連続的な断面積変化を伴う円管ダクト内の騒音伝ば*

内 海 雅 彦^{*1}Sound Transmission in Circular Ducts of
Continuously Varying Cross-sectional Area

Masahiko UTSUMI

Conventional methods for predicting the reflection and transmission coefficients for non-uniform ducts yield high dimensionality of the resulting numerical problem due to segmentation of the duct into a number of subsections, or require iterative calculations, so that the numerical computation is time-consuming and expensive for obtaining a satisfactorily accurate result. This paper presents a more efficient analytical method, which requires neither segmentation nor iterative calculation by virtue of the use of spherical coordinates. Numerical calculations are carried out for the planar and non-planar waves. It is confirmed that the numerical results are in good agreement with conventional theoretical predictions which have been experimentally validated.

Key Words: Sound, Acoustic, Noise, Sound Transmission, Non-Uniform Duct, Analytical Method, Non-Planar Wave, Reflection Coefficient, Transmission Coefficient

1. 緒 言

管, ダクト内を伝ばする騒音の断面積変化部における反射・透過係数を予測する問題は, その工学的重要性を反映してかなり以前より関心がもたれ, すでに多くの研究が行われている. 特に, 断面積が連続的に変化する場合には, 不連続的に変化して区分的に一樣である場合⁽¹⁾ に比べ解析がむずかしく, 従来よりいくつかの解析法が研究されている. 例えば, 断面積が変化する区間を軸方向に微小要素分割して重みつき残差法⁽²⁾⁻⁽⁴⁾ や有限要素法⁽⁵⁾⁽⁶⁾ を適用する研究, 断面積変化が緩やかであるという限定の下にその変化率を微小パラメータにとって摂動法を用いる研究⁽⁷⁾ が行われている. また, 各微小要素ごとに解析的波動解を適用し, 隣接する微小要素に対しての反射・透過特性を解析的に求めておいて, 繰返し計算により断面積が変化する区間全体の反射・透過率を決定する方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾ が考えられている. これらの従来研究に対し, 本研究では, 微小要素分割も繰返し計算も必要としない効率的な解析的方法を提案する. 本解析法は球座標を用いる

点に特徴があり, また非平面波 (音圧分布が断面内で一樣でない波) に対しても, 音圧分布を表す関数形を波動方程式の固有モード関数として具体的に決定するので, 適用可能である. まず, 最も簡単で比較の実用頻度の高い, 断面が直線テーパ状に変わる場合について説明する. 次に, 若干の修正により断面変化が直線テーパ状と限らない一般の場合にも拡張できることを示す. 得られた計算結果が実験検証されている過去の文献⁽⁹⁾ の計算値とよく一致することを検証し, これにより本解析法の妥当性を確認する.

2. 記 号

本論文で用いるおもな記号を以下に示す.

A_{1mn}, A_{2mn} : 断面積変化部での解の積分定数 [(式 (24))]

a_1, a_2 : 円筒部の半径 (図 1, 2)

C_{1mn} : 入射波を表す解の積分定数 [式 (4)]

C_{2mn} : 反射波を表す解の積分定数 [式 (5)]

C_{3mn} : 透過波を表す解の積分定数 [式 (6)]

c : 音速

F : 断面積変化部での音圧の R 依存性を表す関数 [式 (11)]

G : 変換された関数 [式 (18)]

* 原稿受付 1998 年 2 月 19 日.

^{*1} 正員, 石川島播磨重工業(株)技術研究所 (〒135 0061 東京都江東区豊洲 3 1-15).

