周辺固定楕円形板の自由たわみ振動*

(ミンドリン理論)

佐 藤 謙 藏^{*1}

Free Flexural Vibration of an Elliptical Plate with Clamped Edge According to the Mindlin's Theory

Kenzo SATO

This paper presents the study on the free flexural vibration of a complete elliptical plate with clamped edge according to the Mindlin's theory including the effect of shear deformation and rotary inertia. The analysis is rigorously made by the use of the Mathieu function and modified Mathieu function which are the solutions of the equation of motion expressed in terms of the elliptical coordinates. The frequency equation is derived by applying the orthogonality of the Mathieu function. The eigenfrequencies calculated numerically are given in tables and figures for a variety of ratios of the minor axial length to the thickness and of the major axial length to the minor axial one. It can be seen that the calculated results approach to the ones due to the classical theory neglecting the effect of shear deformation and rotary inertia with decreasing thickness.

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Eigenvalue Analysis, Clamped Elliptical Plate, Mindlin's Theory

1. 緒 言

周辺固定楕円形板は、楕円筒容器のふた等に用いられる有用な機械系構造物の構成部材である。周辺固定楕円形板の自由たわみ振動問題は、楕円筒座標系を導入することにより、マシュー関数を用いて厳密に解析することが可能である。したがって、従来もこうした解法で解析^{(1),(2)}が試みられ、数値解も報告されているが、いずれも板のせん断変形と回転慣性の影響を無視した古典薄板理論に基づくものである。しかしながら、一般に板が厚くなるにつれてまた高次振動モードになるにつれて、板のせん断変形と回転慣性の影響を考慮したミンドリン理論⁽³⁾が妥当な解答を与えるものと考えられる。ミンドリン理論による楕円形板の自由たわみ振動については、Callahan⁽⁴⁾や佐藤⁽⁵⁾が、マシュー関数を用いて厳密に解析することを試みた。また、近年このような振動問題を、Wang ら⁽⁶⁾やLiew ら⁽⁷⁾がリッツの方法を用いて研究し、多くの数値解を報告している。

本研究は、板のせん断変形と回転慣性の影響を考慮

したミンドリン理論により、周辺固定楕円形板の自由たわみ振動を厳密に解析しようとするものである。すでに、Callahan⁽⁴⁾は、ミンドリン理論に基づいた楕円形板の自由たわみ振動を、楕円筒座標系において厳密に解析することを試みているが、一切数値計算解を与えなかった。本報告の解析においても、Callahan と同様に楕円筒座標によって表現された楕円形板の運動方程式の解であるマシュー関数と変形マシュー関数を用いるが、振動数方程式を誘導する過程において Callahan の方法と異なる。すなわち、Callahan は振動数方程式を導く際に、フーリエ級数表示されたマシュー関数のなかの三角関数の直交性に着目したが、本解析では数値計算の際の収束性を考慮して、直接マシュー関数の直交性を利用して振動数方程式を導く^{(1),(2),(5)}。

このようにして求まる 4 種類の基本振動にたいする振動数方程式から、それぞれ最低次元固有振動数の数値計算を行う。計算結果は、楕円形板の短軸の長さとおよび長軸と短軸の長さの比の変化にたいして表と図に示す。

2. 運動方程式と境界条件

* 原稿受付 1998 年 3 月 27 日。

^{*1} 正員、八戸工業高等専門学校 (☎ 039-1192 八戸市田面木字上野平 16-1)。

E-mail: sato-kenzo-g @ hachinohe-ct.ac.jp

せん断変形と回転慣性の影響を含む楕円形板の自由たわみ振動の運動方程式は、直交座標系 (x, y, z) を用いて次の3個の式で表示される⁽³⁾。すなわち

$$\nabla^2 w_r + \delta_r^2 w_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここに

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \\ \delta_1^2 &= \frac{1}{2}\delta_0^4\{(R+S) \pm [(R-S)^2 + 4/\delta_0^4]^{1/2}\}, \\ \delta_3^2 &= 2(R\delta_0^4 - 1/S)/(1-\nu) \end{aligned} \quad (2)$$

また、 w_1, w_2 はたわみ変位成分で、 w_3 は角変位を導くポテンシャル関数である。上式において、

$$\delta_0^4 = \rho h p^2/D, \quad R = h^2/12, \quad S = D/\kappa^2 G h \quad (3)$$

ここに、 p は固有角振動数、 ρ は密度、 h は板厚、 ν はポアソン比、 κ^2 はせん断修正係数、 G は横弾性係数である。また、縦弾性係数 E を用いると、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。そのとき、板の振動変位成分 ψ_x, ψ_y, w は

$$\psi_x = (\sigma_1 - 1)\partial w_1/\partial x + (\sigma_2 - 1)\partial w_2/\partial x + \partial w_3/\partial y \quad (4)$$

$$\psi_y = (\sigma_1 - 1)\partial w_1/\partial y + (\sigma_2 - 1)\partial w_2/\partial y - \partial w_3/\partial x \quad (5)$$

$$w = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad (6)$$

ここに

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= S\delta_0^4/\delta_1^2 = \delta_2^2/(R\delta_0^4 - 1/S), \\ \sigma_2 &= S\delta_0^4/\delta_2^2 = \delta_1^2/(R\delta_0^4 - 1/S) \end{aligned} \quad (7)$$

