回転円板の非線形強制振動*

(回転に同期した外力による共振)

鳥居孝夫^{*1}, 安田仁彦^{*2}, 牧田真治^{*3}

Nonlinear Forced Oscillations of a Rotating Disk (Primary Resonance Produced by a Force Synchronous with Disk Rotation)

Takao TORII, Kimihiko YASUDA and Shinji MAKITA

Nonlinear oscillation of a rotating disk excited by a force synchronous with disk rotation is considered. For theoretical analysis, modal equations are derived from the governing partial differential equations. Then, based on these modal equations, the characteristics of the oscillation are investigated. Numerical calculation is conducted for a typical case in which the rotating speed approaches the primary resonance point of the backward traveling wave mode. It is shown that near this point the forward traveling wave mode oscillation occurs in addition to the backward traveling wave mode oscillation. Experimental analysis is also conducted, which confirms the validity of the theoretical analysis.

Key Words: Vibration of Continuous System, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Rotating Disk, Combination Tone, Traveling Wave

1. ま え が き

回転円板は、磁気ディスク、タービン翼車、丸のこ盤など多くの機械・機器の基本構成要素として広く用いられている。これらの機械において回転円板は空間に固定された点で拘束力あるいは外力を受けて振動を起こすことがしばしばある。このような回転円板の振動の問題は多くの研究者^{(1)~(14)}によって取上げられてきたが、非線形強制振動の問題を扱ったものは少ない。

著者らは、前報⁽¹⁵⁾において空間に固定された点で外力を受ける回転円板の非線形強制振動の問題を取上げ、前回りおよび後ろ回りの波動モードの共振点において前回りと後ろ回りの波動が連成した振動が発生することを見出した。そしてこれらの振動は調和外力と円板の回転に同期した力による結合調波振動であることを明らかにした。著者らはこれ以外にも、調和外力と回転に同期した力に起因するさまざまな振動の発

生⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾を確認した。

本論文では、回転に同期した力の場合でも、円板の回転数と固有振動数が一致した場合に、前回りと後ろ回りの波動が連成した振動が発生することを見出したので、ここに報告する。

理論解析のために、回転円板の運動を支配するKármán形の運動方程式にガラキン法を適用してモード方程式を導く。求めたモード方程式を用いて今の問題を解析する。最後に、鋼製の円板を用いて実験を行い、理論解析の妥当性を検討する。

2. 基 礎 方 程 式

2.1 運動方程式 中央部で固定された円板が一定の速度で回転している場合を考える。前報⁽¹⁵⁾と同じ無次元量を導入すると、Kármán形の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^4 w - \omega^2 L(w) - N(w, H) &= q \\ \nabla^4 H &= -\frac{1}{2} N(w, w) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

である。ただし

$$L(w) = \frac{1}{8r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left\{ -(3+\nu)r^3 + c_1 r + \frac{c_2}{r} \right\} \frac{\partial w}{\partial r} \right]$$

* 1996年8月9日 D&D'96において講演、原稿受付 1998年1月21日。

*¹ 正員、静岡大学工学部(〒432-8561 浜松市城北3-5-1)。

*² 正員、名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8601 名古屋市千種区不老町)。

*³ (株)デンソー(〒448-8661 刈谷市昭和町1-1)。

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8} \left\{ -(1+3\nu) + \frac{c_1}{r^2} - \frac{c_2}{r^4} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\
 c_1 &= \frac{(1+\nu)(3+\nu) + (1-\nu)^2 \kappa^4}{(1+\nu) + (1-\nu)\kappa^2} \\
 c_2 &= \frac{(1-\nu)(3+\nu)\kappa^2 - (1-\nu^2)\kappa^4}{(1+\nu) + (1-\nu)\kappa^2} \\
 N(w, H) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \right) \\
 & + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 & - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned}$$

