時間遅れを含む非対称構造形非線形係数励振系の動的挙動* (平均法による 1/2 次分数調波振動の解析)

吉田 勝俊*¹, 佐藤 啓仁*¹, 内藤 朗*²

Dynamic Motion of Parametrically Excited Asymmetric Nonlinear System With Time Delay (Analysis of 1/2-th Subharmonics by Averaging Method)

Katsutoshi YOSHIDA, Keijin SATO and Akira NAITO

This paper studies subharmonic responses of a parametrically excited asymmetric nonlinear system with time delay. It is known that it is difficult to investigate the nonlinear system with time delay by analytical methods because the system is described by a difference-differential equation hard to be solved. To analyze this kind of a system, we have already introduced an averaging method for the functional differential equation. The previous work showed that this averaging method is effective for self-excited vibrations and forced vibrations arising in a Duffing-type vibration system with time delay. However, the previous work dealt only with a fundamental harmonic responses and the target system has a relatively simple structure. To investigate a more practical example, this paper studies not only fundamental but also higher harmonic responses of a more practical vibration system with time delay such as a one-dimensional rotor system of asymmetric rigidity supported by plain bearings. The result showed that stability conditions estimated by the averaging method is deeply connected with behaviors obtained from a direct numerical simulation of the target system.

Key Words: Nonlinear Vibration, Time Delay, Subharmonics, Averaging Method, Stability Condition

1. 緒 言

機械振動系のような非線形振動系が時間遅れをもつ場合、さまざまな異常現象が発生しやすく、騒音問題・疲労破壊問題などの深刻な事態を招きやすい。しかしながら、このような時間遅れを有する振動系は、数学モデルが差分微分方程式となり、特性方程式に超越項が含まれるため、応答曲線や安定条件を通常の解析手法によって求めることが難しい。このような場合に有効な解析手法として、関数微分方程式に対する平均法^{(1)~(3)}がある。この平均法は時間遅れ項に関する厳密な数学的定式化を含んでおり、その近似解は、時間遅れを持つ系の支配的な動特性を抽出し、他を無視した形で得られる。また、平均化方程式が通常の常微分方程式となるため、これから容易に応答曲線や安定条件を求めることができる。

著者らはこれまで、この関数微分方程式に対する平均法を用いて、時間遅れを持つ非線形振動系の自励振動および基本調波振動の解析を行ってきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。この中で、対象系の直接数値解、従来の平均法による数値

解、および本平均法による数値解の三者のパワースペクトルを比較し、従来の平均法の場合と異なり、時間遅れが大きい場合にも本平均法が妥当な解析結果を導くことなどを示した。

さらに前報⁽⁷⁾では、時間遅れが含まれるためにまだ十分な取扱いがなされていなかったと思われる、滑り軸受で支持された非対称軸剛性を有する 1 自由度のロータ系⁽⁶⁾を取上げ、この系に関数微分方程式に対する平均法を適用し、基本調波振動および二次高調波振動の解析を行った。そして、本平均法による安定判別が、実用上十分な精度をもって行われることなどを示した⁽⁷⁾。しかしながら、1/2 次分数調波振動に関しては、直接数値解においてその存在を確認したのみで、本平均法を用いた解析は行っていない。そこで本報ではこの点を検討する。平均化によって得られた応答曲線および安定条件と、対象系の直接数値解の挙動との比較を行い、本平均法の有効性を検証する。

2. 時間遅れをもつ非線形振動系

本研究では、滑り軸受で支持された非対称軸剛性を有する 1 自由度のロータ系を取上げる。これを次式に示すが、この系は、非線形復元項に時間遅れをもち、外力による励振項と係数励振項を同時にもつことか

* 原稿受付 1997 年 12 月 10 日。

*¹ 正員、宇都宮大学工学部 (〒321-8585 宇都宮市石井町 2753)。

*² ポリマテック(株) (〒114-0014 東京都北区田端 5-10-10)。

ら, Shallow Elastic Arch と呼ばれる係数励振系⁽⁶⁾と等価である.

