^e C^n)^T] (l^n + S^n q_f^n) \quad {}^e C^n S^n]^T Q \cdots (20)$$

と計算される。衝撃力 Q の導出に関しては, 5章で詳しく議論する。

3・2 衝突物体の運動方程式 衝突物体をはりと仮定しているため, 2・1節のリンク i に対して求めた方法で運動方程式は容易に求まる。

衝突物体座標系 $\{p\}$ を選ぶ。この座標系をもとに3・1節同様, 式(12), (16)の結果から $i=p$ とおくことにより質量行列, 剛性行列が求まる。こうして, 衝突物体の運動方程式が

$$M^p \ddot{q}^p = F - \dot{M}^p \dot{q}^p - K^p q^p + T_q^p \cdots \cdots (21)$$

と計算される。ただし F は衝撃力 $-Q$ が衝突物体の端点へ働くと仮定し

$$F = -[I \quad ({}^e C^p)^T] (S^p q_f^p) \quad {}^e C^p S^p]^T Q \cdots \cdots (22)$$

と表現される。

4. 衝撃波の伝播および反射と透過

衝撃波の種類として縦波, 曲げ波を考える。またマニピュレータジョイント部における衝撃波の伝播を取扱うため, ジョイント部を特異点とみなし, その点における波の反射と透過を考慮する。特異点に対し, 一つの入射波により縦波と曲げ波の反射波, 透過波の計四つの波が生成される⁽⁹⁾。すなわち, 二つのカップリングした波動運動を考慮しなければならない。その際, ジョイント部において連続の条件, 釣合い条件を採用し, 反射, 透過関係を導く。

4・1 衝撃波の伝播 衝撃波をフーリエ分解して解析する。縦波の伝播に関して, 妹沢の構造減衰およびはり断面方向への減衰を考慮した波動方程式(23)より波動 $U_i(x_i, t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) は数学的に

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho \nu^2 \kappa^2 \frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{E\eta}{\omega} \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \cdots \cdots (23)$$

$$U_i(x_i, t) = \sum_{\omega_i} \Xi_i e^{j(k_i x_i + \omega_i t)}$$

$$\omega_i = k_i \sqrt{\frac{E(1+j\eta)}{\rho(1+\nu^2 \kappa^2 k_i^2)}}, \quad c_i = \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i}} \cdots \cdots (24)$$

と表現される。ここで κ ははり断面の回転半径, Ξ_i はリンク i における波の振幅を表し初期衝撃力より各 k_i に対し求まる。ただし k_i はリンク i の波数, η は構造減衰係数⁽¹⁰⁾, ω_i は振動数, j は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を示す。式(24)は衝撃波の伝播を表す。

次に曲げ波について考える。波長が短くなると, オイラーはりにおける曲げ波の位相速度が無限大になるという矛盾を起こす。しかし衝撃問題を考える際重要となる波が起こる周波数領域(25 kHz 以下)において, このオイラーはりとは無矛盾な高次モデルであるティモシェンコはりの位相速度の違いはほとんどない⁽¹¹⁾。したがって位相速度に関し, オイラーはり波動伝播のモデルに用いることは妥当である。妹沢の構造減衰を考慮したオイラーはりの偏微分方程式(25)より式(26)に示す波動を得る⁽¹²⁾。

$$\rho \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + \frac{EI\eta}{\omega} \frac{\partial^5 W(x, t)}{\partial t \partial x^4} = Q \cdots \cdots (25)$$

$$W_i(x_i, t) = \sum_{\omega_i} (\Lambda^1 e^{-jk_i x_i} + \Lambda^2 e^{jk_i x_i} + \Lambda^3 e^{-k_i x_i} + \Lambda^4 e^{k_i x_i}) e^{j\omega_i t}$$

$$k_i^4 = \left(\frac{\omega_i^4}{c_i^4} \right) \left(\frac{1-j\eta}{1+\eta^2} \right), \quad c_i^4 = \omega_i^2 \frac{EI_i}{\rho_i A_i} \cdots \cdots (26)$$