である。ここで ω は円板の回転角速度、 w は板の中央面のたわみ、 H は板の大変形による面内応力を定める応力関数、 q は板に垂直に作用する外力である。また、 c は減衰係数、 ν はポアソン比、 κ は円板の内半径と外半径の比である。

回転円板は前報と同じく内周 ($r=\kappa$) で固定され、外周 ($r=1$) で自由であるとする。このときの境界条件は、 $r=\kappa$ で

$$\left. \begin{aligned}
 w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 H}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial H}{\partial r} \\
 &+ \frac{2+\nu}{r^2} \frac{\partial^3 H}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3+\nu}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$r=1$ で

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

である。

2・2 モード方程式の導出 モード方程式の導出も前報と同じである。式(1)の未知量 w を、対応する線形系のモード関数 $\Phi_{mn}(r)$ の重ね合せで与えられるものとし、

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(r) \Phi_{mn}(r) e^{im\theta} \dots (4)$$

の形におく。ただし、 $\Phi_{-mn} = \Phi_{mn}$ であり、 Φ_{mn} は円周方向波数が m で $(n-1)$ 個の節円をもつ (m, n) 次の振動モードの半径方向のモード形である。式(1)のもう一つの未知量 H は、方程式

$$\nabla^4 H = \mu^4 H \dots\dots\dots (5)$$

を、境界条件(2)、(3)のうち H に関する条件を用いて得られる固有値問題の固有関数 $\Psi_{mn}(r)$ を用いて、

$$H(r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \Psi_{mn}(r) e^{2im\theta} \dots (6)$$

の形におく。なお Φ_{mn} および Ψ_{mn} は条件

$$\int_{\kappa}^1 r \Phi_{mn}^2 dr = 1, \quad \int_{\kappa}^1 r \Psi_{mn}^2 dr = 1 \dots\dots\dots (7)$$

によって正規化しておく。

式(4)、(6)を式(1)に代入してガラーキン法を適用し、得られた式から Y_{mn} を消去すると、最終的にモード方程式

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_{mn} + c \dot{X}_{mn} + p_{mn}^2 X_{mn} \\
 + \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} \sum_{i',j',k'=1}^{\infty} \varepsilon_{mnii'jj'kk'} X_{ii'} X_{jj'} X_{kk'} = Q_{mn}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

を得る。ただし

$$Q_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\kappa}^1 r q(r, \theta, t) \Phi_{mn} e^{-im\theta} dr d\theta$$

である。式(8)中の p_{mn} は (m, n) 次の振動モードの固有振動数であり、 $\varepsilon_{mnii'jj'kk'}$ はガラーキン法の結果から得られる非線形項の係数である。

3. 回転に同期した力による共振

3・1 ハーモニクバランス法による解析 円板が回転する場合、偏心や傾きのために円板の回転に同期した力を受ける。ここではこの場合の強制振動を調べる。式(8)の外力項を

$$Q_{mn} = \sum_{k=-2}^2 \frac{1}{2} Q_k e^{i(k+m)\omega t} \dots\dots\dots (9)$$

とおく。ここで Q_k は静止座標系から見たときの振動数が $k\omega$ となる外力の成分の大きさである ($k>0$ のものは後ろ回りの波動モードの形で作用する成分、 $k<0$ のものは前回りの波動モードの形で作用する成分となる)。これまでの研究⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾ から $k=-2\sim 2$ とした。

回転円板の振動を静止座標系から観測する場合、回転によるドップラー効果によって (m, n) 次の振動モードは、固有振動数 $p_f = p_{mn} + m\omega$ の前回りの波動、固有振動数 $p_b = p_{mn} - m\omega$ の後ろ回りの波動として観測される⁽¹³⁾。

