製品開発のための新しいモデル化手法*
(展開と統合)長松 昭 男^{*1}, 角 田 鎮 男^{*2}, 長 松 昌 男^{*3}A New Approach on Modeling for Product Development
(Expansion and Unification)

Akio NAGAMATSU, Sizuo SUMIDA and Masao NAGAMATSU

The machine is the organic system which consists of many parts. All parts act cooperating one another, transferring and changing the energy according to their specific rolls, and as the result of their dynamic collaborations, the machine fulfills its mission as the required performance. The authors introduced a new approach on modeling and proposed the concept of the functional model in the previous report, in order to explain these rolls of parts as the functions. It is indispensable for computer aided development of machines in actual maker companies to construct the virtual product with which connecting parts from small scale to large scale units, assembling the machine from parts to total product, exchanging parts and disassembling the machine have to be performed easily by simulation in the computer. As the means to make this possible, a method for expansion and unification of the functional model is presented in this report. This method is shaped up with three examples.

Key Words: Modeling, Computer Simulation, Dynamics of Machinery, Functional Model, Product Development, Virtual Prototype, Expansion and Unification of Model

1. まえがき

近年の製品開発は、コンピュータの発達に伴って劇的な変革を遂げつつある。製図の自動化から始まった CAD は、設計から図面を不要にし、形状と構造に関しては、部品を結合して製品全体をコンピュータ内で仮想的に形成できるようになりつつある。一方、有限要素法を始めとする解析方法の発達により、形状と構造がすでに与えられているという条件の下で、多くは部品レベルではあるが、機械の挙動や性能がシミュレーションにより検討できるようになった⁽¹⁾⁽²⁾。現在これら両者は一体化され、コンピュータ援用設計の先端的ツールとして多くの企業で利用されようとしている。

それにもかかわらず、企業における製品開発のやり方自体はコンピュータが発達する前とあまり変わらず、依然として勘と経験に頼った試行錯誤の反復が基本になっている所が多い。これは、現段階ではまだコンピュータを製品開発に活用し切れていないことを意味する。すなわち、機械の形状と構造の設計に対するコンピュータ援用だけが発達し、製品開発の目的である機能の創成のため

のコンピュータ援用があまり進んでいないのが現状である。その主要な原因の一つにモデル化⁽³⁾があると考えられる。従来のモデル化技術は、形状と構造の表現に偏っていて、製品の機能を直接表現できるモデル化の技術と方法があまりなかったためである。

著者らは、この問題を解決するために、モデル化に関する研究を行ってきた⁽⁴⁾。すなわち、製品開発に必要なモデル化のあり方を明確にし、それを実現する可能性を有する新しいモデル化手法を提唱し、それを具体化する機能モデルを提案した。

さて、機械は一般に多くの部品からなる有機体と考えることができる。そして各部品は、個々が担当する部分的な役割に従って互いにエネルギーの変換と授受を行いながら協調して機能し合い、それらが動的に調和融合して機械全体としての目的や使命を要求性能通りに果たす。

このような機械製品を開発するために用いるモデル化のあり方やそれに必要な条件は、前報⁽⁴⁾において詳細に説明した。その主要項目の一つとして、水平展開と垂直統合ができること、という事項を述べた。これによれば、小規模部品から大規模部品へ、大規模部品から製品へと組み立て、および部品の入替と分解が、モデル上で実機と同じ感覚でできなければならない。そのためにモ

* 原稿受付 1998 年 1 月 8 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学(☎ 152-0033 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 正員, (株)ユーシン(☎ 736-0005 広島県安芸郡海田町畝 1)。^{*3} 正員, 北海道工業大学(☎ 006-0817 札幌市手稲区前田 7 条 15)。

デルは、部品の独立性と機能の連続性の両方を共存させながら、結合による水平展開ができ、かつ同水準のモデルを統合することにより上位モデルを形成する形で垂直階層化ができなければならない。

本論文では、著者らが提唱したモデル化手法⁽⁴⁾においてこの条件を実現する方法を紹介する。まず、機能モデルの概要を述べる。次に、その展開と統合の方法と手順を提示する。そして、3通りの例によって、提案した機能モデルを用いれば、コンピュータにより自動処理できる標準化された方法と手順により展開と統合が可能であることを示す。