ここで式(26)の右辺1-2項は波動運動を表し, 3-4項

Fig. 5 Connected beams and the amplitude of waves

は空間減衰を表す。

4.2 ジョイント部における衝撃波の反射と透過

ジョイント部における縦波と曲げ波の反射および透過の関係を調べるため、一点で連結された2本のリンク(図5)を考える。ただし図5における $\{b_i\}$, $\{b_{i+1}\}$ はリンク i , $i+1$ におけるボディ座標系を表す。次に示すジョイント部における連続の条件(27), 釣り合い式(28), (29), 波のエネルギー保存式より反射, 透過関係を導く。

$$\{b_i\}^T [U_i \ W_i]^T|_{x_i=l_i} = \{b_{i+1}\}^T [U_{i+1} \ W_{i+1}]^T|_{x_{i+1}=0} \quad (27)$$

$$\{b_i\}^T [F_{x_i} \ F_{y_i}]^T|_{x_i=l_i} = \{b_{i+1}\}^T [F_{x_{i+1}} \ F_{y_{i+1}}]^T|_{x_{i+1}=0} \quad (28)$$

$$\{b_i\}^T [M_{y_i}]|_{x_i=l_i} = \{b_{i+1}\}^T [M_{y_{i+1}}]|_{x_{i+1}=0} \quad (29)$$

ここで (U_i, F_{x_i}) は x_i 方向の変位, 力, (W_i, F_{y_i}, M_{y_i}) は y_i 方向の変位, 力, モーメントを示す。このことから衝撃波によるジョイント部に対して生ずる力などが容易に求められる。

次にジョイント部における波のエネルギー保存式を求める。リンク i からリンク $i+1$ に衝撃波が入射したと仮定する。一つの入射波より四つの波が生成される性質を考慮し, 入射波, 透過波を表現する。 $U(x_i, t)$, $W(x_i, t)$ はそれぞれ縦波, 曲げ波を表し, リンク i を流れる波に下添字-をつけ

$$\begin{aligned} U_-(x_i, t) &= \{\underline{\Xi}_i^i e^{-jk_i^l x_i} + \underline{\Xi}_i^i e^{jk_i^l x_i}\} \\ W_-(x_i, t) &= \{\underline{\Lambda}_2^i e^{k_i^l x_i} + \underline{\Lambda}_3^i e^{jk_i^l x_i} + \underline{\Lambda}_1^i e^{-jk_i^l x_i}\} \end{aligned} \quad (30)$$

とする。ここで下線の箇所はおおのジョイント部へ入射する波を示す。リンク $i+1$ を流れる波に対し下

添字+をつけ

$$\begin{aligned} U_+(x_{i+1}, t) &= \{\Xi_2^{i+1} e^{-jk_{i+1}^l x_{i+1}} + \Xi_1^{i+1} e^{jk_{i+1}^l x_{i+1}}\} \\ W_+(x_{i+1}, t) &= \{\Lambda_2^{i+1} e^{k_{i+1}^l x_{i+1}} + \Lambda_3^{i+1} e^{jk_{i+1}^l x_{i+1}} \\ &\quad + \Lambda_1^{i+1} e^{-jk_{i+1}^l x_{i+1}}\} \end{aligned} \quad (31)$$

と表す。ただし $\Xi_1^i, \Xi_2^i, \Xi_1^{i+1}, \Xi_2^{i+1}$ は伝播する縦波の振幅, $\Lambda_1^i, \Lambda_2^i, \Lambda_1^{i+1}, \Lambda_2^{i+1}$ は曲げ波の振幅, $\Lambda_3^i, \Lambda_3^{i+1}$ は空間減衰する曲げ波の振幅を示す。

上記に示される振幅の表記を用いて縦波および曲げ波の時間平均エネルギーを求める。曲げ波が伝播すると, せん断力と曲げモーメントが生じる。そのためには断面における瞬間仕事率 X は

$$\begin{aligned} X &= \gamma \frac{\partial w}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial t} \\ &\quad - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (32)$$

と計算される。ここで γ はせん断力, μ は曲げモーメントを表す。時間平均エネルギーを

$$P = -\frac{1}{T} \int_0^T X dt \quad (33)$$

と定義すれば, 最終的に曲げ波の時間平均エネルギーは

$$P_f = EI k_f^3 \omega \Lambda_f^2 \quad (34)$$

と表される。ただし ω は伝播する曲げ波の振動数, Λ_f は曲げ波の振幅を表す。同様に縦波が伝播する場合の瞬間仕事率は

$$X = -EA \epsilon \dot{u} = -EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (35)$$