なお、上記の記号の多くは文献(3)において用いられたものである。

楕円形板の自由たわみ振動を厳密に解析するために、直交座標系 (x, y, z) と

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta, \quad z = z \quad (8)$$

の関係を有する楕円筒座標系 (ξ, η, z) を導入する。記号 c は楕円の焦点間距離の半分の長さをあらわす。式(8)を用いて、式(1)および式(4)~(6)を変換すると、

$$\begin{aligned} \partial^2 w_r/\partial \xi^2 + \partial^2 w_r/\partial \eta^2 \\ + 2k_r(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)w_r = 0, \quad (r = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (9)$$

および

$$\psi_\xi = \alpha[(\sigma_1 - 1)\partial w_1/\partial \xi + (\sigma_2 - 1)\partial w_2/\partial \xi + \partial w_3/\partial \eta] \quad (10)$$

$$\psi_\eta = \alpha[(\sigma_1 - 1)\partial w_1/\partial \eta + (\sigma_2 - 1)\partial w_2/\partial \eta - \partial w_3/\partial \xi] \quad (11)$$

$$w = w_1(\xi, \eta) + w_2(\xi, \eta) \quad (12)$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha &= [2/c^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)]^{1/2}, \quad 2k_r = \delta_r c, \\ (r &= 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (13)$$

一方、周辺固定の境界条件は、境界楕円 $\xi = \xi_0$ に沿って

$$\psi_\xi = \psi_\eta = w = 0 \quad (14)$$

のように表わされる。

3. 振動数方程式

楕円形板の自由たわみ振動は、系の対称性から4種類の基本振動に分類される。ここでは、各基本振動に対応する解と境界条件から、4種類の振動数方程式を導く。以下に与えられる式において、 ce, se はマシュー関数、 Ce, Se は変形マシュー関数、 $A^{(n)}, B^{(n)}$ はマシュー関数のフーリエ係数⁽⁸⁾である。また、 $C^{(1)}, C^{(2)}, S^{(1)}, S^{(2)}$ は積分定数である。

3.1 長軸と短軸に関して対称な振動(S-S振動) この振動型の場合の関数 w_1, w_2 および w_3 は、式(9)から、

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{(1)} Ce_{2n}(\xi, q_1) ce_{2n}(\eta, q_1) \quad (15)$$

$$w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{(2)} Ce_{2n}(\xi, q_2) ce_{2n}(\eta, q_2) \quad (16)$$

$$w_3 = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}^{(1)} Se_{2n}(\xi, q_3) se_{2n}(\eta, q_3) \quad (17)$$

で与えられる。ここに

$$q_r = k_r^2, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (18)$$

式(15)~(17)を式(10)~(12)に代入して得られる ψ_ξ, ψ_η, w を、境界条件式(14)に代入して、マシュー関数の直交性を利用すると、次のような無限行列方程式の形式による振動数方程式が得られる。すなわち

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} e_{mn} &= \{-(\sigma_1 - 1)I^{(2m, 2n)}(q_2, q_1) \\ &\times Ce'_{2n}(\xi_0, q_1)/Ce_{2n}(\xi_0, q_1) \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} L^{(2i, 2n)}(q_3, q_1)[-(\sigma_2 - 1)N^{(2m, 2i)}(q_2, q_3) \\ &+ (\sigma_1 - 1)\sum_{j=1}^{\infty} I^{(2m, 2j)}(q_2, q_1)M^{(2j, 2i)}(q_1, q_3)] \\ &\times Se_{2i}(\xi_0, q_3)/Se'_{2i}(\xi_0, q_3)\} Ce_{2m}(\xi_0, q_2) \\ &+ (\sigma_2 - 1)I^{(2m, 2n)}(q_2, q_1)Ce'_{2m}(\xi_0, q_2), \\ (m, n &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)において、変形マシュー関数 Ce および Se に付したダッシュ ($\prime$) は ξ による微分を表わし、また

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2m,2n)}(q_2, q_1) &= \sum_{u=0}^{\infty} A_{2u}^{(2m)}(q_2) A_{2u}^{(2n)}(q_1) \mu_u, \\ \mu_u &= 2(u=0), 1(u \neq 0), \\ L^{(2m,2n)}(q_3, q_1) &= \sum_{u=1}^{\infty} 2u B_{2u}^{(2m)}(q_3) A_{2u}^{(2n)}(q_1), \\ M^{(2m,2n)}(q_1, q_3) &= - \sum_{u=1}^{\infty} 2u A_{2u}^{(2m)}(q_1) B_{2u}^{(2n)}(q_3), \\ N^{(2m,2n)}(q_2, q_3) &= - \sum_{u=1}^{\infty} 2u A_{2u}^{(2m)}(q_2) B_{2u}^{(2n)}(q_3) \\ &\dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

式(3)に与えられる R と S が小さくなってくると、式(18)で与えられる q_2 と q_3 は負の値になるから、

$$q_2 = -\bar{q}_2, \quad q_3 = -\bar{q}_3, \quad (\bar{q}_2, \bar{q}_3 > 0) \dots\dots\dots (22)$$