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) - \gamma y(t) + (\gamma - \alpha)y(t-h) \\ + \beta y^3(t-h) + (Q \cos \Omega t)y(t) = P \cos \Omega t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに h は時間遅れである.

式(1)からも明らかなように, 時間遅れをもつ振動系の数学モデルは差分微分方程式となる. このような差分微分方程式は無限次元の関数空間上で定義されるため, 有限次元の数ベクトル空間上に定義される通常の常微分方程式と異なり, 一般にこれを解くのは困難である. 本研究では, 式(1)の系に対して関数微分方程式に対する平均法^{(1)~(3)}を適用することによって, この系の動的挙動を解析する.

3. 関数微分方程式に対する 平均法による解析

3.1 内積および定数変化公式 各調波振動の具体的な計算に先だって, 本平均法の定式化に必要な内積および定数変化公式について概説する⁽³⁾.

R^n を n 次元の列ベクトル空間, $C = C([-L, 0], R^n)$ を区間 $[-L, 0]$ を R^n に写す連続関数の空間⁽²⁾としたときに, 関数空間 C 上で定義される以下の系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = Ux(t) + Vx(t-h) \\ + \varepsilon f(t, x(t), Vx(t-h)) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに $x \in R^n$, U, V は $n \times n$ 行列, h は時間遅れである. また, 非線形摂動 $\varepsilon f(\varepsilon \geq 0)$ は n 次元ベクトル値関数で, t に関して概周期的かつ x, y に関して連続微分可能であるとする. 式(2)は, 本研究で扱う式(1)のような系の一般形となっている.

まず $\varepsilon = 0$ の場合を考える. このとき式(2)は

$$\dot{x}(t) = Ux(t) + Vx(t-h) \dots\dots\dots (3)$$

となり, この系を式(2)の無摂動系と呼ぶ. 無摂動系[式(3)]の随伴系は, R^{n*} を n 次元行ベクトル空間, C^* を $C([0, L], R^{n*})$ としたとき, 空間 C^* 上で次式のように定義される.

$$x^*(t) = -x^*(t)U - x^*(t+h)V \dots\dots\dots (4)$$

ここに $x^* \in R^{n*}$ である.

このとき ϕ, ψ をそれぞれ C, C^* の要素とし, これらの内積を次式で定義する.

$$\begin{aligned} (\phi, \psi) = \phi(0)\psi(0) \\ - \int_0^{-h} \psi(\xi+h)V\phi(\xi)d\xi \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

さて, 式(2)($\varepsilon \neq 0$)の解が張る空間の全体 C は, $C = P \oplus Q$ のように直和分解できることが知られてい

る⁽³⁾. ここに P は特性根の実部が零以下である解の空間, Q はその補空間である. P 上の式(2)($\varepsilon \neq 0$)の解挙動は, 以下に示す定数変化公式⁽³⁾によって求めることができる. 一方で補空間 Q 上の挙動は, その振幅が指数関数のオーダーで零に減衰し, 平均化の操作によってキャンセルされるので以下の議論では無視する.

本研究において興味があるのは, 各調波振動の振幅および位相であるから, これを直接扱える形式を得るために, ここでは定数変化公式を極座標表示する. また対象の式(1)の状態空間は二次元であることを考慮して, $x = (x_1, x_2)^T$ の場合を考える. $\nu\Omega$ を着目する調波の周波数とし, これに対する極座標変換 T_ν :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = R_\nu(t) \begin{bmatrix} \cos(\nu\Omega t + \theta(t)) \\ -\sin(\nu\Omega t + \theta(t)) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

を導入すると, 次式の定数変化公式 X_ν :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{R}_\nu \\ R_\nu \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos(\nu\Omega t + \theta) & -\sin(\nu\Omega t + \theta) \\ -\sin(\nu\Omega t + \theta) & -\cos(\nu\Omega t + \theta) \end{bmatrix} \Psi_\nu(0)f_\nu \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