と表現され, 時間平均エネルギーは式(33)を用いて

$$P_t = \frac{1}{2} EA \omega k^l \Xi_l \quad (36)$$

となる。以上の結果より波のエネルギー保存式は

$$\begin{aligned} E^i I^i k_i^3 \omega \Lambda_1^{i2} + \frac{1}{2} E^i A^i \omega k_{i+1}^l \Xi_i^{i+1} + E^{i+1} I^{i+1} k_{i+1}^3 \omega \Lambda_1^{i+12} \\ + \frac{1}{2} E^{i+1} A^{i+1} \omega k_{i+1}^l \Xi_i^{i+1} = E^i I^i k_i^3 \omega \Lambda_2^{i2} \\ + E^i I^i k_i^3 \omega \Lambda_3^{i2} + \frac{1}{2} E^i A^i \omega k_i^l \Xi_i^i \\ + E^{i+1} I^{i+1} k_{i+1}^3 \omega \Lambda_2^{i+12} + E^{i+1} I^{i+1} k_{i+1}^3 \omega \Lambda_3^{i+12} \\ + \frac{1}{2} E^{i+1} A^{i+1} \omega k_{i+1}^l \Xi_i^{i+1} \end{aligned} \quad (37)$$

と表現される。最終的に式(27)~(29)と式(37)を解くことで反射, 透過する波の振幅を得る。

式(30), (31)を用いるとジョイント部における波の変位, 力およびモーメントは下記のように示される。まず, 反射波による軸変位および応力は

$$\begin{aligned} U_i = U_-(l_i, t), \quad F_{x_i} = E_i A_i \frac{\partial U_-(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \\ \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

と導かれる。透過波による縦変位と応力も式(38)と同

様に求められる。一方、反射波による曲げ変位、曲げモーメント、せん断力は

$$W_i = W_-(l_i, t), M_{y_i} = E_i I_i \frac{\partial^2 W_-}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=l_i}$$

$$F_{y_i} = E_i I_i \frac{\partial^3 W_-}{\partial x_i^3} \Big|_{x_i=l_i} \dots \dots \dots (39)$$

と表現される。透過波に関する曲げ変位、曲げモーメント、せん断力は式(39)と同様に求まる。逆にリンク $i+1$ からリンク i に衝撃波が入射する場合も同様である。

4・3 境界における波の反射と透過 本稿ではジョイント部以外の境界を、簡単のため自由端と固定端のみとする。おのおのの境界条件を下記のように仮定する⁽⁶⁾。

自由端

- ・変位に関し入射波と同じ大きさで異符号の波が反射。
- ・応力に関し入射波と同じ大きさで同符号の波が反射。

固定端

- ・変位に関し入射波と同じ大きさで同符号の波が反射。
- ・応力に関し入射波と同じ大きさで異符号の波が反射。

5. 衝撃力履歴

衝突中の衝撃力履歴を求め、それを3章で導出した運動方程式へ代入することでマニピュレータおよび衝突物体の衝突中ないし衝突後の挙動を知ることができ

Fig. 6 Stress wave generation by impact

る。本節では質点/柔軟体とマニピュレータの衝突による衝撃力履歴を求める。ただし衝突中リンクは剛に結合させ、衝撃は縦衝撃、曲げ衝撃に分けることができると仮定する。その際、衝突物体とマニピュレータの初期速度と初期角速度および物性値を用いる。

5・1 衝突物体が柔軟体の場合の衝撃力 マニピュレータリンク先端に衝突するとき、マニピュレータおよび衝突物体の衝突点から縦波、曲げ波が生成される(図6)。時刻 τ における運動量保存(40)、(41)、角運動量保存(42)、エネルギー保存(43)、衝突点における連続条件(44)を用いる。これをタイムステップごとに計算し、求められる変位をもとに Hertz の理論(45)⁽¹³⁾ を用いて衝撃力を求める。またマニピュレータおよび衝突物体のひずみエネルギーを求める際、4章で導いた波の伝播ないし反射、透過関係を用いる。