- i : 虚数単位
 J_m : m 位の第 1 種ベッセル関数
 k : ω/c
 k_{1mn}, k_{2mn} : z 方向の波数 [式(7), (8)]
 l : 断面積が変化する区間の長さ
 m : 周方向波数
 n, n' : ダクトの半径方向のモード次数
 P : 断面積変化部での音圧
 p : 円筒部での音圧
 $p^{(I)}$: p の入射波に対応する解 [式(4)]
 $p^{(R)}$: p の反射波に対応する解 [式(5)]
 $p^{(T)}$: p の透過波に対応する解 [式(6)]
 R, θ, φ : 球座標 (図 1, 2)
 R_{mn} : モード (m, n) に関する反射係数 [式(29)]
 r, φ, z : 円筒座標 (図 1, 2)
 T_{mn} : モード (m, n) に関する透過係数 [式(30)]
 u : 変換された変数 [式(18)]
 z_{top} : 球座標の原点の z 座標 (図 1, 2)
 $z_w(r)$: 側壁の形状を表す関数
 Θ : 断面積変化部での音圧の θ 依存性を表す関数 [式(11)]
 $\bar{\theta}$: θ の上限値 (図 1, 2)
 λ : 球座標における波動方程式の解の固有値 [式(12), (13)]
 μ_{1mn}, μ_{2mn} : $J_m(x)=0$ の n 番めの根を a_1, a_2 で割った値
 ρ_0 : 媒質密度の平均値 ρ_0
 ρ_1, ρ_2 : 式(19)の決定方程式(21)の根

Fig. 1 Spherical coordinates for linearly tapered ducts

ω : 角周波数

3. 解 法

3・1 球座標の設定 まず, 図 1 のような, $0 \leq z \leq l$ の範囲で断面の半径が a_1 から a_2 まで直線テーパ状に変化する場合を考える. 騒音の反射および透過係数は, 断面一様部 (円筒領域) と断面変化部 (円すい領域) とで別々に求めた波動方程式の解に, 領域境界での音圧と媒質速度の連続条件を課すことにより決定される. この過程において断面積変化部での解を効率よく求めるため, 図 1 のように球座標系 $0-R\theta\varphi (0 \leq \theta \leq \bar{\theta})$ を設定する. 原点 O は, テーパ状断面積変化を伴う円すい面の頂点であり, この z 座標を z_{top} とする.

ここで導入した球座標は θ の上限値 $\bar{\theta}$ (図 1 参照) が $\pi/2$ 未満であるために, 以下の点に注意が必要である. すなわち, θ の上限値が π に達する通常の球座標では, 波動方程式の解の θ 依存性は陪ルジャンドル関数によって, R 依存性は球ベッセル関数によって記述されるのに対し, ここの球座標ではこれらの関数の公式的利用はできなくなる点に注意が必要である. 本問題では, θ 依存性を表す固有関数系は, 陪ルジャンドル関数とは異なる無限級数となり, R 依存性を表す関数系も半奇数オーダーの球ベッセル関数と異なり全く任意の実数オーダーのベッセル関数となる. 本研究ではこれらを新たに導く (3・3 節).

3・2 波動方程式の解 (円筒部) 図 1 の $z \leq 0, l \leq z$ の領域での基礎式は, 円筒座標 $O_0-r\varphi z$ で表された音圧 p に関する波動方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \dots (1)$$

および境界条件

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{for } r = a_1, z \leq 0 \dots (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{for } r = a_2, l \leq z \dots (3)$$

である. c は音速を表す. 式(2), (3)は剛体と仮定された側壁でその法線 (r) 方向の媒質速度が零になる条件を表す. これは, 粘性を省略し, 媒質密度の平均値 ρ_0 からの変動を微小として線形化した媒質の運動方程式より, 媒質速度が圧力こう配を $-\rho_0 i \omega$ で除したものとなることに基づいている. ただし, 時間依存性が $e^{i\omega t}$ によって表される定常音場を仮定している. 式(1)~(3)より, $z=0$ に $+z$ 方向に入射する波動 $p^{(I)}$, $z=0$ で $-z$ 方向に反射される波動 $p^{(R)}$, $z=l$ より下流に透過していく波動 $p^{(T)}$ を表す解は, 下記のように

に表される.

$$p^{(I)} = C_{1mn} J_m(\mu_{1mn} r) \exp(-ik_{1mn} z) \times \cos(m\varphi) \exp(i\omega t) \dots (4)$$

$$p^{(R)} = \sum_{n'} C_{2mn'} J_m(\mu_{1mn'} r) \exp(ik_{1mn'} z) \times \cos(m\varphi) \exp(i\omega t) \dots (5)$$

$$p^{(T)} = \sum_{n'} C_{3mn'} J_m(\mu_{2mn'} r) \exp\{-ik_{2mn'}(z-l)\} \times \cos(m\varphi) \exp(i\omega t) \dots (6)$$