が得られる⁽⁵⁾. ここに, f_ν は摂動項, $\Psi_\nu(0) = (\Psi_\nu^*, \Phi_\nu)^{-1}\Psi_\nu^*(0)$ であり, Φ_ν, Ψ_ν^* はそれぞれ空間 P とその随伴空間 P^* の基底を表す 2×2 行列

$$\begin{cases} \Phi_\nu(s) = \begin{bmatrix} \cos \nu\Omega s & \sin \nu\Omega s \\ -\nu\Omega \sin \nu\Omega s & \nu\Omega \cos \nu\Omega s \end{bmatrix}, \\ (-h \leq s \leq 0) \\ \Psi_\nu^*(s) = \begin{bmatrix} \cos \nu\Omega s & -\nu\Omega \sin \nu\Omega s \\ \sin \nu\Omega s & \nu\Omega \cos \nu\Omega s \end{bmatrix}, (0 \leq s \leq h) \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

である. また以下の計算では, 便宜上 $\Psi_\nu(0)$ の行列式を Δ_ν と表記することにする.

以上, 差分微分方程式[式(1)]の支配的な解挙動を記述する常微分方程式[式(7)]が得られた. この常微分方程式を平均化することが, 関数微分方程式に対する平均法^{(1)~(3)}である.

3.2 無摂動系 まず式(1)の線形化方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) - \gamma y(t) \\ + (\gamma - \alpha)(1 - \varepsilon)y(t-h) = P \cos \Omega t \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる. ここに, 式(9)の基本調波振動の定常解 $E \cos \Omega t$ の振幅 E は次式となる⁽¹⁾.

$$E^2 = \frac{P^2}{(\gamma - \alpha)^2((1 + A(\Omega))^2 + B(\Omega)^2)} \dots\dots\dots (10)$$

ここで, 式(9)の逆ベクトル軌跡を求める. この線形

化方程式の右辺を零と置いて得られる線形斉次方程式

$$\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) - \gamma y(t) + (\gamma - \alpha)(1 - \varepsilon)y(t - h) = 0 \quad (11)$$

のラプラス変換より、線形要素は、

$$G(s) = \frac{(\gamma - \alpha)e^{-sh}}{s^2 + cs - \gamma} \quad (12)$$

となり、これから逆ベクトル軌跡は、 j を虚数単位として、次式となる。

$$\begin{cases} (G(js))^{-1} = A(s) + jB(s) \\ A(s) = -(\gamma - \alpha)^{-1}\{(s^2 + \gamma)\cos sh + cs \sin sh\} \\ B(s) = -(\gamma - \alpha)^{-1}\{(s^2 + \gamma)\sin sh - cs \cos sh\} \end{cases} \quad (13)$$

ここで無摂動系は、純虚数の特性根をもち、さらに純虚数以外の特性根は全て負の実部をもつように選ぶのが適当である⁽¹⁾。この条件を満たすものとして次式の無摂動系 A_ν :

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) - \gamma y(t) + (\gamma - \alpha)(1 - \varepsilon)y(t - h) \\ - \mu \frac{\gamma - \alpha}{\nu \Omega} \dot{y}(t - h) = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

を用いる。ただし、ここでは式(13)の結果を利用し、微小パラメータ $\varepsilon_\nu > 0$, $\mu_\nu \ll 1$ を $\varepsilon_\nu = 1 + A(\nu\Omega)$, $\mu_\nu = B(\nu\Omega)$ として導入した。式(14)をベクトル表示すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & -c \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ + (\gamma - \alpha) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_\nu - 1 & \mu_\nu/(\nu\Omega) \end{bmatrix} \mathbf{y}(t - h) \end{aligned} \quad (15)$$