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \rho^i \frac{\partial U^i}{\partial t} dx \Big|_{t=0} + \int_0^{l_i} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dx \Big|_{t=0} = \int_0^{x'} \rho^n \omega \Xi dx + \int_{x'}^{l_n} \rho^n \frac{\partial U^n}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{l_i} \rho^i \frac{\partial U^i}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau}$$

$$+ \int_0^{x'} \bar{\rho} \omega \bar{\Xi} dx + \int_{x'}^{l_i} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} \dots \dots \dots (40)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \rho^i \frac{\partial W^i}{\partial t} dx \Big|_{t=0} + \int_0^{l_i} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} dx \Big|_{t=0} = \int_0^{x'} \rho^n \omega \Lambda dx + \int_{x'}^{l_n} \rho^n \frac{\partial U^n}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \rho^i \frac{\partial W^i}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau}$$

$$+ \int_0^{x'} \bar{\rho} \omega \bar{\Lambda} dx + \int_{x'}^{l_i} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} \dots \dots \dots (41)$$

$$mv \times d + I\Omega + \bar{m} \bar{v} \times \bar{d} + \bar{I}\bar{\Omega} = mv_\tau \times d + I\Omega_\tau + \bar{m} \bar{v}_\tau \times \bar{d} + \bar{I}\bar{\Omega}_\tau \dots \dots \dots (42)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho^i \left\{ \left(\frac{\partial U^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^i}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \Big|_{t=0} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \bar{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \Big|_{t=0}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \int_0^{l_i} E^i A^i \left(\frac{\partial U^i}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=0} + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E^i I_y^i \left(\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} \right)^2 dx \Big|_{t=0} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \bar{E} \bar{A} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=0}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \bar{E} \bar{I}_y \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right)^2 dx \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_0^{x'} \rho^n (\omega \Xi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x'}^{l_n} \rho^n \left(\frac{\partial U^n}{\partial t} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{x'} \rho^n (\omega \Lambda)^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x'}^{l_n} \rho^n \left(\frac{\partial W^n}{\partial t} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho^i \left\{ \left(\frac{\partial U^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^i}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \Big|_{t=\tau} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \bar{\rho} (\omega \bar{\Xi})^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^f} \bar{\rho} (\omega \bar{\Lambda})^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{x^i} E^n A^n (k_n^i \bar{\Xi})^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} E^n A^n \left(\frac{\partial U^n}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{x^f} E^n I_y^n (k_n^f \Lambda)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x^f}^{\bar{x}^f} E^n I_y^n \left(\frac{\partial W^n}{\partial x^2} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^i} E^i A^i \left(\frac{\partial U^i}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^i} E^i I_y^i \left(\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^i} \bar{E} \bar{A} (\bar{k}_n \bar{\Xi})^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} \bar{E} \bar{A} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} \bar{E} \bar{I}_y (\bar{k}^f \Lambda)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x^f}^{\bar{x}^f} \bar{E} \bar{I}_y \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} \dots \dots \dots (43)
 \end{aligned}$$

$$\omega \bar{\Xi} = \omega \bar{\Xi}, \omega \bar{\Lambda} = \omega \bar{\Lambda} \dots \dots \dots (44)$$

$$F = -K \alpha^{\frac{3}{2}}, \alpha = \beta + \bar{\beta}, K = \frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{R\bar{R}}}{(\kappa + \bar{\kappa})\sqrt{R + \bar{R}}}, \kappa = \frac{(1 - v^2)}{\pi E}, \bar{\kappa} = \frac{(1 - \bar{v}^2)}{\pi \bar{E}} \dots \dots \dots (45)$$

ここで x^i, x^f はタイムステップの間に縦波および曲げ波がリンク n を進む距離, $\bar{x}^i, \bar{x}^f$ はタイムステップの間に縦波および曲げ波が衝突物体を進む距離, Ξ, Λ は求めるリンク n の縦変位および曲げ変位, $\bar{\Xi}, \bar{\Lambda}$ は求める衝突物体の縦変位および曲げ変位, v はマニピュレータの衝突剛体速度成分列, v_τ は衝突時間 τ におけるマニピュレータの衝突剛体速度成分列, d はマニピュレータ重心から衝突点までの位置成分列, I はマニピュレータの慣性モーメント成分列, Ω はマニピュレータの衝突剛体角速度成分列, Ω_τ は衝突時間 τ におけるマニピュレータの衝突剛体角速度成分列, β はマニピュレータの変位, $\bar{\beta}$ は衝突物体の変位, R および $\bar{R}$ はマニピュレータ, 衝突物体の接触球面半径を示す. ただし諸量はすべて $\{e\}$ 系から見た成分を示す. このことは以下同様とする. さらに $(\bar{\quad})$ をつけることで, 衝突物体の諸量を表す. また衝撃波の進みを計算するための縦波の位相速度は $v = \sqrt{E/\rho}$, 曲げ波の位相速度は $v = \sqrt{\omega(EI/\rho A)^{1/2}}$ で与えられる. こうしてある一定のタイムステップごとに衝撃力を計算し, 衝突点における応力の符号が反転するときを衝突の終了と判定する⁽⁵⁾. 衝突開始は相対位置を基準に, 衝突終了が応力を基準としていることに注意する.

