粘弾性動吸振器の最適調整に関する研究*
(分数階フォークトモデルによる解析)清水 信行^{*1}, 大和田 浩史^{*2}Study on Optimum Tuning of Viscoelastic Dynamic Absorber
(Analysis by Fractional Differential Voigt Model)

Nobuyuki SHIMIZU and Hirofumi OWADA

Dynamic model of viscoelastic material may be described by fractional differential Voigt model. Free vibration and forced vibration of a single-DOP (single degree of freedom) system with viscoelastic material have been described by the equations of motion with fractional differential term. This paper deals with vibration reduction of a single-DOF mechanical system with viscoelastic DA (dynamic absorber). Property of stationary vibration response of a 2-DOF viscous damping system has been fully known, yet a 2-DOF viscoelastic damping system is still unknown. Here, the responses of the 2-DOF system with the viscoelastic DA are analyzed and compared with those with the viscous DA.

Key Words: Optimum Tuning, Viscoelastic, Dynamic Absorber, Fractional Differential Voigt Model

1. 緒 言

機器・配管系などに生じる振動を低減するための有効な手段に動吸振器の設置がある。この動吸振器は一般にばねと粘性ダンパーにより構成されている(粘性動吸振器と呼ぶことにする)。主振動系の振動特性値に応じて動吸振器のパラメータをうまく決めることにより優れた制振効果が得られる。したがってこのパラメータを適切に決定するための最適調整法が実用上極めて重要である。パラメータの最適調整法には近似的な方法として、従来から知られている定点理論⁽¹⁾、最近、西原らにより開発された代数的な厳密理論がある⁽²⁾(これらについては2・1節、2・2節で簡単に述べる)。

最近注目を集めてきている減衰材に粘弾性材料がある。防振ゴムをはじめシリコーンゲルなど各種の素材である。軽量の機器系に対してはシリコーンゲルが有効である。この粘弾性材料を動吸振器として用いようとする試みもいくつかなされている^{(3)~(5)}。その場合に従来からのアプローチは粘弾性特性をフォークトモデル、マクスウェルモデルもしくは多要素モデルなど⁽⁶⁾でモデル化して理論解析し、最適調整値を決める方法がとられる。

一方、多くの粘弾性材料の構成方程式を少ないパラメータでできるだけ厳密に記述するには分数階フォークトモデル、分数階マクスウェルモデル、分数階多要素モデルがより合理的であることが指摘され、次第に用いられるようになってきた^{(7)~(9)}。

著者らもシリコーンゲルを対象材料として構成方程式を分数階フォークトモデルで記述し^{(10)~(13)}、これを1自由度系の減衰材料として用いた場合の振動応答⁽¹³⁾と衝撃応答⁽¹⁴⁾を調べてきた。

ここでは分数階フォークトモデルで表わされる粘弾性の動吸振器(粘弾性動吸振器と呼ぶことにする)を想定して、機械系(主振動系)にこの動吸振器を設置したときの最適調整法を検討し、その設計法について述べる。このようなアプローチに関する研究は今のところ見当たらない。

2. 粘性動吸振器の最適調整法

粘性動吸振器の理論を基本として粘弾性動吸振器の最適調整法の検討をすすめる。そのために粘性動吸振器の最適調整法について以下、簡単にまとめる。機械系、動吸振器の変位を $x_1(t)$, $x_2(t)$ とすると運動方程式は

$$M\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) + Kx_1 = F \cos \omega t \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

となる。ここで、 M は主振動系の質量、 m は動吸振器の質

* 原稿受付 1998年2月6日。

^{*1} 正員, いわき明星大学理工学部(☎ 970-8551 いわき市飯野5-5-1)。^{*2} 学生員, いわき明星大学大学院。

量, $F \cos \omega t$ は外力, K は主振動系のばね定数である.