ここで, C_{1mn} , $C_{2mn'}$, $C_{3mn'}$ は任意の複素定数, J_m は m 位のベッセル関数, μ_{1mn} , μ_{2mn} は, 式(2), (3)より $J_m(x)=0$ を満たす x の n 番目の正の値をそれぞれ半径 a_1 , a_2 で割ったもの, k_{1mn} , k_{2mn} は

$$(k_{1mn})^2 = \{\omega^2 - (c\mu_{1mn})^2\}/c^2 \dots (7)$$

$$(k_{2mn})^2 = \{\omega^2 - (c\mu_{2mn})^2\}/c^2 \dots (8)$$

により定まる半径 a_1 , a_2 の管内での波数, i は虚数単位, ω は角周波数である.

上の解(4)~(6)を求めるにあたり, 管の両端は無反射とし, 入射波として特定モード(m, n)を考えた. これに起因して生じる反射波 $p^{(R)}$, 透過波 $p^{(T)}$ は, 3・4 節において連続条件(25)~(28)を満足させるために, 半径方向に任意次数 n' のモードの重ね合せとして与える必要がある. n' に関する総和 Σ の上, 下限はそれぞれ $n_{\max}$, $n_{\min}$ とし, $n_{\min}$ は周方向波数 $m=0$ のモードに対しては零, 他のモードに対しては 1 である. ここで, $(m, n)=(0, 0)$ のモードが断面内で音圧分布の様な平面波を表しその他のモードが非平面波を表す. 一方, 周方向波数に関しての和は, 管を同心と考えているために入射波がもつ周方向波数 m 以外の新たな周方向波数をもつモードは生じないので, とる必要はない.

式(7)より, 半径 a_1 の円管内における (m, n) 次モードについて以下のことがわかる. すなわち, このモードは, $c\mu_{1mn}$ によって与えられる遮断角周波数より高い周波数範囲 $\omega > c\mu_{1mn}$ においてのみ, 波数 k_{1mn} が実数となるため伝ばする波となる. $\omega < c\mu_{1mn}$ の周波数範囲ではいわゆるニアフィールドとなって定在波となる. 半径 a_2 の円管内においても同様であり, 式(8)より, (m, n) 次モードに関する遮断角周波数は $c\mu_{2mn}$ によって与えられる.

3.3 波動方程式の解 (断面積変化部) 図1の $0 \leq z \leq l$ の領域では, 基礎式は球座標 $O-R\theta\varphi$ で表された音圧 p に関する波動方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \right) \dots (9)$$

および境界条件

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \bar{\theta} \dots (10)$$

である. 式(9)の解を

$$P(R, \theta, \varphi, t) = F(R) \Theta(\theta) \cos m\varphi \exp(i\omega t) \dots (11)$$

とおくと, 各周方向波数 m に関して F , Θ が満たすべき微分方程式および境界条件

$$\frac{d^2 F}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{dF}{dR} + \left(k^2 - \frac{\lambda}{R^2} \right) F = 0 \dots (12)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \dots (13)$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = 0 \quad \text{at} \quad \theta = \bar{\theta} \dots (14)$$

を得る. ここで k は,

$$k = \omega/c \dots (15)$$

によって定められる波数, λ は変数分離パラメータである. λ は, 式(13)の解が境界条件(14)を満たすための固有値 $\lambda_{mn}(n=1, 2, 3, \dots)$ として定められ, 対応する固有関数 Θ_{mn} は

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda_{mn} \dots (16)$$

を満たす α を用いることにより, 下記のようなガウスの超幾何級数 $F_{\text{GAUSS}}(\alpha, \beta, r, x)$ で表された形に求められる (既報^{(10)~(13)}).