のように書き換えておくと便利である⁽⁸⁾。そのとき式(20)と(21)において、

$$\begin{aligned} Ce_{2n}(\xi_0, q_2) &\rightarrow Ce_{2n}(\xi_0, -\bar{q}_2), \\ Se_{2n}(\xi_0, q_3) &\rightarrow Se_{2n}(\xi_0, -\bar{q}_3), \\ A_{2u}^{(2n)}(q_2) &\rightarrow (-1)^{n+u} A_{2u}^{(2n)}(\bar{q}_2), \\ B_{2u}^{(2n)}(q_3) &\rightarrow (-1)^{n+u} B_{2u}^{(2n)}(\bar{q}_3) \\ &\dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

のように置き換えればよい。

3.2 長軸に関して対称で短軸に関して逆対称な振動 (S-A 振動) 式(9)から、関数 w_1 , w_2 および w_3 は

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}^{(1)} Ce_{2n+1}(\xi, q_1) ce_{2n+1}(\eta, q_1) \dots\dots\dots (24)$$

$$w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}^{(2)} Ce_{2n+1}(\xi, q_2) ce_{2n+1}(\eta, q_2) \dots\dots\dots (25)$$

$$w_3 = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}^{(1)} Se_{2n+1}(\xi, q_3) se_{2n+1}(\eta, q_3) \dots\dots\dots (26)$$

この場合の行列方程式(19)の要素 e_{mn} は

$$\begin{aligned} e_{mn} &= \{-(\sigma_1 - 1) \Gamma^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_1) \\ &\quad \times Ce'_{2n+1}(\xi_0, q_1) / Ce_{2n+1}(\xi_0, q_1) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\infty} L^{(2i+1,2n+1)}(q_3, q_1) [-(\sigma_2 - 1) \\ &\quad \times N^{(2m+1,2i+1)}(q_2, q_3) + (\sigma_1 - 1) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma^{(2m+1,2j+1)}(q_2, q_1) M^{(2j+1,2i+1)}(q_1, q_3)] \\ &\quad \times Se_{2i+1}(\xi_0, q_3) / Se'_{2i+1}(\xi_0, q_3) \} Ce_{2m+1}(\xi_0, q_2) \\ &\quad + (\sigma_2 - 1) \Gamma^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_1) Ce'_{2m+1}(\xi_0, q_2), \\ &\quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

式(27)において、

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_1) &= \sum_{u=0}^{\infty} A_{2u+1}^{(2m+1)}(q_2) A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_1), \\ L^{(2m+1,2n+1)}(q_3, q_1) &= \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) B_{2u+1}^{(2m+1)}(q_3) \\ &\quad \times A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_1), \end{aligned}$$

$$\times A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_1),$$

$$M^{(2m+1,2n+1)}(q_1, q_3) = - \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) A_{2u+1}^{(2m+1)}(q_1)$$

$$\times B_{2u+1}^{(2n+1)}(q_3),$$

$$N^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_3) = - \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) A_{2u+1}^{(2m+1)}(q_2)$$

$$\times B_{2u+1}^{(2n+1)}(q_3)$$

$$\dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $q_2, q_3 < 0$ のとき

$$Ce_{2n+1}(\xi_0, q_2) \rightarrow Ce_{2n+1}(\xi_0, -\bar{q}_2),$$

$$Se_{2n+1}(\xi_0, q_3) \rightarrow Se_{2n+1}(\xi_0, -\bar{q}_3),$$

$$A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_2) \rightarrow (-1)^{n+u} B_{2u+1}^{(2n+1)}(\bar{q}_2),$$

$$B_{2u+1}^{(2n+1)}(q_3) \rightarrow (-1)^{n+u} A_{2u+1}^{(2n+1)}(\bar{q}_3)$$

$$\dots\dots\dots (29)$$

のように置き換えられる。

3.3 長軸に関して逆対称で短軸に関して対称な振動 (A-S 振動) 式(9)から、関数 w_1 , w_2 および w_3 は

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}^{(1)} Se_{2n+1}(\xi, q_1) se_{2n+1}(\eta, q_1) \dots\dots\dots (30)$$

$$w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}^{(2)} Se_{2n+1}(\xi, q_2) se_{2n+1}(\eta, q_2) \dots\dots\dots (31)$$

$$w_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}^{(1)} Ce_{2n+1}(\xi, q_3) ce_{2n+1}(\eta, q_3) \dots\dots\dots (32)$$

この場合の行列方程式(19)の要素 e_{mn} は

$$\begin{aligned} e_{mn} &= \{-(\sigma_1 - 1) \Gamma^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_1) \\ &\quad \times Se'_{2n+1}(\xi_0, q_1) / Se_{2n+1}(\xi_0, q_1) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\infty} L^{(2i+1,2n+1)}(q_3, q_1) [-(\sigma_2 - 1) \\ &\quad \times N^{(2m+1,2i+1)}(q_2, q_3) + (\sigma_1 - 1) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma^{(2m+1,2j+1)}(q_2, q_1) M^{(2j+1,2i+1)}(q_1, q_3)] \\ &\quad \times Ce_{2i+1}(\xi_0, q_3) / Ce'_{2i+1}(\xi_0, q_3) \} Se_{2m+1}(\xi_0, q_2) \\ &\quad + (\sigma_2 - 1) \Gamma^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_1) Se'_{2m+1}(\xi_0, q_2), \\ &\quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