式(9)で示されるような回転に同期した外力が円板に作用すると、円板の回転数が後ろ回りの固有振動数に近づく

$$\omega \doteq p_b (= p_{mn} - m\omega) \dots\dots\dots (10)$$

となるときに後ろ回りの波動モードが共振を起こす。このとき同時に

$$\omega \doteq p_f - 2m\omega \dots\dots\dots (11)$$

という関係にもなり、前報^{(15)~(17)} と同様の、一種の結合調波振動が発生することが予想される。

ここでは円板の回転数 ω が $(1, 1)$ 次の後ろ回りの波

動モードの固有振動数 $p_{11}-\omega$ に近づく場合を考える。
この場合系の挙動は(1,1)次の前回りと後ろ回りの波
動モードによってほぼ支配され、他のモードは無視で
きるものとする、式(8)は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_1 + c\dot{X}_1 + p^2 X_1 + \varepsilon X_1^2 X_{-1} &= \sum_{k=-2}^2 \frac{1}{2} Q_k e^{i(k+1)\omega t} \\ \ddot{X}_{-1} + c\dot{X}_{-1} + p^2 X_{-1} + \varepsilon X_{-1}^2 X_1 &= \sum_{k=-2}^2 \frac{1}{2} Q_k e^{-i(k+1)\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

のように書き直すことができる。ただし

$$X_1 = X_{11}, \quad X_{-1} = X_{-11}, \quad p = p_{mn}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{11, -11, 11, 11} + \varepsilon_{11, 11, -11, 11} + \varepsilon_{11, 11, 11, -11}$$

である。

式(12)の解を

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} (R e^{i(2\omega t - \gamma)} + S e^{-i(2\omega t - \delta)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (D_{-2} e^{-i\omega t} + D_{-1} + D_0 e^{i\omega t} + D_2 e^{3i\omega t}) \\ X_{-1} &= \frac{1}{2} (R e^{-i(2\omega t - \gamma)} + S e^{i(2\omega t - \delta)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (D_{-2} e^{i\omega t} + D_{-1} + D_0 e^{-i\omega t} + D_2 e^{-3i\omega t}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

とおく。ただし

$$D_k = \frac{Q_k}{p^2 - (k+1)^2 \omega^2}$$

である。式(13)を式(12)に代入してハーモニクバラン
ス法を適用し、得られた式を虚部と実部に分離すれば

$$\left. \begin{aligned} 2\omega \dot{R} &= -c\omega R - \frac{1}{4} \varepsilon D_0 D_2 R \sin 2\gamma \\ &\quad - \frac{1}{8} \varepsilon V_1 S \sin(\gamma - \delta) - \frac{1}{8} \varepsilon V_2 S \sin(\gamma + \delta) \\ &\quad - \frac{1}{8} \varepsilon W_1 \sin \gamma + \frac{1}{2} Q_1 \sin \gamma \\ 2\omega R \dot{\gamma} &= -\frac{1}{2} (p^2 - 4\omega^2) R - \frac{1}{8} \varepsilon (R^2 + 2S^2 + 2V_0) R \\ &\quad - \frac{1}{4} \varepsilon D_0 D_2 R \cos 2\gamma - \frac{1}{8} \varepsilon V_1 S \cos(\gamma - \delta) \\ &\quad - \frac{1}{8} \varepsilon V_2 S \cos(\gamma + \delta) - \frac{1}{8} \varepsilon W_1 \cos \gamma + \frac{1}{2} Q_1 \cos \gamma \\ 2\omega \dot{S} &= -c\omega S - \frac{1}{8} \varepsilon V_1 R \sin(\delta - \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{8} \varepsilon V_2 R \sin(\delta + \gamma) - \frac{1}{8} \varepsilon W_2 \sin \delta \\ 2\omega S \dot{\delta} &= -\frac{1}{2} (p^2 - 4\omega^2) S - \frac{1}{8} \varepsilon (S^2 + 2R^2 + 2V_0) S \\ &\quad - \frac{1}{8} \varepsilon V_1 R \cos(\delta - \gamma) - \frac{1}{8} \varepsilon V_2 R \cos(\delta + \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{8} \varepsilon W_2 \cos \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