$$\begin{aligned} \Theta_{mn}(\theta) &= (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \\ &\times F_{\text{GAUSS}}(m - \alpha, \alpha + m + 1, m + 1, (1 - \cos \theta)/2) \\ &= (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m - \alpha)(m - \alpha + 1) \cdots (m - \alpha + i - 1)}{12 \cdots i(m+1)(m+2) \cdots (m+i)} \\ &\times \{(1 - \cos \theta)/2\}^i \dots (17) \end{aligned}$$

このようなガウスの超幾何級数による解の表示は, 収束性の検証に有効である. すなわち, $F_{\text{GAUSS}}(\alpha, \beta, r, x)$ は $|x| < 1$ ならば α, β, r の任意の値に対して収束することが知られており, したがって式(17)は, $0 \leq \theta < \pi$ で収束する. ここでの球座標は $0 \leq \theta < \bar{\theta} < \pi/2$ (図1参照)であり収束領域の半分に満たないことより, 必ず収束することが保証される.

式(12)は変換

$$u = kR, G(u) = u^{1/2} F(R) \dots (18)$$

により

$$\frac{d^2 G}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dG}{du} + \left(1 - \frac{\lambda + 0.25}{u^2} \right) G = 0 \dots (19)$$

となる. 級数解

$$G(u) = u^e \left(b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j u^j \right) \dots (20)$$

を仮定して式(19)に代入することにより決定方程式

$$\rho^2 - \lambda - 0.25 = 0 \dots (21)$$

と係数 b_j に関する漸化式

Fig. 2 Example for spherical coordinates for curvi-linearly tapered ducts

(a) Converging tapered duct
($a_1=0.0208$ m, $a_2=0.01785$ m, $l=0.0207$ m)

(b) Diverging tapered duct
($a_1=0.0208$ m, $a_2=0.02645$ m, $l=0.0207$ m)

Fig. 3 Reflection and Transmission coefficients (Eqs. (29) and (30)) for modes $(m, n)=(0, 0)$, $(1, 1)$, and $(2, 1)$ for linearly tapered duct (---, results for discontinuously varying cross-sectional area)

$b_{j+2} = -b_j / \{(2\rho + j + 2)(j + 2)\}$ ($j \geq 0$) ... (22)
を得る。 b_0 を零以外の適当な実数, $b_1 = 0$ として, 式 (21) より定まる二つの根

$$\rho_1 = (\lambda + 0.25)^{1/2}, \rho_2 = -(\lambda + 0.25)^{1/2} \dots (23)$$

に関して係数 b_j を決定すれば, 式 (12) の解が定められる。

以上により, 断面積変化部での波動方程式の解は,

(a) Converging tapered duct
($a_1=0.0208$ m, $a_2=0.01785$ m, $l=0.0207$ m)

(b) Diverging tapered duct
($a_1=0.0208$ m, $a_2=0.02645$ m, $l=0.0207$ m)

Fig. 4 Comparison between the results presented by this paper and Ref. (9)

(—, theoretical results for R_{mn} by this paper and Ref. (9); ---, theoretical results for T_{mn} by this paper and Ref. (9); ○, experimental results for R_{mn} by Ref. (9); ●, experimental results for T_{mn} by Ref. (9))

固有関数の重ね合せにより

$$P = \sum_n \{A_{1mn} F_{1mn}(R) + A_{2mn} F_{2mn}(R)\} \times \Theta_{mn}(\theta) \cos m\phi \exp(i\omega t) \dots (24)$$

と表される。ここで, A_{1mn}, A_{2mn} は任意の複素定数, F_{1mn}, F_{2mn} はそれぞれ式 (23) の根 ρ_1, ρ_2 に対応する式 (12) の F の解を表す。

3・4 反射および透過係数の決定 3・2 節, 3・3 節で求めた解 (4) ~ (6), (24) を図 1 の $z=0, l$ における音圧および媒質速度の連続条件

$$p^{(I)} + p^{(R)} = P \quad \text{at } z=0 \dots (25)$$

$$\frac{\partial p^{(I)}}{\partial z} + \frac{\partial p^{(R)}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{at } z=0 \dots (26)$$

$$p^{(T)} = P \quad \text{at } z=l \dots (27)$$

$$\frac{\partial p^{(T)}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{at } z=l \quad \dots\dots\dots (28)$$