式(33)において、

$$\Gamma^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_1) = \sum_{u=0}^{\infty} B_{2u+1}^{(2m+1)}(q_2) B_{2u+1}^{(2n+1)}(q_1),$$

$$L^{(2m+1,2n+1)}(q_3, q_1) = - \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) A_{2u+1}^{(2m+1)}(q_3)$$

$$\times B_{2u+1}^{(2n+1)}(q_1),$$

$$M^{(2m+1,2n+1)}(q_1, q_3) = \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) B_{2u+1}^{(2m+1)}(q_1)$$

$$\times A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_3),$$

$$N^{(2m+1,2n+1)}(q_2, q_3) = \sum_{u=0}^{\infty} (2u+1) B_{2u+1}^{(2m+1)}(q_2)$$

$$\times A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_3)$$

$$\dots\dots\dots (34)$$

ここに, $q_2, q_3 < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \text{Se}_{2n+1}(\xi_0, q_2) &\rightarrow \text{Se}_{2n+1}(\xi_0, -\bar{q}_2), \\ \text{Ce}_{2n+1}(\xi_0, q_3) &\rightarrow \text{Ce}_{2n+1}(\xi_0, -q_3), \\ B_{2u+1}^{(2n+1)}(q_2) &\rightarrow (-1)^{n+u} A_{2u+1}^{(2n+1)}(\bar{q}_2), \\ A_{2u+1}^{(2n+1)}(q_3) &\rightarrow (-1)^{n+u} B_{2u+1}^{(2n+1)}(\bar{q}_3) \\ &\dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

のように置き換えられる.

3.4 長軸と短軸に関して逆対称な振動(A-A振動)

式(9)から, 関数 w_1, w_2 および w_3 は

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}^{(1)} \text{Se}_{2n}(\xi, q_1) \text{se}_{2n}(\eta, q_1) \dots\dots\dots (36)$$

$$w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}^{(2)} \text{Se}_{2n}(\xi, q_2) \text{se}_{2n}(\eta, q_2) \dots\dots\dots (37)$$

$$w_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{(1)} \text{Ce}_{2n}(\xi, q_3) \text{ce}_{2n}(\eta, q_3) \dots\dots\dots (38)$$

この場合の振動数方程式は

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \dots \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \dots \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

となり, 要素 e_{mn} は

$$\begin{aligned} e_{mn} = & \{ -(\sigma_1 - 1) I^{(2m, 2n)}(q_2, q_1) \\ & \times \text{Se}_{2n}'(\xi_0, q_1) / \text{Se}_{2n}(\xi_0, q_1) \\ & - \sum_{i=0}^{\infty} L^{(2i, 2n)}(q_3, q_1) [-(\sigma_2 - 1) N^{(2m, 2i)}(q_2, q_3) \\ & + (\sigma_1 - 1) \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma^{(2m, 2j)}(q_2, q_1) M^{(2j, 2i)}(q_1, q_3)] \\ & \times \text{Ce}_{2i}(\xi_0, q_3) / \text{Ce}_{2i}'(\xi_0, q_3) \} \text{Se}_{2m}(\xi_0, q_2) \\ & + (\sigma_2 - 1) I^{(2m, 2n)}(q_2, q_1) \text{Se}_{2m}'(\xi_0, q_2), \\ & (m, n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

式(40)において,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2m, 2n)}(q_2, q_1) &= \sum_{u=1}^{\infty} B_{2u}^{(2m)}(q_2) B_{2u}^{(2n)}(q_1), \\ L^{(2m, 2n)}(q_3, q_1) &= - \sum_{u=1}^{\infty} 2u A_{2u}^{(2m)}(q_3) B_{2u}^{(2n)}(q_1), \\ M^{(2m, 2n)}(q_1, q_3) &= \sum_{u=1}^{\infty} 2u B_{2u}^{(2m)}(q_1) A_{2u}^{(2n)}(q_3), \\ N^{(2m, 2n)}(q_2, q_3) &= \sum_{u=1}^{\infty} 2u B_{2u}^{(2m)}(q_2) A_{2u}^{(2n)}(q_3) \\ &\dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここに, $q_2, q_3 < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \text{Se}_{2n}(\xi_0, q_2) &\rightarrow \text{Se}_{2n}(\xi_0, -\bar{q}_2), \\ \text{Ce}_{2n}(\xi_0, q_3) &\rightarrow \text{Ce}_{2n}(\xi_0, -q_3), \\ B_{2u}^{(2n)}(q_2) &\rightarrow (-1)^{n+u} B_{2u}^{(2n)}(\bar{q}_2), \\ A_{2u}^{(2n)}(q_3) &\rightarrow (-1)^{n+u} A_{2u}^{(2n)}(\bar{q}_3) \\ &\dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

のように置き換えられる.

4. 特別の場合

ここで, 前節で求められた振動数方程式について, 特別の場合を考える.

4.1 古典薄板理論による楕円形板の振動 板が非常に薄くなるにしたがって, $R, S \rightarrow 0$ となる. そのとき, 式(2), (7)および(18)より,

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &\rightarrow \delta_0^2, \delta_2^2 \rightarrow -\delta_0^2, \delta_3^2 \rightarrow -\infty, \sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0, \\ q_1 &\rightarrow \delta_0^2 c^2 / 4, q_2 \rightarrow -\delta_0^2 c^2 / 4, q_3 \rightarrow -\infty \\ &\dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

ここで

$$q \rightarrow \delta_0^2 c^2 / 4 \dots\dots\dots (44)$$

とおき, さらに付録Aで導いた関係式(65)~(68)を用いて, 古典薄板理論による楕円形板の振動数方程式に導く行列式の要素を得ることができる.