ここに $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$ である。この式(15)に対する内積は、式(5)より

$$\begin{aligned} (\phi, \phi)_\nu = \phi(0)\phi(0) \\ - (\gamma - \alpha) \int_0^{-h} \phi(\xi + h) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_\nu - 1 & \mu_\nu/(\nu\Omega) \end{bmatrix} \\ \times \phi(\xi) d\xi \quad (16) \end{aligned}$$

となる。

3.3 1/2 次分数調波振動 着目する調波の周波数は $\Omega/2$ ($\nu=1/2$, 以下の添字では $1/2$ と表記) である。式(1)の解を、式(10)で定義される E を用いて、

$$\begin{cases} y(t) = E \cos \Omega t + x(t) \\ x(t) = R_{1/2}(t) \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta(t)\right) \end{cases} \quad (17)$$

と仮定する。このとき、外力の調波成分と $1/2$ 次分数調波成分は非共振であり、 $R_{1/2}(t)$, $\theta(t)$ は t に関してゆっくり変化する関数であるとする。式(1)に式(17)を代入すると次式を得る。

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) - \gamma y(t) + (\gamma - \alpha)y(t - h) \\ + \beta(E \cos \Omega t + y(t - h))^3 \\ + Qy(t) \cos \Omega t + O = 0 \\ O = E(-\Omega^2 - \alpha - P) \cos \Omega t - c\Omega E \sin \Omega t \\ + \frac{QE}{2}(1 + \cos 2\Omega t) \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 O の項は平均化の際に消去されるので、以下の計算では表記を省略する。

この式(18)に対して、基本調波振動の場合と同様の計算を行う。まず摂動項 $\mathbf{f}_{1/2}$ は、式(1)と無摂動系 $A_{1/2}$ [式(14)] との差、および極座標変換 $T_{1/2}$ [式(6)] より次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1/2} = -\left\{ (\gamma - \alpha)(\varepsilon_{1/2} R_{1/2} \cos \delta - \mu_{1/2} R_{1/2} \sin \delta) \right. \\ \left. + \beta(R_{1/2} \cos \delta + E \cos(2\delta + \rho))^3 \right. \\ \left. + QR_{1/2} \cos(2\delta + \rho) \cos\left(\delta + \frac{\Omega}{2}h\right) \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

ただし $\delta = \frac{\Omega}{2}t + \theta(t) - \frac{\Omega}{2}h$, $\Omega t = 2\delta + \rho$, $\rho = \Omega h - 2\theta$ とおいた。

次に式(19)を定数変化公式 $X_{1/2}$ [式(7)] に代入し、これを δ に関して区間 $[0, 2\pi]$ で平均化すると、次式の平均化方程式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{R}_{1/2} \\ R_{1/2} \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ = \frac{R_{1/2}}{4A_{1/2}} \left\{ \varepsilon_{1/2}(\gamma - \alpha) + \frac{3}{4}\beta(R_{1/2}^2 + 2E^2) \right\} \begin{bmatrix} M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{bmatrix} \\ + \mu_{1/2}(\gamma - \alpha) \begin{bmatrix} -N_{1/2} \\ M_{1/2} \end{bmatrix} \\ + \frac{Q}{2} \begin{bmatrix} -K_{1/2} \cos 2\theta + L_{1/2} \sin 2\theta \\ K_{1/2} \sin 2\theta + L_{1/2} \cos 2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、ここでは式の整理のために

$$\begin{cases} K_\nu = -\nu\Omega(\gamma - \alpha)\{(1 - \varepsilon_\nu)(\nu\Omega h \cos \nu\Omega h \\ - \sin \nu\Omega h) - \mu_\nu \nu\Omega h \sin \nu\Omega h\} \\ L_\nu = 2\nu\Omega + \nu\Omega(\gamma - \alpha)\{(1 - \varepsilon_\nu)(\nu\Omega h \sin \nu\Omega h) \\ + \mu_\nu(\nu\Omega h \cos \nu\Omega h - \sin \nu\Omega h)\} \\ M_\nu = -K \cos \nu\Omega h + L \sin \nu\Omega h \\ N_\nu = K \sin \nu\Omega h + L \cos \nu\Omega h \end{cases} \quad (21)$$