2. 機能モデルの概要

著者らが前報⁽⁴⁾で提案した機能モデルは、製品や部品の機能を機械や電気などの分野に無関係に標準化された方法で表現するものである。その手段としては、特性、状態、エネルギー流れを視覚的に理解するためのブロック線図を基本とし、解析や処理を行うための数学モデルを付随させる。ブロック線図と数学モデルは、分野に無関係な標準化された表現方法で統一する。

機能モデルは(機能)要素から構成されており、階層構造における下位モデルは上位モデルの要素になる。機能モデルを構成する物理量は、状態量、特性および係数の3種類である。状態量は系または要素の状態を表現する量であり、流動量と位差量に分類される。流動量と位差量の積はエネルギーになる。特性は流動量と位差量に関係付ける量であり、系または要素の性質を表す。特性は、エネルギーを貯える物と消費する物に分けられる。

ブロック線図では、系または要素内部の機能構成とエネルギー流れの視覚的理解を可能にするために、図1に示すような様々な記号が用いられている。

機能モデルの理解を助けるために、簡単な例を示す。図2は、質量 M 、こわさ K 、外部減衰 C_s 、内部減衰 C_r から成る1自由度機械系の構造モデルである。この系の支持部には速度 v_1 が作用して力 f_1 を生じ、質量には加振力 f_2 が作用して速度 v_2 を生じているとする。この系の機能モデルは、図3のように表される。図3は構造から離れているために一見理解しにくいが見ると、系内部の状態や各特性の働きを図2よりも明確に表現している事が分かる。

3. 展開と統合の方法と手順

機能モデルは、最小単位の要素(部分機能または部品)から最大単位の製品に至るすべての階層において、標準化された入出力を有するので、それらを結合するだけで容易に展開ができる。また、結合前に入出力であったもののうち展開のために結合するものを、結合条件を導入

Potential value Flow value Signal value	} State value
$C = A + B$
$C = A \times B$
Partition
$B = -A$
$B = 1/A$
$B = RA$ (R:Coefficient)
$B = PA$ (P:Characteristic)
$B = \int A \, dt$
$B = dA/dt$
Offset	

Fig.1 Main Symbols for Functional Model

Fig.2 Structural Model of SDOF (Single Degree of Freedom) Mechanical System

Fig.3 Functional Model of SDOF Mechanical System

して結合後に内部領域における観測量に変えることにより、モデルの統合ができる。このように、展開と統合の原理は明快かつ簡単である。本章では、機能モデルに付随する数学モデル(支配方程式)を用いて、コンピュータ内で自動的に展開と統合を行うために、それらの標準化された方法と手順を提案する。

しかしその前に、結合前の各要素の数学モデルは、決められた順序で表現しておかなければならない。すでに前報⁽⁴⁾で説明したように、一般に数学モデルは(a)状態方程式と(b)出力方程式から成る。そして、すでに過去に統合を実行して形成された機能要素については、これらに(c)観測方程式が加わる。出力方程式は、(b1)今回の統合後も出力方程式のままであるものと、(b2)今回の統合後には観測方程式に変えるもの、に分けられる。

これらの方程式を(a)、(b1)、(c)、(b2)の順に縦(行)方向に並べたものを数学モデルとする。このとき(a)は、左辺が零になる形に表現しておく。そして、支配方程式をまとめて行列とベクトルで表現すると、左辺の従属変数ベクトルの中身は、上から零、結合後の出力量、現在の観測量、現在の出力量のうち結合後には観測量に変る物、の順に並ぶ。一方、右辺の独立変数の中身は、内部状態量、結合後の入力量、現在の入力量のうち結合後は内部の観測量に変わり左辺に吸収される形で消去される物、の順に並べておく。

次に、展開と統合を実行する方法と手順を説明する。

- 1) 結合前のすべての要素の各々について、上記の形式で記述した要素支配方程式を作成する。
- 2) 結合条件式を作成する。結合条件は、独立変数のうち現在は入力であり結合後に観測量に変る物が従属変数の(b2)に等しい、という式で表現できる。
- 3) 各要素の支配方程式を要素番号順に上から下に並べ、それらをまとめて1個の行列により表現した式を作成し、これを全体支配方程式とする。そうすると、各要素の係数行列は全体係数行列の対角上に左上から要素番号順に置かれる。
- 4) 全体独立変数ベクトルの中身を、結合後の全体モデルについて上から内部状態量、入力量、内部観測量の順になるように並べ替える。これには、全体係数行列の列の並べ替と合成を伴う。
- 5) 全体従属変数ベクトルの中身を、結合後の全体モデルについて、上から前述の(a)、(b1)、(c)、(b2)の順になるように並べ替える。これには、全体係数行列の行の並べ替と合成を伴う。
- 6) 全体支配方程式に結合条件式を代入して、全体独立変数ベクトルの中の内部観測量を全体従属変数の中の内部観測量に書き換える。