を得る。ただし

$$V_0 = D_{-2}^2 + D_{-1}^2 + D_0^2 + D_2^2$$

$$V_1 = D_{-1}^2 + 2D_0 D_{-2}, \quad V_2 = 2D_2 D_{-2}$$

$$W_1 = D_{-1}(D_0^2 + 2D_0 D_2 + 2D_0 D_{-2} + 2D_2 D_{-2})$$

$$W_2 = D_{-1}(2D_0 D_2 + 2D_0 D_{-2} + D_{-2}^2)$$

である。

式(14)の定常解を得るために、時間の微分項を零と
おいて得られる連立方程式を解く。その解を式(13)、
(4)に順次代入すれば、円板のたわみが

$$\begin{aligned} w &= \Phi_{11} \{ R \cos(2\omega t + \theta - \gamma) + S \cos(2\omega t - \theta - \delta) \\ &\quad + D_{-2} \cos(\omega t - \theta) + D_{-1} \cos \theta \\ &\quad + D_0 \cos(\omega t + \theta) + D_2 \cos(3\omega t + \theta) \} \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

の形で得られる。式(15)は円板とともに回転する回転
座標系 (r, θ) から見たたわみを表している。そこで
空間に固定した静止座標系 (r, ϕ) に変換するために

$$\phi = \theta + \omega t \dots\dots\dots (16)$$

として、式(16)を式(15)に代入すれば、静止座標系か
ら見たたわみが

$$\begin{aligned} w &= \Phi_{11} \{ R \cos(\omega t + \phi - \gamma) + S \cos(3\omega t - \phi - \delta) \\ &\quad + D_{-2} \cos(2\omega t - \phi) + D_{-1} \cos(\omega t - \phi) \\ &\quad + D_0 \cos \phi + D_2 \cos(2\omega t + \phi) \} \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

のように得られる。式(17)から、 R は振動数 ω の後
ろ回りの波動、 S は振動数 3ω の前回りの波動の振幅
であることがわかる。

この振動は、後ろ回りのモードの固有振動数 p_b と
前回りのモードの固有振動数 p_f の比が1:3であり、
発生する振動数も ω と 3ω であるので、内部共振によ
る多モード共振のように見えるが、そうではない。 p_b
と p_f は、回転する円板を静止座標系から見たときの
見かけの固有振動数であり、回転座標系から見た固有
振動数にはそのような関係はない。また、回転に同期
した力の成分うちの直接後ろ回りのモードの共振を引
き起こす成分 Q_1 だけでは後ろ回りのモードと前回り
のモードが連成した振動は発生せず、他の成分も関係
して発生していることが、式(14)からわかる。したが
って、この振動は、回転に同期した力のいくつかの成
分が関係する結合調波振動の一種であり、前報⁽¹⁵⁾で
報告した結合調波振動とほぼ同じものであると考えら
れる。

定常解の安定性は、定常解に微小な乱れを与え、そ
の乱れの時間的変化を調べることによって求められ
る。そのため、式(14)の未知量に微小な乱れを加えた
ものを代入し、得られた式において高次の微小量を省
略することによって、乱れを支配する線形の運動方程
式を求める。この方程式から乱れの安定性を調べるこ

$$c=0.01, Q_{-2}=5.0, Q_{-1}=80.0, Q_0=25.0, Q_1=0.03, Q_2=6.0$$

Fig.1 Response curves obtained theoretically

とによって、定常解の安定性を求める。

3・2 数値例 数値例によって振動の性質を検討する。共振曲線の一例を図1に示す。計算に用いたパラメータの値のうち、固有振動数および非線形項の係数は、後述の実験装置の諸元から計算した。減衰係数と外力は実験において直接測定するのが困難なので、ここでは定性的な比較を目的とし、理論と実験の共振曲線の形を比較して定めた。安定判別も行ったが、このパラメータの場合は不安定な振動は現れなかった。