なる変数を導入した。式(20)において $\dot{R} = \dot{\theta} = 0$ とすると、定常状態は次の2式のいずれかとなる。

$$\begin{cases} R_{1/2}=0 \\ \frac{P^2}{4} = \left\{ \varepsilon_{1/2}(\gamma - \alpha) + \frac{3}{4}\beta(R_{1/2}^2 + 2E^2) \right\}^2 \cdots \cdots (22) \\ + (\gamma - \alpha)^2 \mu_{1/2}^2 \end{cases}$$

また、式(20)の平均化方程式に対応する第1変分方程式に、Routh-Hurwitzの安定判別法を用いると、次の二つの安定条件式を得る。

$$\frac{1}{2\Delta_{1/2}} \left[\left\{ \varepsilon_{1/2}(\gamma - \alpha) + \frac{3}{2}\beta(R_{1/2}^2 + 2E^2) \right\} M_{1/2} - \mu_{1/2}(\gamma - \alpha) N_{1/2} \right] < 0 \cdots \cdots (23)$$

$$\varepsilon_{1/2}(\gamma - \alpha) + \frac{3}{4}\beta(R_{1/2}^2 + 2E^2) > 0 \cdots \cdots (24)$$

4. 数 値 例

4・1 系の挙動 まず、系の挙動を式(1)を直接に数値積分することによって見てみる(以下、直接数値解)。ここでは、ノルム

$$|Y| = \sup \sqrt{y(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \cdots \cdots (25)$$

を導入し、周期外乱の周波数 Ω に対する $|Y|$ の変化を見る。以下の数値積分には、積分ステップ $(2\pi/\Omega)/512$ のRKG法を用い、時間遅れを含む変数 $y(t-h)$, $\dot{y}(t-h)$ の値は、各積分ステップにおいて得られた $y(t)$, $\dot{y}(t)$ の値の系列から3次のスプライン複間により求めた。すなわち、積分ステップ T の整数倍が時間遅れ h に一致しない場合、 N を $NT \geq h$ を満足する最小の整数、 t_i を現在の離散時刻とし、現在

Fig. 1 Amplitude of direct numerical solution ($h=0.08$)

Fig. 2 Amplitude of direct numerical solution ($h=0.14$)

の数値解を $x(t_i)$ とした場合、これと過去の N 個の数値解によって構成される系列 $\{x(t_{i-N}), x(t_{i-N+1}), \dots, x(t_i)\}$ を通過する3次のスプライン曲線から、 $x(t_i - h)$ の値を補間した。また、初期関数は、 t_0 を初期時刻とした場合に $y(t_n) = \dot{y}(t_n) = 0$ ($n=0, -1, \dots, -N$) とした。

以下の計算例では、 h と Ω 以外のパラメータを、 $c=0.5$, $\alpha=-1$, $\beta=0.3$, $\gamma=P=Q=1$ に固定した場合を考える。また、時間遅れ h に関しては、直接数値解に履歴型跳躍現象および解の発散が現われる条件として $h=0.08, 0.14$ の場合を考える。

図1に、時間遅れ $h=0.08$ の場合の Ω と $|Y|$ との関係を示す。図1中実線は Ω を0.2から3.0まで増加させた場合の応答を、破線は Ω を3.0から0.2まで減少させた場合の応答を表す。なお $|Y|$ の値は、各々の Ω に対する100周期(過渡は除く)のデータ点から算出した。この条件では、 $\Omega=1.4$ 付近と2.5付近の2箇所、履歴型の跳躍現象が現れている。さらに、それ以外の特徴として、 $\Omega=0.6$ 付近にピークが確認できる。