Fig. 4 Flow Chart for Combination and Unification of Functional Models

7) 全体支配方程式の最下部にあり 6)で結合条件を導入した式を使って、全体独立変数から内部観測量を消去する。

上記の手順を図4に示す。手順中4)と5)における係数行列の列と行の入替は、要素が1と0から成る入替行列を作成し、それを支配方程式の右辺係数行列に右と左から乗じることにより行う。入替行列の作り方は、次の簡単な例により理解できると思う。

4行3列の行列 $[p]$ があり、まず1列と3列を入れ替え、次に1行を3行に、2行を1行に、3行を2行に入れ替えた行列を作りたいときには、次式のような2個の入替行列を行列 $[p]$ の左右に置き、これら3個の行列の乗算を右から順に行えばよい。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} p_{23} & p_{22} & p_{21} \\ p_{33} & p_{32} & p_{31} \\ p_{13} & p_{12} & p_{11} \\ p_{43} & p_{42} & p_{41} \end{bmatrix} \quad (1)$$

手順4)と5)で行う全体係数行列の合成は、特殊な場合に限られるので、ここでは説明を省略するが、6章にその1例を示す。

手順7)を説明する。従属変数のうち(a)、(b1)、(c)を上から順に並べたベクトルを $[R]$ 、(b2)のベクトルを $[S]$ とし、また独立変数のうち下部の観測量を除くベクトルを $[Q]$ とすれば、手順6)を終った段階における全体支配方程式は、次のように表される。

Fig.5 Models of Two Basic Electrical Elements

$$\begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{RQ} & A_{RS} \\ A_{SQ} & A_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ S \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)から独立変数のうち[S]を消去すれば、手順 7)を終った段階における全体支配方程式は

$$\begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} [Q] \quad (3)$$

ここで、I を単位行列とすれば

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - A_{SS} \\ A_{SQ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{SQ} \\ A_{RS} \end{bmatrix} \quad (4)$$

4. 簡単な例

最も簡単な例として、電気系の基本要素であるコイルとコンデンサを直列につないでみる。図 5 上部はそれらの構造モデル、下部は機能モデルを表す。図 5 において、L はコイルのインダクタンス、C はコンデンサの容量であり、また V_1 、 I_1 、 V_2 、 I_2 、 V_c 、 I_c は結合前の入出力である。結合後には、これら入出力のうち前 4 者は入出力のままであり、後 4 者は内部観測量に変る。なお、機能モデルから数学モデル(支配方程式)を作成する方法については、前報⁽⁴⁾で説明した。

まず手順 1)により、要素 1(コイル)の支配方程式を決められた順序で表現すれば、

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ V_1 \\ V_1 \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

ここで、上添字 T は転置を意味する。また要素 2(コンデンサ)の支配方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ x_c \\ I_2 \\ I_c \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

手順 2)の結合条件式は

Fig.6 Structural Model of Beam with Two Flexible Supports

$$V_1 = V_c, \quad I_c = I_1 \quad (7)$$

手順 3)は単に式(5)と(6)を上下に並べて一つにまとめればよい。この時の従属変数と独立変数はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 & I_1 & I_1 & 0 & V_2 & V_c \end{bmatrix}^T \text{ と } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & x_1 & V_1 & V_2 & \dot{x}_c & x_c & I_2 & I_c \end{bmatrix}^T \text{ になる。}$$

手順 4)と 5)を実行すれば、結合後の全体支配方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \\ x_1 \\ x_c \\ V_1 \\ I_2 \\ V_1 \\ I_c \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

手順 6)により式(7)を式(8)に代入し、次に手順 7)により式(2)~(4)を実行すれば、結合後の全体支配方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_1 \\ V_2 \\ I_1 \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & C & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \\ x_1 \\ x_c \\ V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