S-S振動: 式(20)~(23)から,

$$\begin{aligned} e_{mn} = & \Gamma^{(2m, 2n)}(-q, q) [\text{Ce}_{2n}'(\xi, q) \text{Ce}_{2m}(\xi, -q) \\ & - \text{Ce}_{2n}(\xi, q) \text{Ce}_{2m}'(\xi, -q)] / \text{Ce}_{2n}(\xi, q), \\ & (m, n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2m, 2n)}(-q, q) = & (-1)^m \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u A_{2u}^{(2m)}(q) \\ & \times A_{2u}^{(2n)}(q) \mu_u \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

これは, Shibaoka⁽¹⁾によって導かれた式と一致する.

S-A振動: 式(27)~(29)から,

$$\begin{aligned} e_{mn} = & \Gamma^{(2m+1, 2n+1)}(-q, q) [\text{Ce}_{2n+1}'(\xi, q) \\ & \times \text{Ce}_{2m+1}(\xi, -q) - \text{Ce}_{2n+1}(\xi, q) \\ & \times \text{Ce}_{2m+1}'(\xi, -q)] / \text{Ce}_{2n+1}(\xi, q), \\ & (m, n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2m+1, 2n+1)}(-q, q) = & (-1)^m \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u B_{2u+1}^{(2m+1)}(q) \\ & \times A_{2u+1}^{(2n+1)}(q) \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

A-S振動: 式(33)~(35)から,

$$\begin{aligned} e_{mn} = & \Gamma^{(2m+1, 2n+1)}(-q, q) [\text{Se}_{2n+1}'(\xi, q) \\ & \times \text{Se}_{2m+1}(\xi, -q) - \text{Se}_{2n+1}(\xi, q) \\ & \times \text{Se}_{2m+1}'(\xi, -q)] / \text{Se}_{2n+1}(\xi, q), \\ & (m, n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

ここに

$$\Gamma^{(2m+1,2n+1)}(-q, q) = (-1)^m \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u A_{2u+1}^{(2m+1)}(q) \times B_{2u+1}^{(2n+1)}(q) \dots\dots\dots (50)$$

A-A 振動: 式(40)~(42)から,

$$e_{mn} = \Gamma^{(2m,2n)}(-q, q) [\text{Se}'_{2n}(\xi, q) \text{Se}_{2m}(\xi, -q) - \text{Se}_{2n}(\xi, q) \text{Se}'_{2m}(\xi, -q)] / \text{Se}_{2n}(\xi, q), \\ (m, n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (51)$$

ここに

$$\Gamma^{(2m,2n)}(-q, q) = (-1)^m \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u B_{2u}^{(2m)}(q) B_{2u}^{(2n)}(q) \dots\dots\dots (52)$$

4.2 円形板の振動 楕円形板が半径 b の円形板に移行するとき, $c \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \infty$ および $q \rightarrow 0$. そのとき⁽⁸⁾,

$$A_0^{(0)} \rightarrow 1/\sqrt{2}, A_u^n \rightarrow 1 (n = u \neq 0), 0 (n \neq u), \\ B_u^n \rightarrow 1 (n = u), 0 (n \neq u), (n, u = 1, 2, 3, \dots), \\ \text{Ce}_n(\xi, q_r) \rightarrow p'_n(q_r) J_n(k_r b), (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{Se}_n(\xi, q_r) \rightarrow s'_n(q_r) J_n(k_r b), (n = 1, 2, 3, \dots), \\ (r = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (53)$$

ここに, J はベッセル関数で p'_n と s'_n は乗数である. 上式を用いて, 円形板の振動数方程式は, 式(19), (20), (27), (33), (39) および (40) より,

$$n(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_1 - 1) \delta_1 b J_{n+1}(\delta_1 b) / J_n(\delta_1 b) \\ + (\sigma_2 - 1) \delta_2 b J_{n+1}(\delta_2 b) / J_n(\delta_2 b) - n^2(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \times J_n(\delta_3 b) / [n J_n(\delta_3 b) - \delta_3 b J_{n+1}(\delta_3 b)] = 0, \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (54)$$

式(3)に与えられる R と S が小さくなってくると, 式(2)と(22)から, 式(54)は

$$n(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_1 - 1) \delta_1 b J_{n+1}(\delta_1 b) / J_n(\delta_1 b) \\ - (\sigma_2 - 1) \bar{\delta}_2 b I_{n+1}(\bar{\delta}_2 b) / I_n(\bar{\delta}_2 b) - n^2(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \times I_n(\bar{\delta}_3 b) / [n I_n(\bar{\delta}_3 b) + \bar{\delta}_3 b I_{n+1}(\bar{\delta}_3 b)] = 0, \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (55)$$

ここに, I は変形ベッセル関数で, また

$$\bar{\delta}_2^2 = -\delta_2^2, \bar{\delta}_3^2 = -\delta_3^2 \dots\dots\dots (56)$$

式(54)と(55)において, n は節直線の数を表し, $n=0$ の場合は軸対称振動の振動数方程式⁽⁹⁾となる.