同条件で $h=0.14$ へと時間遅れを増加させた場合の結果を図2に示す。時間遅れ h の増大に伴い、 $\Omega=1.4$ 付近の履歴型の跳躍点が解の発散によって消失し、 $\Omega=2.5$ 付近の跳躍現象から顕著な履歴特性が失なわ

Fig. 3 Response curves of direct numerical solution ($h=0.08$, $\Omega=0.2 \rightarrow 3.0$)

Fig. 4 Response curves of direct numerical solution ($h=0.14$, $\Omega=0.2 \rightarrow 3.0$)

れている。また $\Omega=0.6$ 付近のピークは、跳躍を伴う高く鋭いものへと変化している。

次に、式(1)の直接数値解のパワースペクトルから求めた、基本調波の振幅 $S_{1/1}(\Omega)$ 、二次高調波の振幅 $S_{2/1}(\Omega)$ 、 $1/2$ 次分数調波の振幅 $S_{1/2}(\Omega)$ を図3および4に示す。 Ω の掃引の方向が $0.2 \rightarrow 3.0$ の場合のみを示している。 $S_i(\Omega) (i=1/1, 2/1, 1/2)$ のおのおのは、周期外乱の周波数 $\Omega=\Omega$ の条件で求めた直接数値解のパワースペクトルから、基本調波、二次高調波、 $1/2$ 次分数調波のおおのに該当する成分を抜き出し、これらの平方根をとったものである。パワースペクトルの推定には、データ長 2^{11} のFFTを用いた。本報の条件では、 Ω の掃引の方向によらず、この三者以外の調波は現れなかった。

図3および4から明らかなように、この系では、 $\Omega \approx 1.4$ 付近に存在する一次共振周波数より、励振周波数が低い領域で二次高調波振動、高い領域で $1/2$ 次分数調波振動が発生している。この中で、基本調波と 2 次高調波振動に関しては前報⁽⁷⁾ においてすでに考察済みなので、本報では、 $1/2$ 次分数調波振動に関する考察を行う。

4・2 $h=0.08$ の場合 図5に、定常状態[式(22)]の解として得られた応答曲線 $R_{1/2}(\Omega)$ と、直接数値解のパワースペクトルの平方根として得た応答曲線 $S_{1/2}(\Omega)$ を示す。図5中の実線および破線は式(23)と(24)の安定判別により決定された安定解および不安定解である。また図5中の×印および○印は Ω の掃引方向が $0.2 \rightarrow 3.0$ の場合、および $0.2 \leftarrow 3.0$ の場合の直接数値解の振幅 $S_{1/2}(\Omega)$ である。

図5は互いに交わらない安定曲線と不安定曲線をもっている。これらの安定曲線および不安定曲線はそれぞれ $\Omega < 1.68$ および 2.30 において零値をとり、 $\Omega \approx 1.68$ および 2.30 において非零の振幅を立ち上げ始め、その後、 $\Omega=3$ に至るまで振幅を単調に増加させている。

Fig. 5 Response curve of averaging method and direct numerical solution (subharmonics of $1/2$ order, $h=0.08$)

この応答曲線によれば、系の挙動は Ω の掃引の方向によらず、安定曲線に沿う振幅を有したものになることが予想される。ところが、この予想に反して、図5の×および○印として示した直接数値解の挙動には、履歴形の跳躍現象が現われている。したがって、本平均法の計算結果は、直接数値解の挙動と定性的に一致していない。しかしながら、応答曲線と直接数値解の挙動の間には、明らかな相関があると思われるので、以下この点を考察する。