振動体と動吸振器の定常振動解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \phi_1) \quad (3)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t - \phi_2) \quad (4)$$

とおくと主振動体の変位振幅の周波数応答関数 $A_1(\lambda)$ は

$$A_1/x_{st} = \sqrt{\frac{(v^2 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}{\{(1 - \lambda^2)(v^2 - \lambda^2) - \mu v^2 \lambda^2\}^2 + (2\zeta\lambda)^2 \{1 - (1 + \mu)\lambda^2\}^2}} \quad (5)$$

と書ける. ただし, $\Omega_n = \sqrt{K/M}$ と $\omega_n = \sqrt{k/m}$ は主振動体と動吸振器の固有振動数, $x_{st} = F/K$ は主振動系の静的変位, $\mu = m/M$, $v = \omega_n/\Omega_n$ はそれぞれ質量比, 固有振動数比, $\lambda = \omega/\Omega_n$ は無次元振動数, $\zeta = c/2m\Omega_n$ は粘性減衰比である.

2・1 定点理論⁽¹⁾ 主振動系の周波数応答関数が減衰比 ζ の大きさによらない2定点 (一般に P , Q 点と呼ぶ) を通るという性質を利用して近似的ではあるが実用的な最適調整法が定着している. その最適な固有振動数比 v_o , 減衰比 ζ_o は

$$v_o = \frac{1}{1 + \mu}, \quad \zeta_o = \sqrt{\frac{\mu}{8(1 + \mu)^3} \left(3 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right)} \quad (6)$$

と与えられる. このときの P , Q 点の λ の値を λ_p , λ_q とすると次式ように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p^2 \\ \lambda_q^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2 + \mu} \left\{ [(1 + \mu)v^2 + 1] \mp \sqrt{[(1 + \mu)v^2 + 1]^2 - 2v^2(2 + \mu)} \right\} \quad (7)$$

2・2 西原, 松久理論⁽²⁾ 主振動体の変位振幅の周波数応答関数が2つの極大値 A , B をもつという性質を利用して, これらの値が一致し, かつ, この値が最小になるという条件より厳密な最適調整値が決められた. その最適な固有振動数比 v_o , 減衰比 ζ_o は中間変数 r を用いて

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{8[(4 + 3\mu)^{3/2} - \mu]}{64 + 80\mu + 27\mu^2}, \quad v_o = \frac{\sqrt{r(1 + \sqrt{4 + 3\mu})}}{\sqrt{3}(1 + \mu)}, \\ \zeta_o &= \sqrt{\frac{v_o^2(1 - r)[r - (1 + \mu)v_o^2]}{2r[(1 + \mu)^2 v_o^2 - r]}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

と与えられる. このとき極大値を示す λ を λ_A , λ_B ($\lambda_A < \lambda_B$) とするとこれらは次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_A^2 \\ \lambda_B^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[1 + (1 + \mu)v_o^2 - 2(1 + \mu)^2 \zeta_o^2 \right] \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left[1 + (1 + \mu)v_o^2 - 2(1 + \mu)^2 \zeta_o^2 \right]^2 - v_o^2 r} \quad (9)$$

また, 反共振点である λ を λ_c とすると, λ_c は次式の実根

$$A_1/x_{st} = \sqrt{\frac{\left[(\delta^2 + 2\zeta\lambda^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) - \lambda^2)^2 + \left[2\zeta\lambda^q \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right) \right]^2 \right]}{\left\{ (1 - \lambda^2) \left[\delta^2 + 2\zeta\lambda^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) - \lambda^2 \right] - \mu\lambda^2 \left[\delta^2 + 2\zeta\lambda^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \right] \right\}^2 + \left[2\zeta\lambda^q \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right) \right]^2 \left[1 - (1 + \mu)\lambda^2 \right]^2}} \quad (15)$$

Fig. 1 Mechanical System with Viscoelastic DA

として求めることができる.