に代入する。式(25), (26)の両辺に $rJ_m(\mu_{1mq}r)$ ($q = n_{\min}, \dots, n_{\max}$) を乗じて $0 \leq r \leq a_1$ で積分し, また, 式(27), (28)の両辺に $rJ_m(\mu_{2mq}r)$ を乗じて $0 \leq r \leq a_2$ で積分すれば, $C_{1mn}, C_{2mn}, C_{3mn}, A_{1mn}, A_{2mn}$ ($n' = n_{\min}, \dots, n_{\max}$) に関する斉次一次方程式が得られる。この方程式より反射波および透過波の振幅に相当する C_{2mn}, C_{3mn} の入射波の振幅 C_{1mn} に対する比を決定し, これらの比の絶対値を特定モード (m, n) に関する反射および透過係数として以下のように定義する。

$$R_{mn} = |C_{2mn}/C_{1mn}| \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$T_{mn} = |C_{3mn}/C_{1mn}| \quad \dots\dots\dots (30)$$

すなわち, 文献(9)に従い, 入射波として特定のモード次数 n のみを考え, 反射波, 透過波として生じる任意次数 n' のモードのうち特に $n' = n$ 次のモード成分

の入射波に対する振幅比を考えている。

3.5 直線テーパ状以外の断面変化への対応

以上までは, 断面変化が直線テーパ状の場合を考えてきたが, これ以外の場合にも本論文で提案した球座標による解析法は, 以下の2点の変更を施すことにより拡張できる。例として, 断面が縮小する場合について説明する。まず, 定義域 $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}$ 内に断面積変化部全体が含まれるように球座標を設定し (図2), 固有関数 Θ を決定するための境界条件を式(10)の代わりに

$$\frac{\partial P}{\partial N} = 0 \quad \text{at } \theta = \bar{\theta} \quad \dots\dots\dots (31)$$

と変更する (N は側壁の法線方向を意味する)。これは側壁上の $\theta = \bar{\theta}$ の位置での媒質流速の境界条件であり, 式(11), (31)より固有関数 Θ に課すべき境界条件は

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dR} \cos(R, N) \Theta + F \frac{d\Theta}{d\theta} \frac{1}{R} \cos(\theta, N) &= 0 \\ \text{at } \theta &= \bar{\theta} \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

となる。次に, 媒質流速の連続条件(28)を, 側壁の任意位置での流速境界条件を取込んだ形

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p^{(T)}}{\partial z} \Big|_{z=l} &= \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=l} \quad \text{for } 0 \leq r \leq a_2 \\ 0 &= \frac{\partial P}{\partial N} \left\{ 1 + \left(\frac{dz_w}{dr} \right)^2 \right\} \frac{dz_w}{dr} \quad \text{for } a_2 \leq r \leq a_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

に変更し, 式(33)の両辺に $rJ_m(\mu_{1mq}r)$ を乗じて $0 \leq r \leq a_1$ で積分する。式(32)および(33)の第2式の右辺は, 側壁の形状を $z = z_w(r)$ の形に具体的関数形で与えることにより計算できる。また, 式(33)第2式右辺の $\partial P / \partial N$ 以外の因数は側壁上での面積分を r 積分に変換する因数である。

4. 計算例

直線テーパ状の断面変化に関する計算例を図3に実線で示す。破線は比較のための不連続的な断面変化に対する結果を示したもので後ほど参照する。図3(a)は断面積が縮小する場合 (図1の Case 1), 図3(b)は拡大する場合 (図1の Case 2) である。ともに $(m, n) = (0, 0)$ 次のモード (平面波) が入射する場合と, $(m, n) = (1, 1), (2, 1)$ 次のモード (非平面波) が入射する場合について, 各モードが伝ばする遮断周波数以上の周波数領域で計算結果を示している。

図3の実線は, 本解法の妥当性検証のため, 実験検証のなされている文献(9)の計算例と同じ諸元について計算したもので, 文献(9)による結果との比較を図4に示す。本解析結果と文献(9)による解析結果は図4では表せないほどよく一致し, 別の曲線として表示