まず振幅に関して、安定曲線の振幅の立ち上がり点 $\Omega \approx 1.68$ に着目すると、直接数値解における振幅の立ち上がり点 $\Omega \approx 1.74$ は、 Ω の掃引の方向によらず、これに近い点で生じている。直接数値解はこの点以後、単調増加の区間をもっており、特に区間 $[2.33, 2.58]$ において×印で示す直接数値解の振幅は安定曲線の振幅とよく一致する。また、直接数値解の振幅が応答曲線による予測を超える点は生じていない。以上から、応答曲線による予測を大きく逸脱するような直接数値解は生じていないことがわかる。したがって、振幅に関しては、本平均法は妥当な計算結果を与えているといえる。

次に、履歴形の跳躍現象に関してであるが、直接数値解には、 Ω の掃引の方向によって、 $\Omega \approx 2.33$ における上向きの跳躍点(図中○)と $\Omega \approx 2.58$ における下向きの跳躍点(図中×)が現れている。ここで、前者に関しては不安定曲線によってある程度説明可能であり、後者に関しては現時点では説明不可能であると思われる。以下に詳細を述べる。

まず、 $\Omega \approx 2.33$ における上向きの跳躍点に関して、不安定曲線の立ち上がり点 $\Omega \approx 2.30$ に着目してみる。この立ち上がり点の位置 $\Omega \approx 2.30$ は、 Ω の掃引方向が $0.2 \leftarrow 3.0$ の場合の直接数値解の跳躍点 $\Omega \approx 2.33$ とよく一致している。したがって、直接数値解に現れたこの $1/2$ 分数調波振動の跳躍現象は、基本調波振動に引き込まれていた $1/2$ 分数調波振動の不安定解が、

Fig. 6 Response curve of averaging method and direct numerical solution (subharmonics of $1/2$ order, $h=0.14$)

自らの振幅が零になった時点で基本調波振動への引き込みから脱出して、自らの対である安定軌道に跳躍したものと解釈できる。

一方で、 Ω の掃引方向が $0.2 \rightarrow 3.0$ の場合の直接数値解の跳躍点 $\Omega \approx 2.58$ は、この時点で、安定な $1/2$ 次分数調波振動が安定な基本調波振動に引き込まれたためと考えられるが、この跳躍点の位置を図 5 の応答曲線のみから特定することはできない。したがって、この結果は本平均法の限界を示す一例である。

4.3 $h=0.14$ の場合 図 6 に、定常状態 [式 (22)] の解として得られた応答曲線 $R_{1/2}(\Omega)$ と、直接数値解のパワースペクトルの平方根として得た応答曲線 $S_{1/2}(\Omega)$ を示す。図 6 中の実線および破線は式 (23) と (24) による安定判別により決定された安定解および不安定解である。また図 6 中の $\times$ 印および $\circ$ 印は Ω の掃引方向が $0.2 \rightarrow 3.0$ の場合、および $0.2 \leftarrow 3.0$ の場合の直接数値解の振幅 $S_{1/2}(\Omega)$ である。

$h=0.08$ の場合と同様、応答曲線は互いに交わらない 2 本の曲線から構成されている。これらの曲線はそれぞれ $\Omega \approx 1.63$ および 2.38 を境に、その左で零値をとり、その右に単調増加の区間をもっている。下側の曲線は図の範囲で全域不安定、上側の曲線は $\Omega \approx 2.26$ 境界に、その左で安定、右で不安定となっている。

この応答曲線によれば、安定な挙動が生じるのは Ω の掃引の方向によらず Ω の区間 $[1.63, 2.26]$ の内部である。また、この区間内では、挙動の振幅は単調増加の性質をもつことが予想される。