$$\begin{aligned} & \Omega^3 + (6\zeta_o^2 - 3v_o^2)\Omega^2 + (v^2 + 3v^4 + \mu v^4 - v^2 r - 2\zeta^2 - 4v_o^2 \zeta_o^2 \\ & - 6\mu v_o^2 \zeta_o^2 - 2\mu^2 v_o^2 \zeta_o^2 + 4\zeta_o^4 + 8\mu \zeta_o^4 + 4\mu^2 \zeta_o^4)\Omega + v_o^2 - 2v_o^4 \\ & + \mu v_o^4 - v_o^6 - \mu v_o^6 - v_o^2 r + 2v_o^4 r - \mu v_o^4 r - 2\zeta_o^2 + 8v_o^2 \zeta_o^2 \\ & - 4\mu^2 v_o^2 \zeta_o^2 - 2v_o^4 \zeta_o^2 - 8\mu v_o^4 \zeta_o^2 - 10\mu^2 v_o^4 \zeta_o^2 - 4\mu^3 v_o^4 \zeta_o^2 \\ & + 4v_o^2 r \zeta_o^2 + 2\mu^2 v_o^2 r \zeta_o^2 - 8\zeta_o^4 + 8\mu^2 \zeta_o^4 + 12v_o^2 \zeta_o^4 \\ & + 40\mu v_o^2 \zeta_o^4 + 48\mu^2 v_o^2 \zeta_o^4 + 24\mu^3 v_o^2 \zeta_o^4 + 4\mu^4 v_o^2 \zeta_o^4 - 8\zeta_o^6 \\ & - 32\mu \zeta_o^6 - 48\mu^2 \zeta_o^6 - 32\mu^3 \zeta_o^6 - 8\mu^4 \zeta_o^6 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ただし, $\lambda_c^2 = \Omega$ である. r , v_o , ζ_o は式(8)を用いる.

3. 粘弾性動吸振器の最適調整法

粘弾性動吸振器を設置した機械系を図1に示す. このとき粘弾性材料は分数階フオークトモデルで表わされると仮定する. すると運動方程式は

$$M\ddot{x}_1 + c_q D^q(x_1 - x_2) + k_q(x_1 - x_2) + Kx_1 = F \cos \omega t \quad (11)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_q D^q(x_2 - x_1) + k_q(x_2 - x_1) = 0 \quad (12)$$

ここで, M は主振動系の質量, m は粘弾性動吸振器の質量, ω は外力の振動数, K は主振動系のばね定数, c_q , k_q は粘弾性減衰係数, 粘弾性ばね係数とする. さらに, 主振動体および動吸振器の定常振動解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を式(3), (4)の形に仮定する. $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ の分数階微分は

$$D^q \cos \omega t = \omega^q \left\{ \cos\left(\omega t + \frac{\pi q}{2}\right) + \frac{(\omega t)^{-(2+q)}}{\Gamma(-q-1)} - \frac{(\omega t)^{-(4+q)}}{\Gamma(-q-3)} + \dots \right\} \quad (13)$$

$$D^q \sin \omega t = \omega^q \left\{ \sin\left(\omega t + \frac{\pi q}{2}\right) + \frac{(\omega t)^{-(1+q)}}{\Gamma(-q)} - \frac{(\omega t)^{-(3+q)}}{\Gamma(-q-2)} + \dots \right\} \quad (14)$$

と漸近展開できる⁽¹⁵⁾. 振動の定常振動解を求める場合には ωt が十分大きいとして式(11), (12)に式(3), (4)および, 式(13), (14)の右辺の第1項のみを用いて A_1 および ϕ_1 を求めると

$$\tan \phi_1 = \frac{2\mu\xi\lambda^{4+q}\sin\left(\frac{\pi q}{2}\right)}{\left\{(1-\lambda^2)\left[\delta^2 + 2\xi\lambda^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) - \lambda^2\right] - \mu\lambda^2\left[\delta^2 + 2\xi\lambda^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right)\right]\right\}\left[\delta^2 + 2\xi\lambda^q \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) - \lambda^2\right] + \left[2\xi\lambda^q \sin\left(\frac{\pi q}{2}\right)\right]^2 [1 - (1+\mu)\lambda^2]} \quad (16)$$

となる。ただし、 $\Omega_n = \sqrt{K/M}$ と $\omega_n = \sqrt{k_q/m}$ は主振動体と粘弾性動吸振器の固有振動数比、 $x_{st} = F/K$ は主振動系の静的変位、 $\mu = m/M$ 、 $\delta = \omega_n/\Omega_n$ は質量比および固有振動数比、 $\lambda = \omega/\Omega_n$ は無次元振動数、 $\xi = c_q/2m\Omega_n^{2-q}$ は粘弾性減衰比である。

3・1 等価系の誘導 すでに文献(11)で分数階フォークトモデルは振動数 ω で正弦振動する場合には

$$c_q D^q x(t) = c_{eq} D x(t) + k_{eq} x(t) \quad (17)$$

と書けることを述べた。ここで、 c_{eq} と k_{eq} は

$$c_{eq} = c_q \omega^{q-1} \sin\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (18)$$

$$k_{eq} = c_q \omega^q \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \quad (19)$$