図1から、円板の回転数と後ろ回りの波動モードの固有振動数が一致する $\omega \approx 2.88$ 付近では、後ろ回りの波動モードだけでなく同時に前回りの波動も連成して発生すること、振幅の大きくなるピークが少し離れて二つ存在することがわかる。

4. 実験による解析

4・1 実験方法 理論解析の結果の妥当性を確認するため、鋼製の円板を用いた実験を行った。図2に実験装置の概略を示す。半径 a 、厚さ h の円板を中央で半径 b のチャックで固定し、モータで回転させる。円板の回転に同期した力は、円板の偏心や傾きによって自然に発生するので、ここではわざわざ加えていない。

発生した振動は、円板の円周方向 90° ごとに配置した4個のセンサ S_1, S_2, S_3, S_4 で測定する。センサの信号をオペアンプで演算することによって円周方向のモードごとの成分に分離し、さらにFFTアナライザで振動数解析を行う。

なお本報で用いた円板の諸元は

$$a=225 \text{ mm}, b=48 \text{ mm}, h=1.0 \text{ mm}$$

縦弾性係数 $E=206 \text{ GPa}$

密度 $\rho=7.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

ポアソン比 $\nu=0.3$

である。

4.2 実験結果 まず準備として、円板を一定の角速度で回転させておき、円板に衝撃を与えて自由振動を発生させ、円板の固有振動数を測定した。図3に円板の(1,1)次の固有振動数と回転数の関係を示す。なお実験結果の表示にあたっては、記号を変えないで、無次元角速度および無次元角振動数のかわりに振動数を用いることにする。図3から、円板が回転することにより固有振動数は $\pm\omega$ だけずれた値となり、二つの固有振動数の間には常に 2ω の差があることがわかる。図3中の一点鎖線は $p=\omega$ となる線であり、回転数12.6 Hz付近で円板の回転数と後ろ回りの波動モ

ードの固有振動数が一致することがわかる。

次に円板の回転数を後ろ回りの波動モードの固有振動数と一致する12.6 Hzに近づけたところ、図4に示すような振動が得られた。この図の左側に示した振動波形は、円板の円周方向 90° ごとに配置したセンサから得られたものであり、右側はそれらの振動スペクトルである。この図から、この振動には外力の振動数 $[\omega]$ の成分のほかに振動数 $[3\omega]$ の成分が大きく含まれていることがわかる。図5は、図4の振動波形からそれぞれ振動数 $[\omega]$, $[3\omega]$ の成分のみを取り出したものである。図5から、測定位置 ϕ が 180° ずれた位置の波形は位相が反転しており、これらの振動は $m=1$ のモードであることがわかる。さらに、振動数 $[\omega]$ の成分の振動は ϕ が正の方向にいくほど位相が進んで

Fig. 2 Schematic diagram of experimental apparatus

Fig. 3 Natural frequency of rotating disk

Fig. 4 Time history and spectrum of the oscillation obtained experimentally

 Fig. 5 Time history of the component with frequencies ω and 3ω

Fig. 6 Response curves obtained experimentally

おり後ろ回りの波動であること、振動数 $[3\omega]$ の成分は振動は ϕ が正の方向にいくほど位相が遅れており前回りの波動であることがわかる(図5中の破線を参照)。

円板の回転数を変化させながら各振動数成分の振幅を測定したところ、図6に示すような共振曲線が得られた。図6中○印は測定した振幅を示し、実線はそれらを滑らかに結んだものである。この図から、二つの振動数成分の振幅が常に同時に大きくなること、ピークが少し離れて二つ存在することがわかる。