(a) Converging tapered duct
($a_1 = 0.0208$ m, $a_2 = 0.01785$ m, $l = 0.003$ m)

(b) Diverging tapered duct
($a_1 = 0.0208$ m, $a_2 = 0.02645$ m, $l = 0.003$ m)

Fig. 5 Results for curvi-linearly tapered duct (---, results for discontinuously varying cross-sectional area)

できない。また、解析結果と実験結果の差異が断面積が縮小する場合 [図 4(a)] の透過波について大きい理由について、文献(9)では以下の二点を挙げている。

(1) 透過側のダクト半径 $a_2=0.01785$ m が図 4(a), (b) で使用する全ダクト半径中最小であるため、測定用マイクロホンが音場に与える影響が相対的に大きく現れたこと。

(2) 断面積変化部での音波の減衰がダクト径が小さく高次モードになるほど重要になるが、解析ではこれを無視したため透過波を過大評価する結果となったこと。

次に、曲線テーパ状の断面変化に関する計算例を図 5 に実線で示す。これは、側壁の半径 r が以下のような z の関数として変動する場合について計算した結果である。

$$r=r_w(z)=0.5(a_1+a_2)+A\sin\{B(z-0.5l)\} \\ (0\leq z\leq l) \dots\dots\dots (34)$$

ここで定数 A, B は、断面変化部の長さを $l=0.003$ m として、 $z=0, l$ で式(34)の $\sin$ の引き数が $-70^\circ, 70^\circ$ となるように (すなわち $0\leq z\leq l$ での側壁プロフィールが -70° と 70° の間のサインカーブとなるように) 定めた。図 5 の実線で示された結果を検証するための一方法として、断面積変化が不連続的な場合 (図 1 で $l=0$ あるいは $\bar{\theta}=90^\circ$ としてテーパ状領域をなくした場合) について計算を実行し、その結果を図 3, 5 中に破線で描き込んだ。図 5 の場合のほうが断面積変化が急であり、したがって図 5 では図 3 よりも実線と破線とが互いに近接した結果となるはずであるという、直感的に妥当と考えられる傾向が確認できる。

5. 結 言

断面積が連続的に変わる円管内の騒音伝ば解析を行った。得られた結論を以下に要約する。

(1) 球座標を用いることにより、断面積変化部での微小要素分割や繰返し計算を必要としない、従来法に比べて効率的な解析的アプローチが可能となる。

(2) 平面波および非平面波が入射する場合について、反射および透過波の入射波に対する振幅比を計算した。その結果が過去の文献の結果とよく一致することを確かめることにより、本解析法の妥当性を確認した。

文 献

- (1) Miles, J., *J. Acoustical Society of America*, 16 (1944), 14-19.
- (2) Eversman, W., Cook, E. L. and Beckemeyer, R. J., *J. Sound Vib.*, 38 (1975), 105-123.
- (3) Vo, P. T. and Eversman, W., *J. Sound Vib.*, 56 (1978), 243-250.
- (4) Eversman, W. and Astley, R. J., *J. Sound Vib.*, 74 (1981), 89-101.
- (5) Astley, R. J. and Eversman, W., *J. Sound Vib.*, 57 (1978), 367-388.
- (6) Astley, R. J. and Eversman, W., *J. Sound Vib.*, 74 (1981), 103-121.
- (7) Nayfeh, A. H., Kaiser, J. E., Marshall, R. L. and Hurst, C. J., *J. Sound Vib.*, 71 (1980), 241-259.
- (8) Alfredson, R. J., *J. Sound Vib.*, 23 (1972), 433-442.
- (9) 貞本晃・村上芳則・杵田茂樹, 日本音響学会誌, **49**-4 (1993), 235-242.
- (10) 内海雅彦, 機論, **54**-505, C (1988), 2041-2050.
- (11) 内海雅彦, 機論, **61**-585, C (1995), 1784-1791.
- (12) Utsumi, M., *The 1989 ASME PVP Conference*, 157 (1989), 103-113.
- (13) Utsumi, M., *J. Fluids and Structures*, 12 (1998), 57-83.