であり、等価粘性減衰係数 c_{eq} 、等価ばね定数 k_{eq} はともに振動数 ω の関数である。これを図2に示した。

図1の粘弾性動吸振器を設置した機械系にこの等価系を適用する。式(17)～(19)を用いて振動数 ω で粘弾性系を粘性減衰系に等価置換し、式(11)、(12)に代入すると

$$M\ddot{x}_1 + c_{eq} D(x_1 - x_2) + (k_{eq} + k)(x_1 - x_2) + Kx_1 = F \cos \omega t \quad (20)$$

$$m\ddot{x}_2 + c_{eq} D(x_2 - x_1) + (k_{eq} + k)(x_2 - x_1) = 0 \quad (21)$$

となる。これに式(3)、(4)を代入すると A_1 、 ϕ_1 として式(15)、(16)が得られた。これより、式(17)～(19)で示した等価系の存在は式(13)、(14)の右辺第1項の性質の存在と等価であることがわかる。

式(20)、(21)で与えられる等価な機械-粘性動吸振器系は図3のようになる。ただし、 c_{eq} と k_{eq} は式(18)、(19)で与えられる振動数 ω の関数である。

3・2 等価粘性減衰系に対する最適調整法 式(15)で与えられる A_1 の最大値を最小化する問題を考える。このときのパラメータは $\delta (= \omega_n/\Omega_n)$ 、 $\xi (= c_q/2m\Omega_n^{2-q})$ 、 q であり、 $\lambda (= \omega/\Omega_n)$ は無次元振動数である。解が存在するとして $\partial A_1^2 / \partial \delta = 0$ 、 $\partial A_1^2 / \partial \xi = 0$ を計算し、これを基に与えられた q と $\mu (= m/M)$ に対して、最適解 δ_o 、 ξ_o を求めるのが正統的な方法である。しかし、この方法では分数階数 q が 7/10 のように分母の整数が大きい場合には、代数方程式の次数が高次になり、容易に δ_o や ξ_o を求めることはできない。そこで、別の方法を探してみる。

式(15)と式(5)の類似性に注目し

$$v^2 = \delta^2 + 2\xi\lambda^q \cos(\pi q/2) \quad (22)$$

$$(2\xi\lambda) = 2\xi\lambda^q \sin(\pi q/2) \quad (23)$$

とおくと、粘弾性系が等価な粘性減衰系に置き換えられることがわかる。すなわち式(22)、(23)の右辺をそれぞれ左辺のようにおくと粘弾性系が粘性減衰系に等価置換される

Fig. 2 Replacement of Viscoelastic material to Viscous model

Fig. 3 Mechanical System with viscous damping DA

ことを意味している。ここで特に、 $q=1$ とおくと

$$v^2 = \delta^2, \quad \zeta = \xi \quad (24)$$

となり、粘性減衰系に帰着する。また $q=0$ とおくと

$$v^2 = \delta^2 + 2\xi, \quad \zeta = 0 \quad (25)$$

となり、固有振動数比が $\delta^2 + 2\xi$ の無減衰系に帰着する。

式(22)、(23)の性質があることにより、粘弾性動吸振器の最適調整問題は等価な粘性減衰動吸振器の最適調整問題に置き換えられる。粘性減衰動吸振器の最適調整には定点理論や厳密解による方法のあることをすでに2章で述べた。これらによれば、質量比 μ に対して最適な固有振動数比 $v = v_o$ 、最適な減衰比 $\zeta = \zeta_o$ を求めることができる。この v 、 ζ が最適値 v_o 、 ζ_o をとるときには、 $\delta (>0)$ 、 ξ は式(22)、(23)を用いると、

$$\left(\frac{\delta}{v_o}\right)^2 = 1 - 2\frac{\zeta_o}{v_o^2} \cot(\pi q/2) \lambda \quad (26)$$

$$\left(\frac{\xi}{\zeta_o}\right) = \operatorname{cosec}(\pi q/2) \lambda^{1-q} \quad (27)$$