5. 柔軟支持はり

4 章より少し複雑な例として、ばね、ダンパ、質量からなる柔軟系で左右 2 箇所を支持された剛体はりを対象にしたモデル化を行う。図 6 は対象全体の構造モデルである。この対象を、左支持部、右支持部、はりの 3 個の部分に分ける。左右支持部は、さらにそれぞれ上部と下部の 2 箇所ずつの部分に分ける。その際、質量は下部に含める。モデルの統合は、まず左右支持部の各々について

Fig.7 Model of Left Flexible Support

行い、次にそれらの結果とほりを統合する。

図7は、2個の部分に分けた左支持部の構造モデルと機能モデルである。この機能モデルを作成する過程での符号反転のための記号の付け方について説明する。まず、ばね K_{21} の伸びによって生じる力 F_1 は、質量 M_1 を減速させる方向に作用する。つぎに入力速度 v_1 と v_{u1} は、ばね K_{21} と K_{11} を縮ませるように作用する。したがって、これらには反転記号が必要になる。

図7において結合前の入出力である v_1 、 F_1 、 v_{s1} 、 F_{s1} 、

v_{11} 、 F_{11} 、 v_{u1} 、 F_{u1} のうち、前4者は結合後も入出力のままであるが、後4者は結合後には内部観測量になる。

まず、図7の右(支持上部)と左(支持下部)を別々にモデル化する。まず支持上部については、図7右の機能モデル中の2個の白丸を式で表現すれば

$$\frac{\dot{x}_{11}}{K_{11}} = v_{s1} - v_{u1} \quad (10)$$

$$F_{s1} = F_{u1} = x_{11} + C_{11}(v_{s1} - v_{u1}) \quad (11)$$

これらを前述の手順1)の順序に従って並べれば、支持上部の支配方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_{s1} \\ F_{u1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{11}} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & C_{11} & -C_{11} \\ 0 & 1 & C_{11} & -C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ x_{11} \\ v_{s1} \\ v_{u1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

支持下部については、機能モデル中の3個の白丸を式で表現すれば

$$\frac{\dot{x}_{21}}{K_{21}} = x_{m1} - v_1 \quad (13)$$

$$M_1 \dot{x}_{m1} = F_{11} - F_1 \quad (14)$$

$$F_1 = x_{21} + C_{21}(x_{m1} - v_1) \quad (15)$$

$$v_{11} = x_{m1} \quad (16)$$

これらを前述の順序に従って並べれば、支持下部の支配方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ v_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{21}} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & M_1 & 1 & C_{21} & -C_{21} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & C_{21} & -C_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{m1} \\ x_{21} \\ x_{m1} \\ v_1 \\ F_{11} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

手順2)に用いる支持上部と支持下部の接続条件は

$$v_{u1} = v_{11}, \quad F_{11} = F_{u1} \quad (18)$$

前述の手順3)~7)に従って支持上部と支持下部を統合する。まず、手順3)により、式(12)と(17)を上下に並べて一体化する。次に、手順4)と5)により、独立変数と従属変数それぞれの順序を並べ替える。この段階で、左支持部支配方程式の独立変数と従属変数はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{21} & \dot{x}_{m1} & x_{11} & x_{21} & x_{m1} & v_1 & v_{s1} & v_{u1} & F_{11} \end{bmatrix}^T \text{ と } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_1 & F_{s1} & v_{11} & F_{u1} \end{bmatrix}^T \text{ になる。}$$

手順6)により、この支配方程式に式(18)を代入し、その後手順7)により式(2)~(4)の処理をすれば、独立変数下部の v_{u1} と F_{11} が消去され、次の左支持部について統合された支配方程式が求められる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_{s1} \\ v_{11} \\ F_{u1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{K_{21}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & -1 & 1 & C_{11} + C_{21} & -C_{21} & -C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{21} & -C_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -C_{11} & 0 & C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -C_{11} & 0 & C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{21} & \dot{x}_{m1} & x_{11} & x_{21} & x_{m1} & v_1 & v_{s1} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

右支持部について統合された支配方程式は、式(19)の添字のうち後の数字を1から2に書き換えるだけで、以下のように作成できる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_2 \\ F_{s2} \\ v_{12} \\ F_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{K_{22}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & -1 & 1 & C_{12} + C_{22} & -C_{22} & -C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{22} & -C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -C_{12} & 0 & C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -C_{12} & 0 & C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{12} & \dot{x}_{22} & \dot{x}_{m2} & x_{12} & x_{22} & x_{m2} & v_2 & v_{s2} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