また, $R, S \rightarrow 0$ のとき, 式(2)と(56)より,

$$\bar{\delta}_1^2, \bar{\delta}_2^2 \rightarrow \delta_0^2, \bar{\delta}_3^2 \rightarrow \infty \dots\dots\dots (57)$$

となる. そのとき, 式(7)より $\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0$ となるから, 式(55)は

$$J_{n+1}(\delta_0 b) / J_n(\delta_0 b) + I_{n+1}(\delta_0 b) / I_n(\delta_0 b) = 0, \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (58)$$

となる. この式は, 古典薄板理論による半径 b の円形板の振動数方程式⁽¹⁰⁾を与える.

5. 数 値 計 算

数値計算は, せん断修正係数 $\kappa^2 = \pi^2/12$ およびポアソン比 $\nu=0.3$ の場合に実施し, 各基本振動の最低次元固有振動数を求めた. 変形マシュー関数の数値計算には, 双曲線関数による展開級数⁽⁸⁾を用いた. 無限行列方程式の解を求めるために, その左上端から順次形成される有限行列方程式 $\Delta_n=0, n=1, 2, 3, \dots$ を計算することにより, 解の収束状況を検討した. 長短両軸の長さ比 a/b が大きいほど解の収束は遅くなるが, 長短両軸に関して対称な振動(S-S振動), 長軸に関して対称で短軸に関して逆対称な振動(S-A振動), 長軸に関して逆対称で短軸に関して対称な振動(A-S振動)および長短両軸に関して逆対称な振動(A-A振動)の場合に, それぞれの無限行列方程式から4行4列, 5行5列, 5行

Table 1. The lowest dimensionless eigenfrequency $\delta_0 b$ of each normal vibration. ( ): Wang et al⁽⁶⁾.

a/b	$2b/h$	S-S	S-A	A-S	A-A
1	5	2.733	3.604	3.6045	4.248
	10	3.040	4.214	4.214	5.175
		(3.041)	(4.216)	(4.216)	
	20	3.153	4.492	4.492	5.671
		(3.153)	(4.492)	(4.492)	(5.677)
	50	3.189	4.591	4.591	5.865
6/5	Classical	3.196	4.611	4.611	5.906
	5	2.565	3.292	3.500	4.054
	10	2.825	3.772	4.073	4.850
	20	2.918	3.973	4.328	5.254
	50	2.947	4.042	4.418	5.408
	Classical	2.953	4.055	4.436	5.440
2	5	2.301	2.689	3.333	3.636
	10	2.515	2.987	3.856	4.268
		(2.516)	(2.988)	(3.858)	4.268
	20	2.589	3.099	4.084	4.563
		(2.589)	(3.099)	(4.084)	
	50	2.612	3.135	4.163	4.670
3	Classical	2.616	3.142	4.179	4.692
	5	2.216	2.445	3.268	3.460
	10	2.418	2.695	3.776	4.033
		(2.418)	(2.696)	3.776	4.033
	20	2.486	2.786	3.993	4.292
		(2.487)	(2.786)		
4	50	2.508	2.815	4.068	4.384
	Classical	2.512	2.820	4.084	4.402
	5	2.182	2.344	3.240	3.381
	10	2.378	2.575	3.740	3.928
	20	2.445	2.657	3.953	4.171
	50	2.466	2.683	4.026	4.256
5	Classical	2.470	2.688	4.041	4.273
	5	2.163	2.288	3.224	3.335
	10	2.356	2.508	3.719	3.867
	20	2.422	2.586	3.930	4.101
	50	2.443	2.610	4.002	4.183
	Classical	2.447	2.615	4.017	4.199

5列および6行6列の有限な行列方程式を採用することにより収束解を得ることができた(付録B)。比 $2b/h$ が大きくなるにつれて、変形マシユ関数とその微分形式の比を含む項が省略できるようになるので、解の収束は迅速になった。

表1に、長短両軸の長さ比 $a/b=1$ (円板), $6/5, 2, 3, 4, 5$ の場合に、短軸の長さ b と厚さ h の比 $2b/h=5, 10, 20, 50$ にたいして、各基本振動について最低次無次元固有振動数の計算結果の一部を与えた。式(45)~(52)から求まる古典薄板理論による結果(Classical)も表に与えた。古典薄板理論によるS-S振動の結果は、変形マシユ関数にベッセル関数の積による展開級数を用いて求めた値⁽²⁾と同じである。また表中のカッコ内に、 $a/b=1\sim 3$ の場合に、リツツの方法によって求めたWangら⁽⁶⁾の解を与えた。Wangらの解は、せん断修正係数として $5/6$ を採った結果であるが、本研究の数値結果とよく一致している。

図1(a),(b),(c),(d)は、それぞれ、S-S, S-A, A-S, A-A振動の計算結果をグラフに表したものである。図の中に、各基本振動のモード形状を与えた。モード形状中の直線は節を表す。図の縦軸は無次元固有振動数 $\delta_0 b$ で、横軸は楕円形板の短軸の長さ b と厚さ h の比 $2b/h$ を示す。表にも与えたように、同一の $2b/h$ に対して、無次元固有振動数 $\delta_0 b$ の値は、S-S, S-A, A-S, A-A振動の順に、また比 a/b の値が小さくなるにつれて、大きくなる。Mindlin理論による解と古典板理論による数値解の差異は、S-S, S-A, A-S, A-A振動の順に大きくなることも表から分かる。図は、一連の $2b/h$ にたいして求めた $\delta_0 b$ の数値計算結果を、グラフに示したものである。すべての基本振動において、比 $2b/h$ が大きくなるにつれて無次元固有振動数 $\delta_0 b$ の値は増加するが、表1に示した古典薄板理論による解(Classical)に、単調に漸近する様相をグラフ上でみることができる。

(a) S-S vibration

(b) S-A vibration

(c) A-S vibration

(d) A-A vibration

Fig.1 Dimensionless eigenfrequency versus minor axial length-thickness ratio in each normal vibration.