となる。式(26)、(27)をもとに λ に対して $(\delta/v_o)^2$ 、 (ξ/ζ_o) を示すと図4のようになる。 $\lambda (= \omega/\Omega_n)$ は無次元振動数であり、外力の振動数とともに変化する。したがって式(26)、(27)の条件はたとえ v_o 、 ζ_o が一定であっても δ 、 ξ は λ の変化に伴って変化し、一定とはならない。図4において q を与えると $(\delta/v_o)^2$ 、 (ξ/ζ_o) は与えられた曲線を変化する。そのような仮想的な状態を認めるとすれば粘弾性動吸振器の最適調整問題は粘性減衰動吸振器の最適調整問題と完全に一致することがわかる。しかし、粘弾性動吸振器の最適調整パラメータを $\delta = \delta_o$ 、 $\xi = \xi_o$ と一度決めると、無次元振動数 λ の変化に伴って粘弾性動吸振器を設置した

Fig. 4 Relation between λ and $(\delta/\nu_0)^2$ and λ and (ξ/ξ_0)

Fig. 5 Frequency Response of A_1/x_s using Fixed Points theory and Exact theory

主振動体の振幅 A_1 の値と粘性減衰動吸振器を設置した主振動体振幅 A_1 の値を完全に一致させられるのは、ある特定の無次元振動数 $\lambda = \lambda_{eq}$ においてである。このとき $\lambda = \lambda_{eq}$ 以外の無次元振動数では式(26), (27)はもはや成立しなくなる。したがって、ここで述べる方法により最適調整値を決定するには、どのような λ_{eq} を与えるのが合理的であるかを検討しておく必要がある。ここでは次の場合に対して検討する。

- (a) $\lambda_{eq} = \lambda_P$ の場合。
- (b) $\lambda_{eq} = \lambda_Q$ の場合。
- (c) $\lambda_{eq} = \lambda_A$ の場合。
- (d) $\lambda_{eq} = \lambda_C$ の場合。
- (e) $\lambda_{eq} = \lambda_B$ の場合。

すなわち(a), (b)は定点理論の P , Q 点の無次元振動数に

λ_{eq} を一致させる場合で、(c)～(e)は厳密理論の極値を与える無次元振動数に一致させる場合である。

以下で行う検討プロセスをまとめると次のようになる。

- (1) まず質量比 μ , 分数階数 q を与える。
- (2) $\lambda = \lambda_{eq}$ を与える。
- (3) 式(6) または(8)により ν_0 , ζ_0 を求める。
- (4) 式(26), (27)より $\delta = \delta_0$, $\xi = \xi_0$ を求める。
- (5) 式(15)により λ を変化させて A_1 をプロットする。

このようにして計算した結果を図5(a)～(e)に示した。当然のことながら $\lambda = \lambda_{eq}$ の振動数比では粘弾性体の周波数応答関数の A_1 の値は粘性減衰動吸振器の場合 ($q=1$ と示した) にすべての μ と q で一致する。その他の λ では q によりそれぞれ異なってくる。

Fig. 6 Closer look of Resonance Curve ($\mu = 0.05$), $\lambda_{eq} = \lambda_A$ [---], $\lambda_{eq} = \lambda_C$ [—], $\lambda_{eq} = \lambda_B$ [-.-.]

4. 考 察

さらに計算結果を考察するために λ_{eq} として厳密解法の値 λ_A , λ_C , λ_B を用いた場合の図5(c)~(e)の結果を同一の q に対してまとめなおし、ピークの部分を拡大し図6に示した。図6の(a), (b), (c), (d)は $q = 1, 9/10, 7/10, 1/2$ の場合である。

図中-----は $\lambda_{eq} = \lambda_A$ とした場合、——は $\lambda_{eq} = \lambda_C$, -.-.-は $\lambda_{eq} = \lambda_B$ とした場合のグラフである。 $\lambda_{eq} = \lambda_A$ とした場合には、 A_1 の値はその点のみで粘性減衰系の A_1 の値(図6(a))に一致し、その他の λ のところでは粘性減衰系の値より右下がりに小さくなっている。特に他の2つの極値は粘性減衰系の対応する極値より小さくなる。また $\lambda_{eq} = \lambda_B$ とした場合には A_1 の値はその点のみで粘性減衰系の A_1 の値に一致し、その他の値は左下がりに小さくなっている。一方 $\lambda_{eq} = \lambda_C$ とした場合には、 A_1 の値はその点のみで粘性減衰系の A_1 の値に一致し、その他の λ では全体的に粘性減衰系のそれより小さくなっている。この傾向は $q = 1, 9/10, 7/10, 1/2 (=5/10)$ と徐々に q を小さくしていても変わりはない。このように検討した範囲では粘性減衰系の最適調整値を基に得た粘弾性系の近似最適値は、 $\lambda_{eq} = \lambda_C$ と選び、前述の(1)~(5)のプロセスにより決定された A_1 が求める最適粘弾性動吸振器を取り付けた場合の振幅を与えることがわかる。なお、 $\lambda_{eq} = \lambda_C$ (図5(d))のときの δ_o , ξ_o の値を表1に示した。