式(19)と(20)の両式において、上3行が状態方程式、4行目と5行目が出力方程式、6行目と7行目が観測方程式

Fig. 8 Model of Rigid Beam

式である。このように、式(19)と(20)はすでに 1 回の統合を経て作成した支配方程式なので、内部に観測方程式を含む。

次に、剛体はりのモデル化を行う。はりの質量を M_g 、質量中心回りの慣性モーメントを J_g とする。はりの左右支持部には力 F_{b1} と F_{b2} が入力し速度 v_{b1} と v_{b2} が出力し、質量中心には力 F_g とトルク T_g が入力し速度 $\dot{y}_g$ と角速度 $\dot{\theta}$ が出力する、とする。

図8はこの剛体はりの構造モデルと機能モデルである。この機能モデルの中で F_c に符号の反転記号がついているのは、次の理由による。すなわち、図7と後述式(26)から明らかなように、 F_{b1} と F_{b2} は支持部に外(はり)から作用する力であり、はりには支持部からそれらの和 F_c が反力として作用するためである。

この機能モデルからはり単体の支配方程式を求める。下部の左右それぞれ2個ずつの白丸より

$$M_g \dot{x}_g = F_g - F_{b1} - F_{b2} \quad (21)$$

$$J_g \dot{x}_\omega = T_g - l_1 F_{b1} - l_2 F_{b2} \quad (22)$$

自明の関係より

$$\dot{y}_g = x_g, \quad \dot{\theta} = x_\omega \quad (23)$$

上部左右の白丸より

$$v_{b1} = x_g + l_1 x_\omega, \quad v_{b2} = x_g + l_2 x_\omega \quad (24)$$

これらをまとめると、剛体はりの支配方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{y}_g \\ \dot{\theta} \\ v_{b1} \\ v_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_g & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & J_g & 0 & 0 & 0 & -l_1 & l_2 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{x}_\omega \\ x_g \\ x_\omega \\ F_g \\ T_g \\ F_{b1} \\ F_{b2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

はりと左右支持部を、前述の手順 1)~7)に従って統合する。まず手順 1)により、左支持部の支配方程式(19)を並べ替える。前述の定義によれば、式(19)のうち上 3 行は(a)状態方程式、4 行目と 5 行目は出力方程式であり、そのうち 4 行目は(b1)、5 行目は(b2)、6 行目と 7 行目は(c)観測方程式である。したがって手順 1)の形式にするには、5 行目を 7 行目に、6 行目と 7 行目を 5 行目と 6 行目に移動させればよい。これにより式(19)の従属変数は $[0 \ 0 \ 0 \ F_1 \ v_{11} \ F_{u1} \ F_{s1}]^T$ になる。独立変数の順序は式(19)と変わらない。右支持部の支配方程式(20)も同様に並べ替える。

次に、手順 2)に用いるはりと支持部の結合条件は

$$\left. \begin{aligned} v_{s1} &= v_{b1}, & v_{s2} &= v_{b2} \\ F_{b1} &= F_{s1}, & F_{b2} &= F_{s2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(19)と(20)を上記のように並べ替えた物、および式(25)を、式(26)の条件の下で、前述の手順 3)~7)に従って統合する。その途中経過は、上記左支持部の統合と同様であるが、紙面の制限により記述を省略する。統合により得られる全系の支配方程式は 20 行 20 列の係数行列からなり、ここではそれを分解した形で示す。まず状態方程式は

$$0 = \frac{\dot{x}_{11}}{K_{11}} + x_{m1} - x_{b1} \quad (27)$$

$$0 = \frac{\dot{x}_{21}}{K_{21}} - x_{m1} + v_1 \quad (28)$$

$$0 = M_1 \dot{x}_{m1} - x_{11} + x_{21} + (C_{11} + C_{21})x_{m1} - C_{11}x_{b1} - C_{21}v_1 \quad (29)$$

$$0 = \frac{\dot{x}_{12}}{K_{12}} + x_{m2} - x_{b2} \quad (30)$$

$$0 = \frac{\dot{x}_{22}}{K_{22}} - x_{m2} + v_2 \quad (31)$$

$$0 = M_2 \dot{x}_{m2} - x_{12} + x_{22} + (C_{12} + C_{22})x_{m2} - C_{12}x_{b2} - C_{22}v_2 \quad (32)$$

$$0 = M_g \dot{x}_g + x_{11} + x_{12} - C_{11}(x_{m1} - x_{b1}) - C_{12}(x_{m2} - x_{b2}) - F_g \quad (33)$$

$$0 = J_g \dot{x}_\omega + l_1 x_{11} + l_2 x_{12} - C_{11}l_1(x_{m1} - x_{b1}) - C_{12}l_2(x_{m2} - x_{b2}) - T_g \quad (34)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} x_{b1} &= x_g + l_1 x_\omega \\ x_{b2} &= x_g + l_2 x_\omega \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