以上の計算によって得られる衝撃力を2章で導出した運動方程式へ挿入することで, n リンクマニピュレータおよび衝突物体の挙動を求めることができる.

5.2 衝突物体が質点の場合の衝撃力 衝突物体が質点の場合も考え方は同じである. ただし, 運動量保存(46), (47), エネルギー保存(48), 衝突点における連続条件(49)より衝撃力履歴を計算する.

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\bar{x}^i} \rho^i \frac{\partial U^i}{\partial t} dx \Big|_{t=0} + \bar{m} \bar{v}_{x0} = \bar{m} \bar{v}_{x\tau} + \int_0^{x^i} \rho^n \omega \Xi dx + \int_{x^i}^{\bar{x}^i} \rho^n \frac{\partial U^n}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\bar{x}^i} \rho^i \frac{\partial U^i}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} \dots \dots \dots (46)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\bar{x}^i} \rho^i \frac{\partial W^i}{\partial t} dx \Big|_{t=0} + \bar{m} \bar{v}_{y0} = \bar{m} \bar{v}_{y\tau} + \int_0^{x^f} \rho^n \omega \Lambda dx + \int_{x^f}^{\bar{x}^f} \rho^n \frac{\partial W^n}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\bar{x}^i} \rho^i \frac{\partial W^i}{\partial t} dx \Big|_{t=\tau} \dots \dots \dots (47)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} m v_\tau^2 v + \frac{1}{2} \bar{m} \bar{v}_\tau^2 \bar{v} + \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega = \frac{1}{2} m v_\tau^2 v_\tau + \frac{1}{2} \bar{m} \bar{v}_\tau^2 \bar{v}_\tau + \frac{1}{2} \Omega_\tau^T I \Omega_\tau + \frac{1}{2} \int_0^{x^i} E^n A^n (k_n^i \Xi)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} E^n A^n \left(\frac{\partial U^n}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{x^f} E^n I_y^n (k_n^f \Lambda)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x^f}^{\bar{x}^f} E^n I_y^n \left(\frac{\partial W^n}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^i} E^i A^i \left(\frac{\partial U^i}{\partial x} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^i} E^i I_y^i \left(\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{x^i} \rho^n (\omega \Xi)^2 dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x^i}^{\bar{x}^i} \rho^n \left(\frac{\partial U^n}{\partial t} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} + \frac{1}{2} \int_0^{x^f} \rho^n (\omega \Lambda)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x^f}^{\bar{x}^f} \rho^n \left(\frac{\partial W^n}{\partial t} \right)^2 dx \Big|_{t=\tau} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^i} \rho^i \left\{ \left(\frac{\partial U^i}{\partial t} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\partial W^i}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \Big|_{t=\tau} \right) \dots \dots \dots (48)
 \end{aligned}$$

$$\omega \bar{\Xi} = \bar{v}_{x\tau}, \omega \bar{\Lambda} = \bar{v}_{y\tau} \dots \dots \dots (49)$$

6. 反発係数

反発係数を求めることはエネルギー散逸を調べるうえで大きな指標となり重要である⁽¹⁴⁾. また従来の反発係数を指定したニュートン法の妥当性を調べるためにも, 反発係数を求めることは意義がある.