図2(a)および(b)は、短軸の長さ b と厚さ h の比 $2b/h$ の値が10および50の場合に、一連の a/b にたいして求めた無次元固有振動数 $\delta_0 b$ の数値計算結果をグラフに示したものである。すべての基本振動において、 a/b が大きくなるにつれて、無次元固有振動数 $\delta_0 b$ は減少するが、付録Cの式(75)~(78)から計算される対向端固定無限長

Fig.2 Dimensionless eigenfrequency versus aspect ratio in two minor axial length-thickness ratios.

帯板の無次元固有振動数 $\delta_0 b$, すなわち, $2b/h$ の値が 10 の場合には 2.283 (S-S, S-A) および 3.644 (A-S, A-A) に, また $2b/h$ の値が 50 の場合には 2.361 (S-S, S-A) および 3.913 (A-S, A-A) に, 単調に漸近する傾向をグラフ上でみることができる⁽²⁾. なお, A-S および A-A 振動に対する無限長帯板の振動モードは, 板幅 $2b$ の中央に節直線を有するものである.

6. 結 言

本研究は, 楕円形板の運動方程式の解であるマシュー関数と変形マシュー関数を用いて, 周辺固定楕円形板の自由たわみ振動を, 回転慣性とせん断変形の影響を考慮したミンドリン理論に基づいて厳密に解析した. 固有振動数を決定する振動数方程式を求めるにあたり, 数値計算において迅速な収束性を与えるマシュー関数の直交性を利用した. 振動数方程式は無限行列方程式の形式で与えられることを示すと共に, 4 種類の基本振動にたいする行列式の要素を個別に与えた. これらの

行列式の要素は, 板厚が小さくなるにつれて, 古典薄板理論による要素になることを示した. また, ここで求まる振動数方程式は, 円形板の振動数方程式に移行することも示した.

本研究において得られた無限行列方程式から, 比較的 low 次有限行列方程式を採用することにより, 良好な収束解を得ることができた. 円形板と 5 種類の楕円形板について, 無次元固有振動数に及ぼす短軸の長さ⁽²⁾と厚さの比の影響を調べたところ, 各基本振動とも, この比が小さいほど, 無次元固有振動数は小さく, またこの比が大きくなるにつれて, 古典薄板理論による解に漸近する結果を得た. 次に, 2 種類の短軸の長さ⁽²⁾と厚さの比の場合に, 無次元固有振動数に及ぼす楕円の長短両軸の長さ比の影響を調べた. いずれの場合も, 長短両軸の長さ比が大きくなるにつれて, 無次元固有振動数は小さくなり, 各振動モードに対応する対向端固定無限長帯板の無次元固有振動数に漸近する特徴的な傾向を示した.

文 献

- (1) Shibaoka, Y., *J. Phys. Soc. Japan*, **11**(1956), 797-803.
- (2) 佐藤謙蔵, 機論, **41**-347(1975), 1996-2001.
- (3) Mindlin, R.D., *J. Appl. Mech.*, **18**(1951), 31-38.
- (4) Callahan, W.R., *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**(1964), 823-829.
- (5) 佐藤謙蔵, 機論 (I), No. 96-1(1996), 404-405.
- (6) Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S., *Struct. Eng. And Mech.*, **3**(1995), 35-48.
- (7) Liew, K.M., Kitipornchai, S. and Lim, C.W., *J. Eng. Mech.-Proc. ASCE*, **124**(1998), 137-145.
- (8) McLachlan, N.W., *Theory and Application of Mathieu Function* (1964), Dover.
- (9) Deresiewicz, H., *J. Appl. Mech.*, **23**(1956), 319.
- (10) Leissa, A.W., *Vibration of Plates*, NASA SP-160 (1969), NASA Washington, D.C.

付録A: 変形マシュー関数とその微分形式の比

ここでは, パラメータ $q (=k^2)$ が大きくなるにつれて, $-q$ をもつ変形マシュー関数とその微分形式の比が零に近づくことを証明する. このような場合には, ベッセル関数による展開級数⁽⁸⁾で与えられる変形マシュー関数を用いると都合がよい. すなわち, $-q$ をもつ変形マシュー関数 $Ce_{2n}(\xi, -q)$ の場合,

$$Ce_{2n}(\xi, -q) = (-1)^n [ce_{2n}(\pi/2, q)/A_0^{(2n)}] \times \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} I_{2r}(2k \sinh \xi) \dots \dots \dots (59)$$

$$Ce'_{2n}(\xi, -q) = (-1)^n [ce'_{2n}(\pi/2, q)/A_0^{(2n)}] \times \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} [2r I_{2r}(2k \sinh \xi) \coth \xi + 2k I_{2r+1}(2k \sinh \xi) \cosh \xi] \dots \dots \dots (60)$$