出力方程式は

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= x_{21} + C_{21}(x_{m1} - v_1) \\ F_2 &= x_{22} + C_{22}(x_{m2} - v_2) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\dot{y}_g = x_g, \quad \dot{\theta} = x_\omega \quad (37)$$

観測方程式は

$$v_{11} = x_{m1}, \quad v_{12} = x_{m2} \quad (38)$$

Fig.9 Schematic Figure of Wiper System

$$\left. \begin{aligned} F_{u1} &= x_{11} - C_{11}(x_{m1} - x_{b1}) \\ F_{u2} &= x_{12} - C_{12}(x_{m2} - x_{b2}) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$F_{s1} = F_{u1}, \quad F_{s2} = F_{u2} \quad (40)$$

$$v_{b1} = x_{b1}, \quad v_{b2} = x_{b2} \quad (41)$$

入力 v_1, v_2, F_g, T_g を与えて式(27)~(34)を解けば、内部状態量 $x_{11}, x_{21}, x_{m1}, x_{12}, x_{22}, x_{m2}, x_g, x_w$ が求められる。これらを式(36)と(37)に代入すれば出力 $F_1, F_2, \dot{y}_g, \dot{\theta}$ が、また式(38)~(41)に代入すれば内部観測量 $v_{i1}, v_{i2}, F_{u1}, F_{u2}, F_{s1}, F_{s2}, v_{b1}, v_{b2}$ が求められる。

6. ワイパー系

自動車のワイパー系を簡略化した図9のような系を考える。この系は、モータに電源をつないでワイパー翼を窓ガラス上ですべらせながら回転させる簡単な系であり、これを3階層に分けて考える。階層1は系全体であり、この系としては最上位になる。階層2でこれを電池、モータ、負荷の3部品に分ける。そして階層3で負荷を窓ガラスとワイパー翼に分ける。

このワイパー系の機能モデルは図10のようになる。ここで D_g は窓ガラスと翼の間の摩擦の等価粘性係数、 J_w は翼の慣性モーメント、 D はモータ軸の回転抵抗の等価粘性係数、 J はモータ回転子の慣性モーメント、 M_m はモータの電気系と回転系をつなぐモータ定数、 R はモータの電気抵抗、 R_e は電池の内部抵抗、 E は電池の起電力、 V は端子電圧、 I は負荷電流、 ω は回転角速度、 T は回転トルクである。

まず、図10下段の階層3について考える。窓ガラスの数学モデルは

Fig.10 Functional Model of Wiper System

$$T_g = D_g \omega_g \quad (42)$$

翼の数学モデルは

$$T_w = J_w \dot{x}_w, \quad x_w = \omega_w \quad (43)$$

式(42)と(43)はどちらも出力方程式である。これらの結合条件式は

$$\omega_g = \omega_w = \omega_l, \quad T_w + T_g = T_l \quad (44)$$

式(44)を用いて式(42)と(43)を統合すれば

$$x_w = \omega_l \quad (45)$$

$$T_l = J_w \dot{x}_w + D_g \omega_l \quad (46)$$

次に図10中段の階層2について考える。まず、電池の数学モデルは

$$I_b = \frac{1}{R_e}(E - V_b) \quad (47)$$

モータの数学モデルは、図10中段中央にある3個の白丸より

$$J \dot{x}_m = M_m I_m - D x_m - T_m \quad (48)$$

$$V_m = R I_m + M_m x_m \quad (49)$$

$$\omega_m = x_m \quad (50)$$

階層2に含まれる3部品の結合条件は

$$\left. \begin{aligned} \omega_m &= \omega_l, \quad T_l = T_m \\ V_m &= V_b, \quad I_b = I_m \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