以上を踏まえて、直接数値解の挙動(図 6 中 $\times$ および $\circ$)を見てみる。まず、 Ω の掃引方向によらず、それ以下の Ω で零であった振幅が $\Omega \approx 1.70$ 付近で非零となり、その後一定の区間で単調増加となる。単調増加の区間を厳密に判定すると、 Ω の掃引方向が $0.2 \rightarrow 3.0$ の場合(図 6 中 $\times$)に $[1.70, 2.08]$ 、 $0.2 \leftarrow 3.0$ の場合(図 6 中 $\circ$)に $[1.70, 2.19]$ である。この単調増加の区間は、 Ω の掃引方向により変化し、そのどちらも応答曲線による予測と十分に一致していない。しかしながら、より大域的な視点で、小さな振幅の増減を無視すれば、両者ともおおむね $[1.70, 2.25]$ の区間で増加の傾向をもっており、その振幅特性も本平均法の計算結果とほぼ一致する。また、直接数値解の振幅が応答曲線による予測を超える点は生じていない。以上から、応答曲線による予測を大きく逸脱するような直接数値解は生じていないことがわかる。したがって、この区間に関しては、本平均法が実用上十分妥当な計算結果を与えていると考えられる。

興味深いのは単調増加の区間の右側における挙動

で、直接数値解の振幅が零になる点 $\Omega \approx 2.38$ は、下側の不安定曲線が零になる点 $\Omega \approx 2.38$ とよく一致している。これは、 $h=0.08$ の場合に生じた跳躍現象と同様に、下側の応答曲線に対応する不安定な $1/2$ 次分数調波振動が、安定な基本調波振動に引き込まれたためではないかと考えられる。

5. 結 言

時間遅れを含む非対称構造形非線形係数励振系として、滑り軸受で支持された非対称軸剛性を有する 1 自由度のロータ系⁽⁶⁾を取上げ、その $1/2$ 次分数調波振動の解析に、関数微分方程式に対する平均法⁽¹⁾⁻⁽³⁾を適用した。この平均法による解析結果と対象系の直接数値解との比較を行い、以下の結果を得た。

まず、この系の $1/2$ 次分数調波の振幅が、ある零点を堺に Ω に関して単調増加の特性をもつことが、直接数値解の挙動によって明らかになったが、本平均法による計算結果はこの性質をよく再現した。また、興味深い結果として、下側の応答曲線に対応する不安定な $1/2$ 次分数調波が、安定な基本調波に引き込まれる現象を暗示する結果を得た。

以上の結果から、以前から解析が難しいとされてきた、時間遅れを含む非線形振動系の動的挙動の解析に向けて、本平均法が一つの有効手段となり得る可能性を示すことができた。

しかしながら、その一方で、本平均法による応答曲線のみからは予測不可能な跳躍現象の存在も明らかになり、現時点では、このような挙動を扱うための手法は未知である。早急な解決が望まれるが、これは今後の課題である。

また、不安定な $1/2$ 次分数調波が、安定な基本調波に引き込まれる現象について、この解釈の妥当性を理論的および実験的に検証することも、今後の重要な課題である。

文 献

- (1) 井上嘉明, 平均法によるむだ時間を含む非線形系の解析(平均法による自励振動の解析), 信学技報, NLP 78-19(1978), 29-38.
- (2) 井上嘉明, 平均法によるむだ時間を含む非線形系の解析(続報), 信学技報, NLP 78-27(1978), 17-28.
- (3) 井上嘉明・上田皖亮, 平均法によるむだ時間を含む自励振動系の解析, 信学論, J 64-A, 3(1981), 243-250.
- (4) 佐藤啓仁・ほか 3 名, 時間遅れを含む非線形振動系の動的挙動(平均法による自励振動の解析), 機論, 61-585, C(1995), 1855-1860.
- (5) 佐藤啓仁・ほか 3 名, 時間遅れを含む非線形振動系の動的挙動(平均法による強制振動の解析—基本調波振動—), 機論, 61-585, C(1995), 1861-1866.

- (6) Plaut, R. H. and Hsieh, J. C., Chaos in a Mechanism with Time Delay under Parametric and External Excitation. *J. Sound Vib.*, **114**-1, (1987), 73-90.
- (7) 吉田勝俊・ほか3名, 時間遅れを含む非対称構造型非線形係数励振系の動的挙動(平均法による基本調波および2次高調波振動の解析), 機論, 投稿中.
-