Table 1 Optimum Value of Frequency Response A_1 , ($\lambda_{eq} = \lambda_C$)

μ	0.01		0.05		0.1		0.5	
q	δ_o	ξ_o	δ_o	ξ_o	δ_o	ξ_o	δ_o	ξ_o
1	0.990	0.060	0.952	0.128	0.909	0.169	0.666	0.240
9/10	0.980	0.061	0.932	0.129	0.881	0.170	0.619	0.238
7/10	0.959	0.068	0.884	0.142	0.815	0.186	0.500	0.251
1/2	0.928	0.085	0.812	0.178	0.712	0.232	0.252	0.302

Fig. 7 Formation of Optimum Tuning in This paper

近似最適値近傍での A_1 の曲線の状態は図7のようになっている。 λ に沿って $(\delta_A/v_o)^2$, (ξ_A/ζ_o) を l 線上に沿って変えられると仮想的に考えると、図7の実線ようになる。これに対し $\lambda_{eq} = \lambda_A$ とすると、これにより $(\delta_A/v_o)^2$, (ξ_A/ζ_o) が決められ λ に対する A_1/x_{st} の変化は l_A の線上の曲線となる。同様に l_B , l_C のような曲線となる。これが図5(c), (d), (e)に対応する。 l_C に沿った A_1/x_{st} の曲線の極値がこれらの中では最も小さいことがわかる。

実際には曲線 A_1 の λ に対する左右の極大値を等しく、かつ最小にするような振動数比 λ_{eq} が λ_c の近傍にあるものと思われる。これは数値計算により探索できるが、実用上は $\lambda_{eq} = \lambda_c$ で十分であろう。この場合の曲線は図 6 (b)~(d) の実線である。粘性減衰系 (図 6 (a)) よりわずかではあるが値が小さく、性能のよいことが分かる。

以上により等価粘性減衰系をたよりに粘弾性動吸振器の近似最適解を求めた。これには、式(26), (27)の条件を用いた。この条件はパラメータ空間に制約を与えるものである。この制約条件に従うパラメータ δ と ξ の組み合わせ以外のところに最適解がないことを確認する。図 8 は、 $q = 1/2$, $\mu = 0.05$ に対して δ と ξ を数値的に組み合わせ、それらの値に対して、粘弾性系の周波数応答関数 A_1/x_{st} (式(15)) の λ に対する値を計算し、2つの極大値を等しく、最小にするようなアルゴリズムで計算し、この極大値をプロットして描いたグラフである。探索した δ と ξ の範囲は $0.5 \leq \delta \leq 1.0$, $0 \leq \xi \leq 0.5$ である。これより数値的に探索したグラフの最小値は $(\delta_o, \xi_o) = (0.815, 0.174)$ となり、図 6 より求めた近似最適パラメータの組み合わせ $(\delta_o, \xi_o) = (0.812, 0.178)$ の極めて近くで実現し、それ以外のところに最適解がないことを確認した。

5. 粘弾性動吸振器の設計法

これまでの手順を粘弾性動吸振器の設計法としてまとめると次のようになる。

- (1) M , K は与えられているとする。
- (2) μ を決める。
- (3) 粘弾性材料の性質から q を与える。
- (4) 式(8)より ν_o , ζ_o を計算する。
- (5) $\lambda = \lambda_{eq} = \lambda_c$ (式(10)) とする
- (6) 式(26), (27)より ν_o , ζ_o , $\lambda = \lambda_c$ を用いて $\delta = \delta_o$, $\xi = \xi_o$ を計算する。
- (7) δ_o , ξ_o を $\omega_n = \delta_o \Omega_n$, $c_q = \xi_o \cdot 2m\Omega_n^{2-q}$ に用い、さらに式(18), (19)より c_{eq} と k_{eq} を決定する。