図 10 には、 x_m と x_w の 2 個の内部状態量を含んでいるようにみえるが、式(51)の $\omega_m = \omega_l$ より $x_m = x_w$ となり、図から明らかなように両者は同じ物である。したがって、式(46)の $\dot{x}_w$ を $\dot{x}_m$ で置き換える。また、 $x_w = x_m$ とすれば、式(45)は式(50)、(51)と同一になるので、不要になる。この操作は、モータの慣性モーメントと翼の慣性モーメントを合成することを意味する。これは、翼の機能モデルが通常の変換(積分型)ではなくその双対変換(微分型)で表現されているために行うものである。これは次の理由による。すなわち、この系ではモータの出力軸のねじりこわさを無視し、モータとワイパーの両慣性モーメントを直結して、前者が生ずる回転速度が後者に入力するとしている。一般に質量や慣性モーメント同士を直結する場合には、片方は速度入力になる。質量と慣性モーメントに速度を入力したり、ばねに力変動を入力する場合には、双対変換を用いざるを得ない。そして、このようにモデル中に双対変換を含むときには、統合の前に合成という操作が必要になる。

起電力 E は、電池内部から発生する電圧であるが、数学モデル上ではこれを側負荷として扱い、後述の式(52)のように、これに対応する入力ベクトルの値を 1 にしておく。この様にすれば、複雑な機械における様々な形の内部エネルギー発生源を統一して扱うことが出来る。

階層 2 の 3 部品を、前述の手順 3)～7)に従って数学モデル上で統合する。まず、手順 3)により各部品の支配方程式を順に並べれば

$$\begin{bmatrix} T_l \\ I_b \\ 0 \\ \omega_m \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_g & 0 & 0 & J_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{R_e} & -\frac{1}{R_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J & D & -M_m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_m & R & 0 \end{bmatrix} * [\omega_l \quad 1 \quad V_b \quad \dot{x}_m \quad x_m \quad I_m \quad T_m]^T \quad (52)$$

手順 4)と 5)により式(52)を並べ替えば

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m \\ V_m \\ I_b \\ T_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & D & 0 & 0 & 0 & -M_m & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_m & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{R_e} & 0 & -\frac{1}{R_e} & 0 & 0 \\ J_w & 0 & 0 & D_g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * [\dot{x}_m \quad x_m \quad 1 \quad \omega_l \quad V_b \quad I_m \quad T_m]^T \quad (53)$$

手順 6)により式(51)を式(53)の右辺の独立変数に代入し、手順 7)により式(2)～(4)を実行すれば

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m \\ V_m \\ I_b \\ T_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J+J_w & D+D_g+M_m^2 A & -M_m I_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_m A R_e & I_0 R \\ 0 & -M_m A & I_0 \\ J_w & D_g & 0 \end{bmatrix} * [\dot{x}_m \quad x_m \quad 1]^T \quad (54)$$

ここで、 A は等価電源抵抗の逆数、 I_0 は等価電流源であり

$$A = \frac{1}{R_e + R}, \quad I_0 = AE \quad (55)$$

式(54)の上 1 行が状態方程式、下 4 行が観測方程式である。式(54)をブロック線図で表せば、図 10 上段のような、系全体として統合された機能モデルになる。

なお、本論文ではすべての例題で機能モデルと構造モデルを併記したが、前者は後者をもとにして作成するのではなく、前者を作成するのに後者は必要ない。そしてこの事が、前者が製品開発に適している理由である。

7. まとめ

著者らが提案した機能モデルを、多くの部品からなる機械の製品開発に適用できるようにするために、複数の小単位部品あるいは部分機能の機能モデル同志を結合することにより水平展開し、続いてそれを統合することにより垂直階層化する方法を提示した。まず、機能モデルの概要を述べた。次に、展開と統合の具体的な手順を提示し、それらが標準化と自動化による製品開発のコンピュータ援用に適していることを述べた。そして、以下の 3 通りの簡単な適応例を示した。第 1 に、電気系の基本要素であるコイルとコンデンサを結合した。第 2 に、2 個の柔軟系で支持された剛体はりのモデル化を、2 段階の結合と統合により行った。第 3 に、自動車のワイパーを簡略化した系のモデル化を、2 段階の結合と統合により行った。これらの適用例によって、提示した手順の理解を容易にすると共に、方法の実用性を検証した。

文 献

- (1) 田中・三枝、振動モデルとシミュレーション、応用技術出版、1984.
- (2) 三浦・福田、自動車設計とシミュレーション、培風館、1990.
- (3) 鈴木ほか、動設計のためのモデリング、オーム社、1995.
- (4) 長松・角田・長松、機論、64-622、C (1998)、1997-2004.