また, $x \rightarrow \infty$ のときの漸近公式⁽⁸⁾

$$I_{2n}(x) \rightarrow e^x / (2\pi x)^{1/2} \dots\dots\dots (61)$$

を用いると, 式(59)と(60)は, $q \rightarrow \infty$ すなわち $k \rightarrow \infty$ のとき

$$Ce_{2n}(\xi, -q) \rightarrow \gamma_{2n}(q) e^{2k \sinh \xi} / (4\pi k \sinh \xi)^{1/2} \dots (62)$$

$$Ce'_{2n}(\xi, -q) \rightarrow \gamma_{2n}(q) e^{2k \sinh \xi} (2n \coth \xi + 2k \cosh \xi) / (4\pi k \sinh \xi)^{1/2} \dots\dots\dots (63)$$

ここに

$$\gamma_{2n}(q) = (-1)^n [ce_{2n}(\pi/2, q)/A_0^{(2n)}] \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \dots (64)$$

よって, $q \rightarrow \infty$ すなわち $k \rightarrow \infty$ のとき, 式(62)と(63)から, 直ちに変形マシュー関数とその微分係数の比が零に近づくこと, すなわち

$$Ce_{2n}(\xi, -q)/Ce'_{2n}(\xi, -q) \rightarrow 0 \dots\dots\dots (65)$$

を得ることができる. 同様にして,

$$Ce_{2n+1}(\xi, -q)/Ce'_{2n+1}(\xi, -q) \rightarrow 0 \dots\dots\dots (66)$$

$$Se_{2n}(\xi, -q)/Se'_{2n}(\xi, -q) \rightarrow 0 \dots\dots\dots (67)$$

$$Se_{2n+1}(\xi, -q)/Se'_{2n+1}(\xi, -q) \rightarrow 0 \dots\dots\dots (68)$$

となることを容易に証明できる.

付録B: 数値解の収束状況

数値解の収束状況の例として, S-S振動の $a/b=2, 5$ および $2b/h=5, 20$ の場合について下表に与える. 表中の n は, 正方行列式 Δ_n の次数を表す.

a/b	n	$2b/h$	$\delta_0 a$	$2b/h$	$\delta_0 a$
2	1	5	2.486	20	2.876
	2		2.300		2.588
	3		2.301		2.589
	4		2.301		2.589
	5		2.301		2.589
5	1	5	2.565	20	3.004
	2		2.182		2.479
	3		2.162		2.424
	4		2.163		2.422
	5		2.163		2.422

付録C: 対向端固定無限長帯板の自由たわみ振動

座標軸 y 方向に無限に長い帯板の自由たわみ振動の運動方程式は, 文献(3)から,

$$d^2 w_1 / dx^2 + \delta_1^2 w_1 = 0, \quad d^2 w_2 / dx^2 + \delta_2^2 w_2 = 0 \dots (69)$$

で, 振動変位は

$$\psi_x = (\sigma_1 - 1) dw_1 / dx + (\sigma_2 - 1) dw_2 / dx \dots\dots\dots (70)$$

$$w = w_1(x) + w_2(x) \dots\dots\dots (71)$$

のように書くことができる. また, 幅 $2b$ をもつ無限長帯板の対向端固定の境界条件は, $x = \pm b$ で,

$$\psi_x = w = 0 \dots\dots\dots (72)$$

式(69)の解は, 積分定数を P_1, P_2, Q_1 および Q_2 として,

$$w_1 = P_1 \sin \delta_1 x + P_2 \cos \delta_1 x \dots\dots\dots (73)$$

$$w_2 = Q_1 \sin \delta_2 x + Q_2 \cos \delta_2 x \dots\dots\dots (74)$$

式(73)と(74)を式(72)に代入して, 積分定数を消去することにより, 振動数方程式

$$(\sigma_1 - 1) \delta_1 \sin \delta_1 b \cos \delta_2 b - (\sigma_2 - 1) \delta_2 \cos \delta_1 b \sin \delta_2 b = 0 \dots\dots\dots (75)$$

および

$$(\sigma_1 - 1) \delta_1 \cos \delta_1 b \sin \delta_2 b - (\sigma_2 - 1) \delta_2 \sin \delta_1 b \cos \delta_2 b = 0 \dots\dots\dots (76)$$

を得る. 式(75)と(76)は, 帯板の中央に関して対称な振動と逆対称な振動に対する式である.

式(3)に与えられる R と S が小さい場合に, 式(56)の第1式を用いると, 式(75)と(76)は

$$(\sigma_1 - 1) \delta_1 \sin \delta_1 b \cosh \delta_2 b + (\sigma_2 - 1) \delta_2 \cos \delta_1 b \sinh \delta_2 b = 0 \dots\dots\dots (77)$$

および

$$(\sigma_1 - 1) \delta_1 \cos \delta_1 b \sinh \delta_2 b - (\sigma_2 - 1) \delta_2 \sin \delta_1 b \cosh \delta_2 b = 0 \dots\dots\dots (78)$$

となる. さらに $R, S \rightarrow 0$ の場合は

$$\cos \delta_0 b \sinh \delta_0 b + \sin \delta_0 b \cosh \delta_0 b = 0 \dots\dots\dots (79)$$

および

$$\cos \delta_0 b \sinh \delta_0 b - \sin \delta_0 b \cosh \delta_0 b = 0 \dots\dots\dots (80)$$

になる. 式(79)と(80)は, 古典薄板理論による対向端固定無限長帯板の振動数方程式を与える.