図7に示すモデルを用いて n リンクマニピュレータと衝突物体の反発係数を求める. 反発係数を求める

方法として線形性を用いるニュートンの方法を採用すると, 反発係数 e_n は

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -e_n \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \dots \dots \dots (50)$$

で与えられる. ただし大文字は衝突後, 小文字は衝突前の速度, $\mathbf{n}$ は衝突面に対して垂直な単位ベクトルを表す. また $\mathbf{V}, \mathbf{v}$ はおのおの

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} = & \{e\}^T V_c + \{b_i\}^T \Omega_i \times l_i - \{p\}^T V_r \\
 & - \{p\}^T \Omega_r \times d_r = \{p\}^T \left[{}^p C^e \left\{ V_c + \sum_{i=1}^n e C^i \Omega_i \times l_i \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Fig. 7 Example of impact

$$\begin{aligned}
 & -V_r - \Omega_r \times d_r \Big] \\
 \nu = & \{e\}^T \nu_c + \sum_{i=1}^n \{b_i\}^T \omega_i \times l_i - \{p\}^T \nu_r \\
 & - \{p\}^T \omega_r \times d_r = \{p\}^T \left[{}^p C^e \left\{ \nu_c + \sum_{i=1}^n {}^e C^i \omega_i \times l_i \right\} \right. \\
 & \left. - \nu_r - \omega_r \times d_r \right] \dots \dots \dots (51)
 \end{aligned}$$

で示される。ただし ν_c はマニピュレータの並進速度, ν_r は衝突物体の並進速度, ω_i はマニピュレータの各ジョイント部における角速度, l_i はリンク長さ, ω_r は衝突物体の角速度, d_r は衝突物体の座標中心から重心までの位置, $\{p\}$ は衝突物体座標系を表す。

7. 結 論

本稿では衝撃を伴う柔軟マニピュレータシステムの運動の定式化を行った。特に単一物体に用いられてきた波動伝播法を柔軟多体系へ拡張した。ニュートン法などの既存の方法は反発係数を用いなければならないという制約があるのに対し、波動伝播法は衝突物体、衝突物体の初期速度と初期角速度および物性値を与えれば運動解析が行えるという長所をもつ。さらに弾性波動によるマニピュレータ全体の運動を考慮することができ、衝突物体を単体から多体系へと容易に拡張が行える。したがって複数のマニピュレータを用いて操

作する場合の、マニピュレータ間の衝突による影響、挙動を調べることも可能である。ただし、ジョイント部などの特異点において一つの入射波に対し四つの波が生成されるという波の性質を考慮したため、計算負荷が大きいという欠点をもつ。

本稿では定式化のみを示したが、続報において数値シミュレーション結果を示す。さらに衝撃波によるジョイント部への影響、反発係数値の計算など、関連事項についても議論を行う。

文 献

- (1) Khulief, Y. A. and Shabana, A. A., *Trans. ASME, J. Mech. Autom. Des.*, **108**(1986), 38-45.
- (2) 吉田和哉・指田直毅・梅谷陽二, 日本ロボット学会誌, **11** (1993), 410-418.
- (3) Lankarani, H. M. and Nikravesh, P. E., *Nonlinear Dynamics*, **5**(1994), 193-207.
- (4) Yoshikawa, S. and Yamada, K., *Proc. 1993 ISME Int. Conf. Advanced Mech.*, (1993), 836-841.
- (5) Goldsmith, W., *Impact*, (1960), 38, Edward Arnold Ltd.
- (6) Graff, K. F., *Wave Motion in Elastic Solids*, (1975), 95, Clarendon Press.
- (7) Jalon, J. G. and Bayo, E., *Kinematics and Dynamic Simulation of Multibody Systems*, (1993), 377, Springer-Verlag.
- (8) Shabana, A. A., *Dynamics of Multibody Systems*, (1989), 263, John Wiley & Sons, Inc.
- (9) Lee, J. P. and Kolsky, H., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **39**(1972), 809-813.
- (10) Wohlever, J. C. and Bernhard, R. D., *J. Sound Vib.*, **153**-1, (1992), 1-19.
- (11) Doyle, J. F. and Kamle, S., *Trans. ASME, J. Applied Mech.*, **52**(1985), 669-673.
- (12) 林毅, 軽構造の理論とその応用, (1966), 461, 日本科学技術連盟.
- (13) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, (1951), 409, McGraw-Hill.
- (14) Brach, R. M., *Mechanical Impact Dynamics*, (1991), 40, John Wiley & Sons.