以上の結果は、3章までの理論解析の結果と一致しており、理論が定性的に妥当なものであることを示し

ている。

5. む す び

回転円板の非線形強制振動の問題の一つとして、回転に同期した力が作用する場合を取上げた。代表的な場合として、円板の回転数が後ろ回りの固有振動数に近づく場合を解析した。得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 円板の回転数が後ろ回りの波動モードの固有振動数に近づくとき、後ろ回りの波動モードだけでなく、前回りの波動モードも同時に大きくなる。

(2) この振動は、回転に同期した力のいくつかの

成分が関係する結合調波振動の一種と考えられる。

(3) この振動が発生する場合、この共振点付近の共振曲線にピークが少し離れて二つ現れる。

最後に、鋼製の円板を用いて実験を行い、理論解析の結果が定性的に妥当なものであることを確認した。

文 献

- (1) Iwan, W. D. and Moeller, T. L., The Stability of a Spinning Elastic Disk with a Transverse Load System, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **43** (1976), 485-490.
- (2) Benson, R. C. and Bogy, D. B., Deflection of a Very Flexible Spinning Disk Due to a Stationary Transverse Load, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **45** (1978), 636-642.
- (3) 本田善久・松久寛・佐藤進, 空間で固定した点で拘束された回転円板の振動, *機論*, **55-516**, C (1989), 1918-1926.
- (4) 小寺忠, 回転円板の振動解析 (第1報, 外周の一点で支持された場合), *機論*, **55-516**, C (1989), 1927-1933.
- (5) 小野京右・前野隆司・海老原毅, フレキシブルディスク装置におけるヘッド・媒体インターフェースの研究(第2報, 集中力による動的変形特性), *機論*, **52-473**, C (1986), 326-335.
- (6) 小野京右・前野隆司, フレキシブルディスク装置におけるヘッド・媒体インターフェースの研究(第3報, 点接触ヘッドによって生ずる3.5インチディスクの動的変形特性), *機論*, **52-484**, C (1986), 3100-3107.
- (7) 保坂寛・西田安秀, フォイルディスクの変形解析 (定在波の解析と実験), *機論*, **52-474**, C (1986), 490-497.
- (8) 松久寛・佐藤進, 石材切断用丸のこの振動・騒音に関する研究 (第1報, 振動解析), *機論*, **51-461**, C (1985), 35-41.
- (9) 長南征二・三上哲史・石川浩, 製材用丸のこぎりの振動ならびに危険速度, *機論*, **52-478**, C (1986), 1805-1812.
- (10) Hutton, S. G., Chonan, S. and Lehman, B. F., Dynamic Response of a Guided Circular Saw, *J. Sound Vib.*, **112-3** (1987), 527-539.
- (11) 末岡淳男・吉武裕・劉孝宏・綾部隆・田村英之, 回転円板の自励振動 (第1報, 内部共振がない場合), *機論*, **53-485**, C (1987), 21-26.
- (12) 吉武裕・末岡淳男・劉孝宏・田村英之, 回転円板の自励振動 (第2報, 内部共振がある場合), *機論*, **53-486**, C (1987), 364-369.
- (13) 本田善久・松久寛・佐藤進, 空間で固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答, *機論*, **54-507**, C (1988), 2610-2617.
- (14) 佐藤満弘・山田元, 一点で調和起振された内部減衰を有する回転円板の定常応答, *機論*, **56-532**, C (1990), 3180-3184.
- (15) 鳥居孝夫・安田仁彦・豊田哲也, 空間に固定された点で加振される回転円板の非線形強制振動 (主共振点付近で発生する結合調波振動), *機論*, **60-570**, C (1994), 386.
- (16) 鳥居孝夫・安田仁彦・山田陽一, 空間に固定された点で加振される回転円板の非線形強制振動 (超和差形結合調波振動の発生), *機論*, **61-584**, C (1995), 1286.
- (17) 鳥居孝夫・安田仁彦・山田陽一, 空間に固定された点で加振される回転円板の非線形強制振動 (和差形結合調波振動の発生), *機論*, **61-590**, C (1995), 3805.