上述の手順で粘弾性動吸振器を具体的に設計してみる。

まず、機械本体の質量を $M = 20$ kg, $K = 18000$ N/m と想定する。質量比を $\mu = 0.05$ と仮定する。したがって $m = \mu/M = 0.05 \times 20 = 1.0$ kg である。粘弾性材料が分数階フォークトモデルで与えられるとし、そのときの分数階数が $q = 2/3$ で与えられるとする。

式(8)を用いると、粘性減衰系の最適値 ν_o , ζ_o は

$$\nu_o = 0.952372, \quad \zeta_o = 0.127559$$

と求められる。無次元振動数 λ は粘性減衰系の反共振点 λ_c を用いるから、式(10)より

$$\lambda_c = 0.972479$$

となり、式(26), (27)に粘性減衰系の ν_o , ζ_o および、無次

Fig. 8 Numerical Analysis of Frequency Response of viscoelastic system ($q = 1/2$, $\mu = 0.05$)

元の反共振振動数 λ_c を代入すると、粘弾性系の近似最適値 δ_o , ξ_o が次のように求められる。

$$\delta_o = 0.874, \quad \xi_o = 0.146$$

ここで、この δ_o , ξ_o を $c_q = \xi_o \cdot 2m\Omega_n^{2-q}$ ($= 27.219$ Ns^q/m), および $\omega_n = \delta_o \Omega_n$ ($= 26.22$ rad/s) に代入し、 k_q ($= 687.488$ N/m) を求め、式(18), (19)を用いて、さらに外力の振動数 ω は $\omega = \lambda_c \Omega_n$ rad/s と決定されるから、 c_{eq} , k_{eq} が次のように求められる。

$$c_{eq} = 7.657 \text{ Ns/m}, \quad k_{eq} = 128.978 \text{ N/m}$$

上記のようにして、注目した振動数において、粘弾性動吸振器のパラメータの近似最適値 c_{eq} と k_{eq} が決められ、その等価系が得られた。

6. 結 言

分数階フォークトモデルで表わされる粘弾性材料を動吸振器に用いて粘弾性動吸振器を製作し、これを機械系に設置して振動の低減化を図る場合の最適調整理論を検討した。その方法は、粘弾性系と等価な粘性減衰系を求め、この系の最適調整値を基に粘弾性動吸振器の近似最適調整値を求めるといものである。これによると、その性能は、粘性減衰系の動吸振器とほぼ同じであるが、わずかに性能のよいことがわかった。この理論を基に粘弾性動吸振器の設計法をまとめ、その設計例を示した。本手法は機械系に粘弾性動吸振器を設置する際の設計に役立つものと思われる。

参考文献

- (1) デン ハルトック, 谷口・藤井 訳, 機械振動論 (改訂版), (1978), 102-110, コロナ社.
- (2) 西原・松久, 機論, 63-614 C (1997), 3438-3445.
- (3) 佐藤, 機論, 57-534, C(1991), 446-452.
- (4) 尾崎・橋本・神保, 機論, 60-580, C(1994), 4116-4122.
- (5) 浦田・竹田, 機論, 61-583, C(1995), 981-986.
- (6) 佐藤, 機論, 59-566, C(1993), 2968-2974.
- (7) P. J. Torvik and R. L. Bagley, Transactions of the ASME, Vol. 51, (1984), 294-298.
- (8) N. Makris and M. C. Constantinou, Technical Report NCEER-90-0028, (1990).
- (9) Å. Fenander, AIAA Journal, Vol.34, No.5, 1996, 1051-1058.
- (10) 清水, 機論, 61-583, C(1995), 902-906.
- (11) 清水・飯島, 日本機械学会第73回通常総会論文集(I)(1996), 339-340.
- (12) 清水・飯島, 機論, 62-604, C(1996), 4447-4451.
- (13) 清水・大和田・飯島, 機論, 63-608, C(1997), 1068-1073.
- (14) 清水・飯島, 機論, 64-624, C(1998), 2903-2907.
- (15) Keith B. Oldham & Jerome Spanier, 1974, 110, Academic Press.